UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI 1818

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computationala

25. Aranjamente liniare: Aplicatii. Reprezentarea duala

Aplicatii

- Tehnica solida pentru rezolvarea unui numar de probleme
- Solutii optimale in planul dual
- Exemple de probleme:

1. Clasificarea punctelor – nivelele unui aranjament
2. Infasuratoarea convexa
3. Bisectoare
4. Triunghi de arie minima

Reprezentarea duala

- Reprezentare complementarea a dreptelor si punctelor – planuri primare si duale
- Se interpreteaza punctele ca drepte si dreptele ca puncte
  - punct in plan primar → dreapta in plan dual
  - dreapta in plan primar → punct in plan dual
- Reprezentarea duala (transformata):

punct $p = (a,b)$ → dreapta $p^*: y = ax - b$

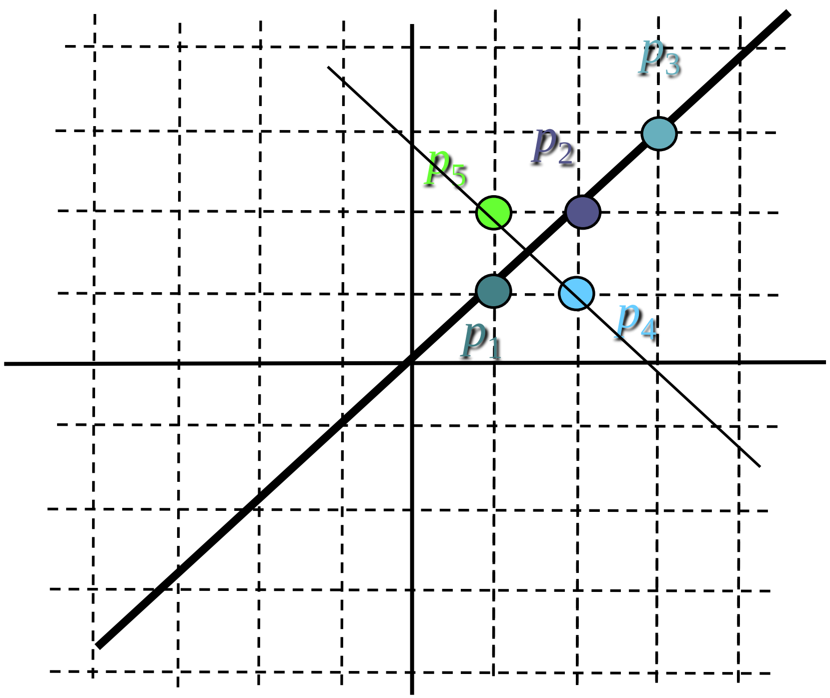
dreapta $l : y = ax + b$ → punct $l^* = (a,-b)$

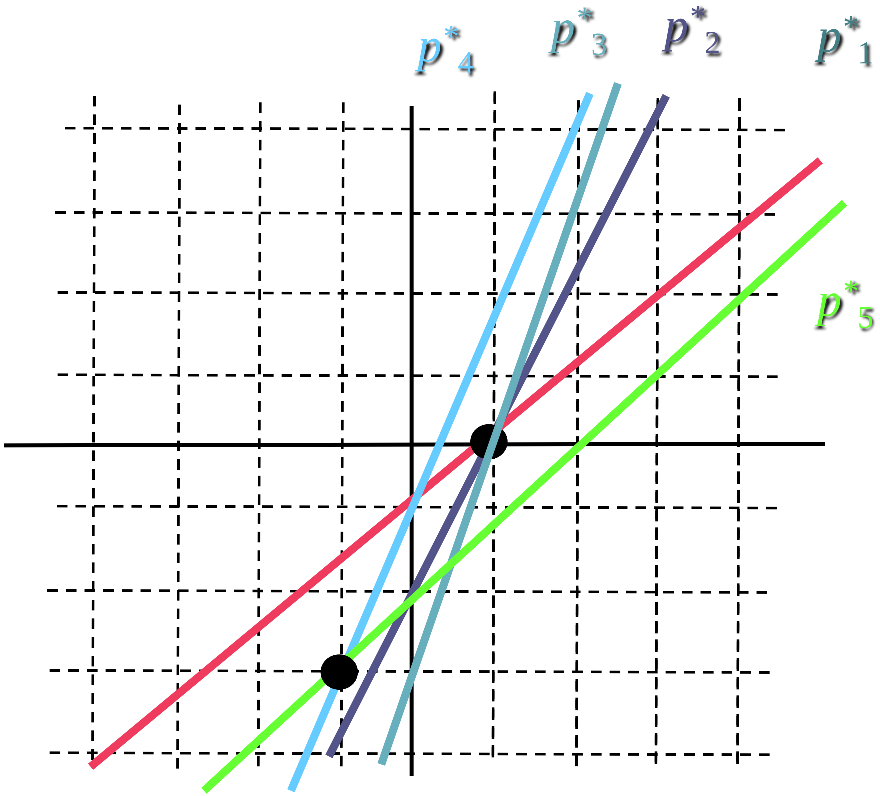
Nota: *Maparea nu functioneaza pentru drepte verticale (x=c).*
Se presupune ca nu exista verticale!

