UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI 1818

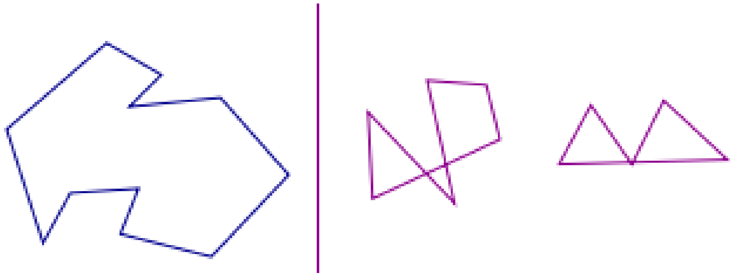
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

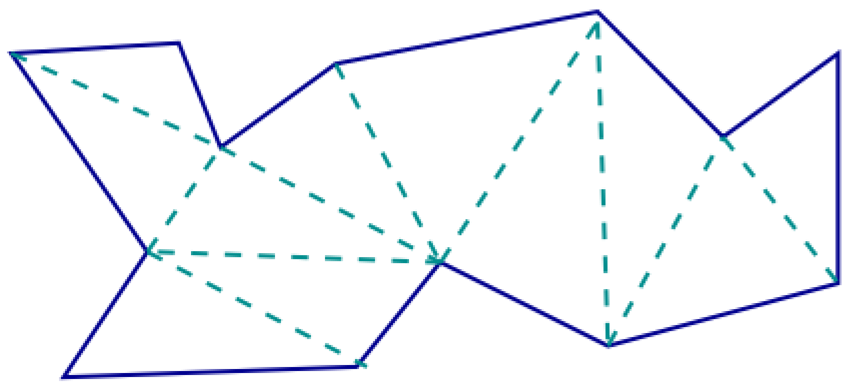
Geometrie computationala

6. Triangularea poligoanelor simple. Teoria triangularii. Algoritmi de triangulare

Triangularea poligoanelor *simple*

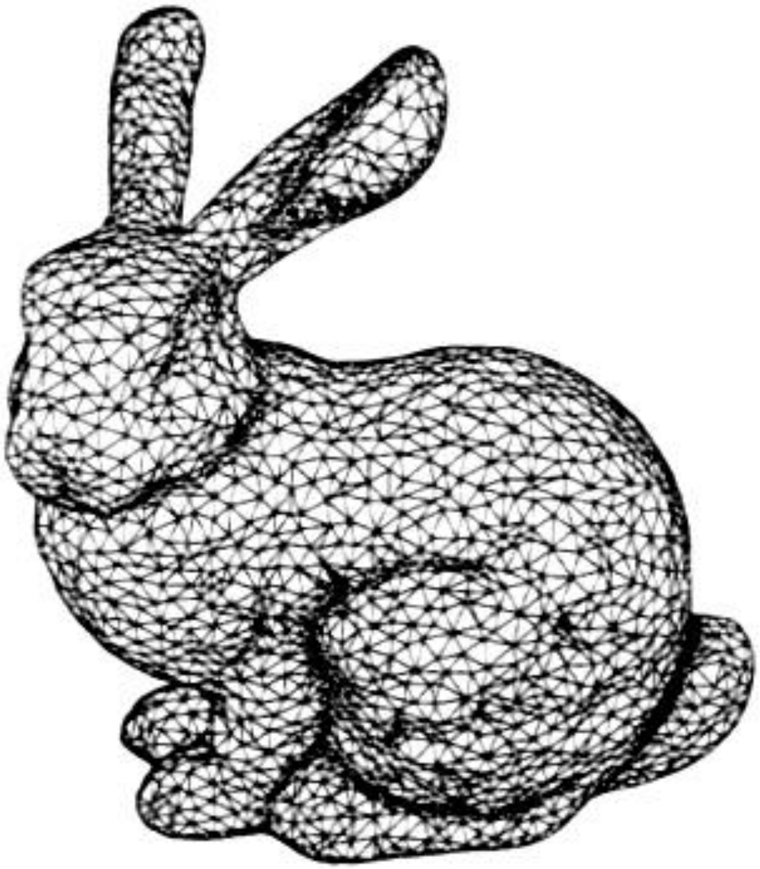
- **Intrare:** un poligon simplu *P* descris de un sir ordonat de varfuri $<v_0, \ldots v_{n-1}>$.
- **Poligon simplu:**
  lant poligonal inchis non-intersectabil

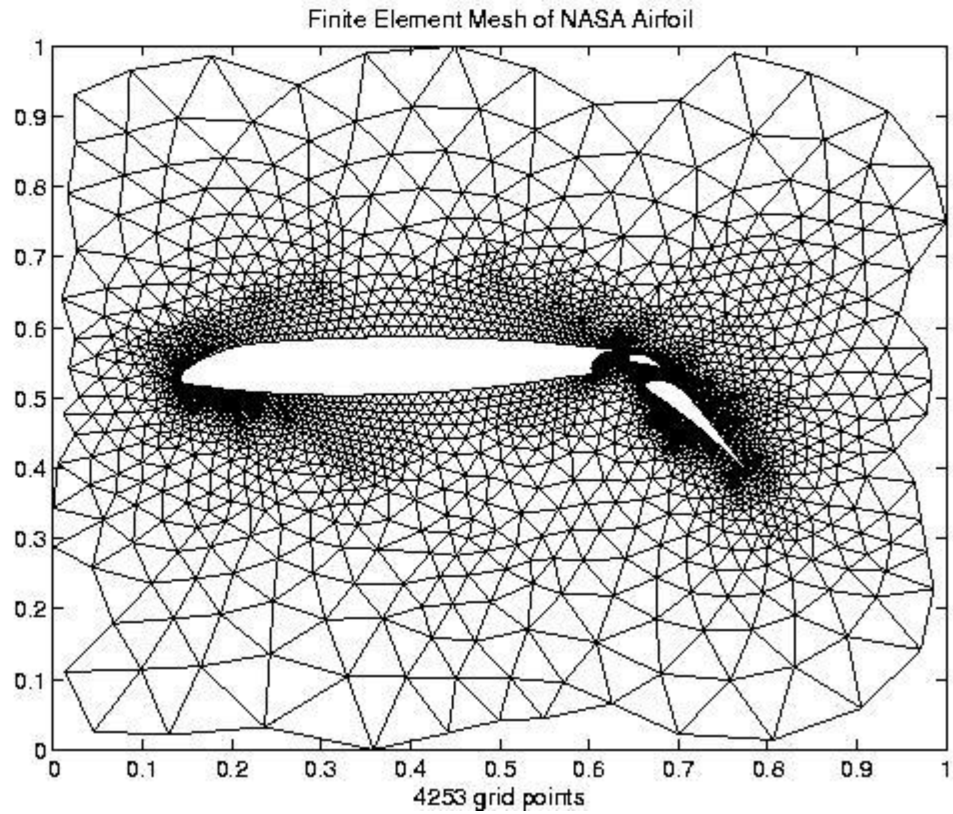




- **Iesire:** o partitionare a lui *P* in n-2 triunghiuri nesuprapuse, si adiacentele dintre ele.

Exemple de triangulare





Istoric al algoritmilor

• O(nlogn)	Monotone pieces 1978
• O(nlogn)	D&C 1982
• O(nlogn)	Plane Sweep 1985
• O(nlog*n)	Randomized 1991
• O(n)	Polygon cutting, 1991
• O(n)	Randomized 2000
• O(n)	*folosind constante mici* ??

Observatii

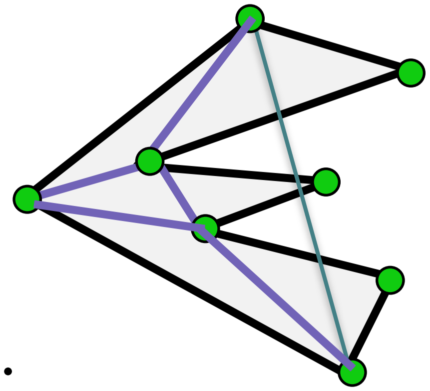
- Triangularea nu este unica. O varianta de triangulare este suficienta.
- Triangularea este posibila in orice situatie.
- Nu sunt necesare varfuri suplimentare.
- Triangularea adauga noi muchii, numite *diagonale*, intre varfurile existente.

Teoria triangularii (1)

- Un varf este **<u>convex</u>** daca unghiul sau interior este $< \pi$, in caz contrar acesta este **<u>concav</u>**.

- O **<u>diagonala</u>** este o noua muchie intre doua varfuri ale unui poligon si se afla complet inclusa in poligon.

Nu orice segment intre doua varfuri este diagonala



- **Lema 1:** Orice poligon are un varf convex.

- **Demonstratie:** Varful care are coordonata y cea mai mare este convex.