Reprezentare duala: exemplu

$p_1 = (1,1)$ $p^*_1 :\ y = x-1$
$p_2 = (2,2)$ $p^*_2 :\ y = 2x-2$
$p_3 = (3,3)$ $p^*_3 :\ y = 3x-3$
$p_4 = (2,1)$ $p^*_4 :\ y = 2x-1$
$p_5 = (1,2)$ $p^*_5 :\ y = x-2$

$l_1:\ y = x$ $l^*_1 :\ (1,0)$
$l_{45} :\ y = -x+3$ $l^*_{45} : (-3, -1)$





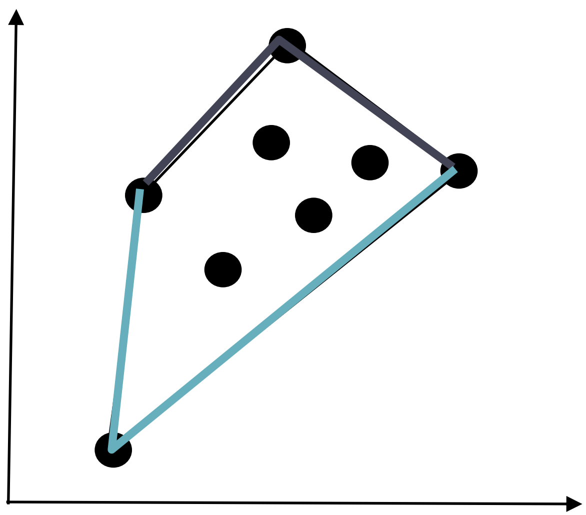
Proprietati reprezentare duala (1)