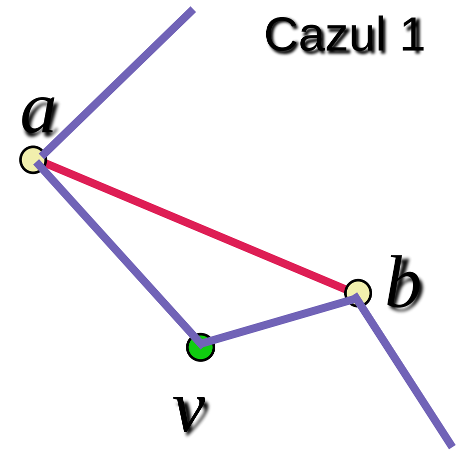
Teoria triangularii (2)

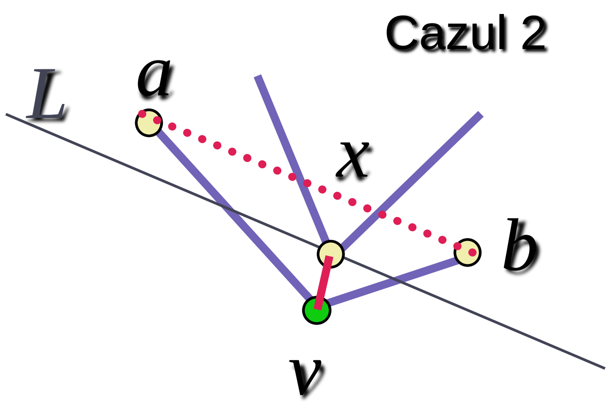
Lema 2: Orice poligon cu n > 3 varfuri are o diagonala.

Demonstratie: fie v un varf convex si a, b, varfurile sale adiacente. Deoarece P este un poligon simplu si n > 3, nu exista o muchie intre a si b.

Se considera urmatoarele doua cazuri:

1. Noua muchie ab este o diagonala
2. In caz contrar, exista un varf x ce este cel mai apropiat de v raportat la o linie L paralela cu ab, care este o diagonala.



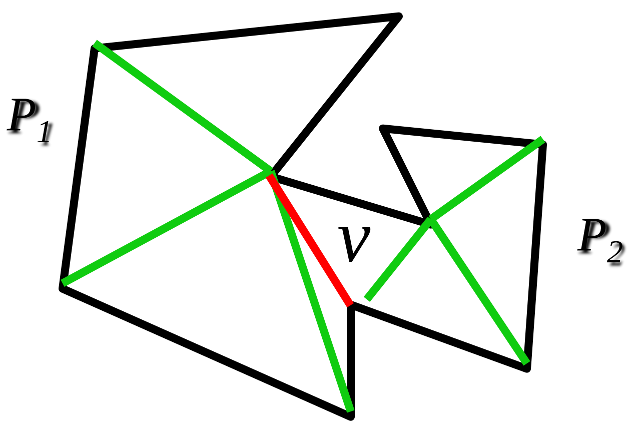


Teoria triangularii (3)

Teorema: Orice poligon planar simplu cu *n* muchii are o triangulare in *n*-2 triunghiuri folosind *n*-3 diagonale

Demonstratie (inductie):

- Baza: Un triunghi (n=3) are o triangulare fara diagonale si un singur triunghi rezultant.
- Inductie pe *n*:
  - Pentru un poligon cu *n* varfuri se construieste o diagonala ce imparte poligonul in doua poligoane P_1 si P_2 cu n_1 si n_2 varfuri astfel incat $n_1+n_2-2 = n$.

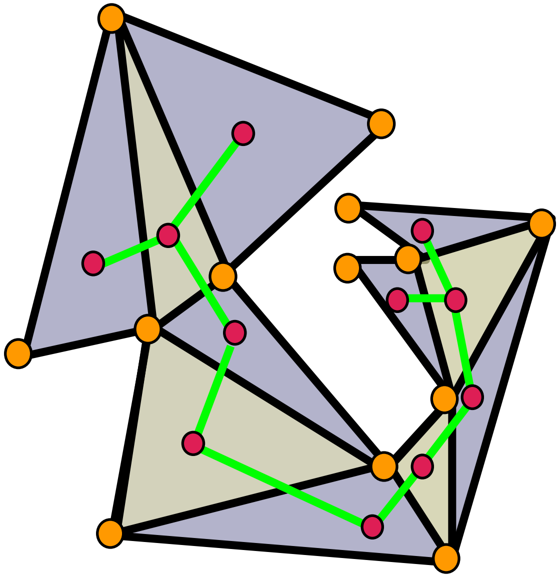


Diagonale: $(n_1-3)+(n_2-3)+1 = (n_1+n_2-2)-3 = n-3$
Triunghiuri: $(n_1-2)+(n_2-2) = (n_1+n_2-2)-2 = n-2$

Duala triangularii

Definitie: Duala unei triangulari T a unui poligon simplu P este un graf unde:

- Varfurile sunt triunghiuri din T
- Muchiile reprezinta adiacente intre triunghiuri



Proprietate: duala triangularii este un arbore in care gradul oricarui nod este maxim 3.