Transformarea pastreaza relatiile si ordinea

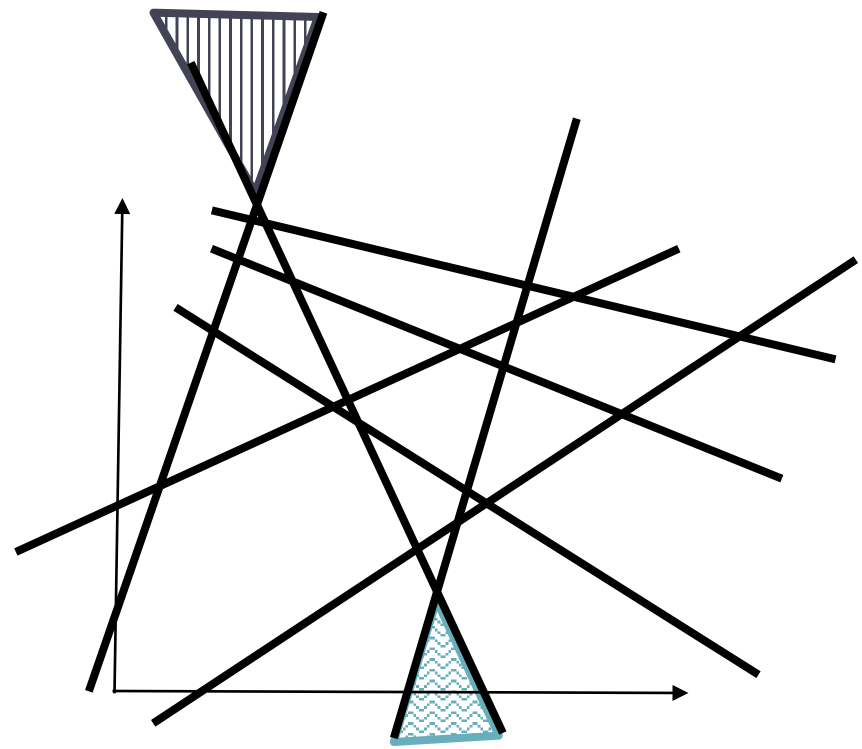
- **Pastrarea incidentei**
  - punctul p se afla pe linia l $\leftrightarrow$ punctul l^* se afla pe linia p^*
- **Pastrarea ordinii**
  - punctul p se afla deasupra dreptei l $\leftrightarrow$ dreapta p^* se afla deasupra punctului l^*
- **Pastrarea coliniaritatii**
  - 3 puncte pe o dreapta $\leftrightarrow$ 3 drepte se intersecteaza intr-un punct

Proprietati reprezentare duala (2)

- O solutie a unei probleme in planul primar ***P*** poate fi transformata de obicei intr-o solutie in planul dual ***D*** si viceversa.
- *Exemplu:*