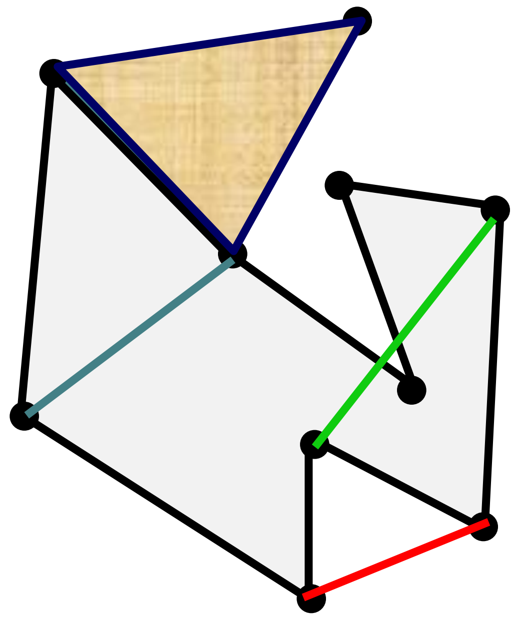
Demonstratie:

- Grad ≤ 3 (din constructie). Nici un triunghi nu are mai mult de 3 vecini.
- Lipsa cicluri (prin contradictie). Daca ar exista un ciclu, nu ar mai fi poligon simplu (are avea *gauri*).
- *De fapt, T este un arbore binar!*

Algoritm simplu de triangulare (1)

Idee: Se reduce poligonul prin *taierea* unui triunghi la fiecare iteratie.

Triunghiul taiat va fi format din 3 varfuri consecutive (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}). Diagonala este (v_i, v_{i+2}).

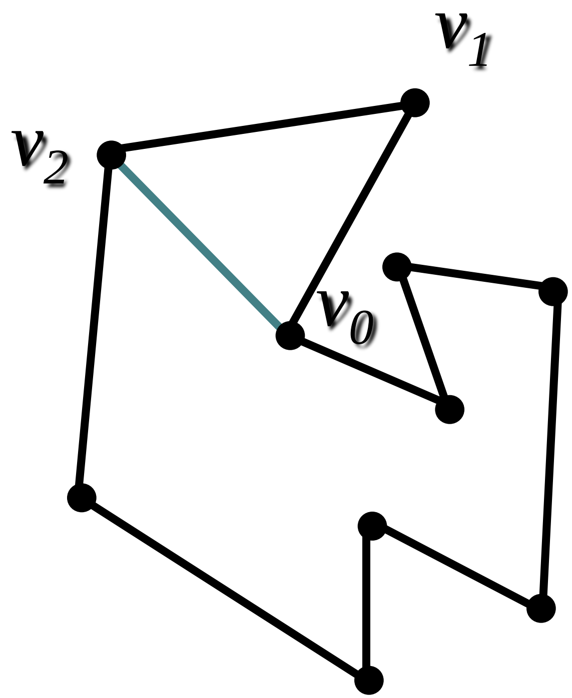


Test de validitate:

1. Diagonala nu intersecteaza alte varfuri ale poligonului.
2. Diagonala trebuie sa fie in interiorul poligonului.

Algoritm simplu de triangulare (2)

proc trianguleaza(P)
  if $|P| \le 3$
    intoarce(P);
    return;
  $i \leftarrow 0$;
  while diagonala(v_i,v_{i+2}) nu este legala
    i++;
  intoarce(v_i,v_{i+1},v_{i+2});
  elimina v_{i+1} din P;
  trianguleaza(P);



Complexitate: $n \times n$ teste ale diagonalelor, fiecare avand un cost de O(n) → $O(n^3)$.

Surse ale ineficientei:

- Teste repetate ale diagonalelor
- Diagonalele nu sunt sortate sau ordonate
- Diagonalele pot fi precalculate in $O(n^2)$.

Triangularea in O(*n*log*n*)

1. Se partitioneaza poligonul in componente **monotone**.
2. Se trianguleaza fiecare componenta monotona separat.