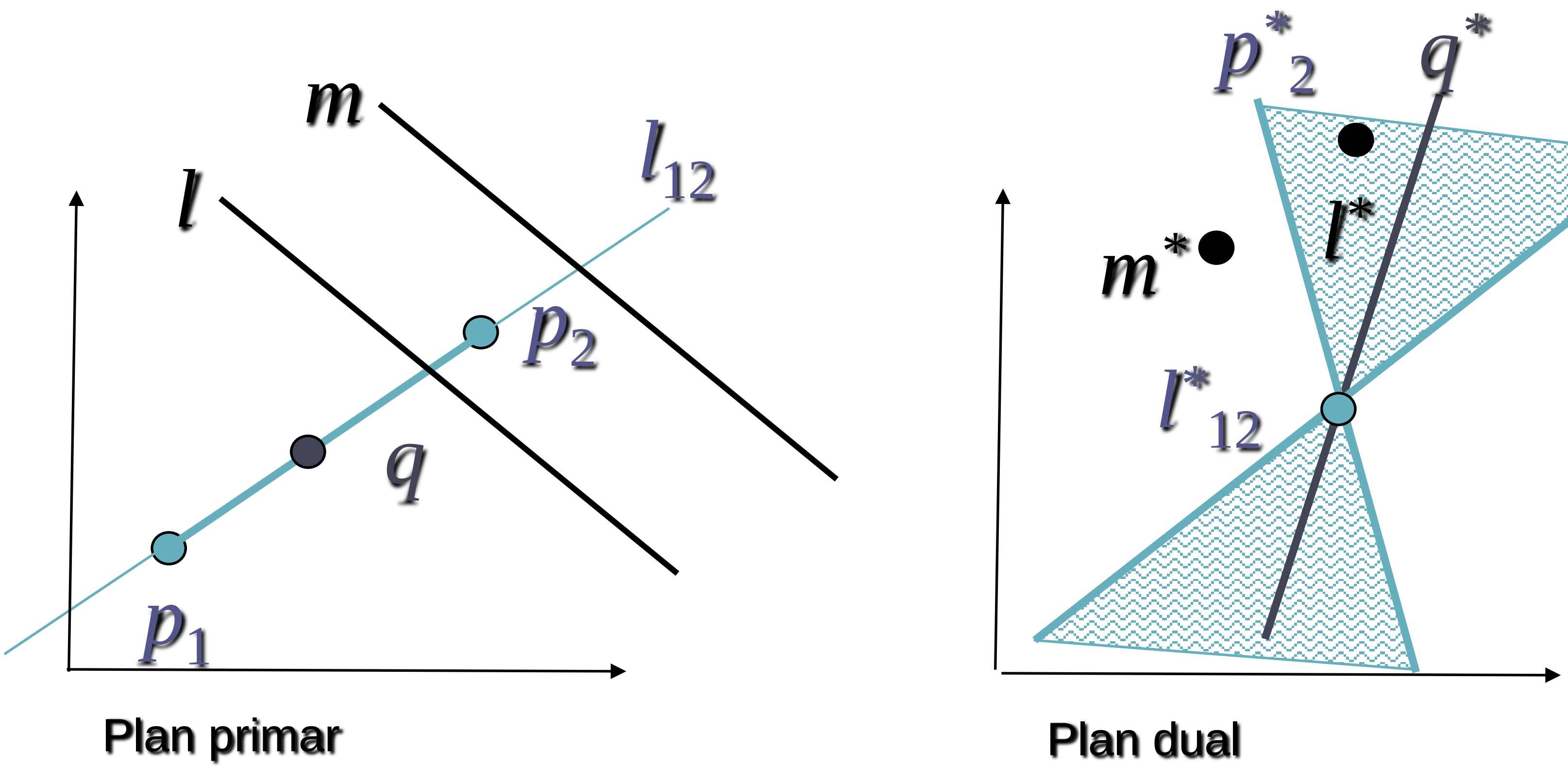
Infasuratoarea convexa a lui P



Infasuratoarea convexa duala a lui P*

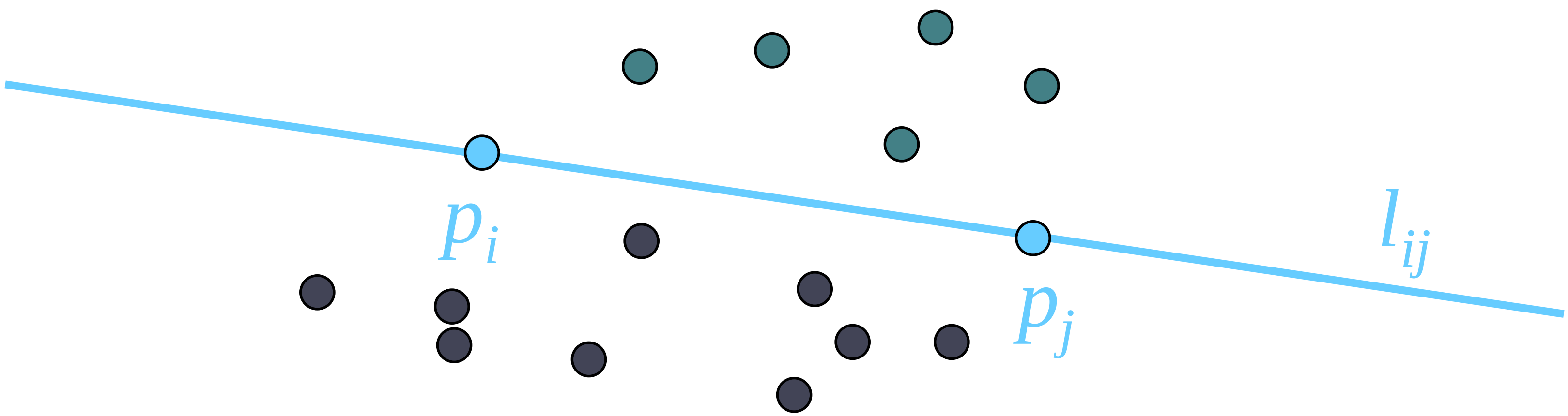
Reprezentare duala: segmente

- Segmente liniare in planul primar corespund formatiunilor triunghiulare in planul dual



Clasificarea punctelor (1)

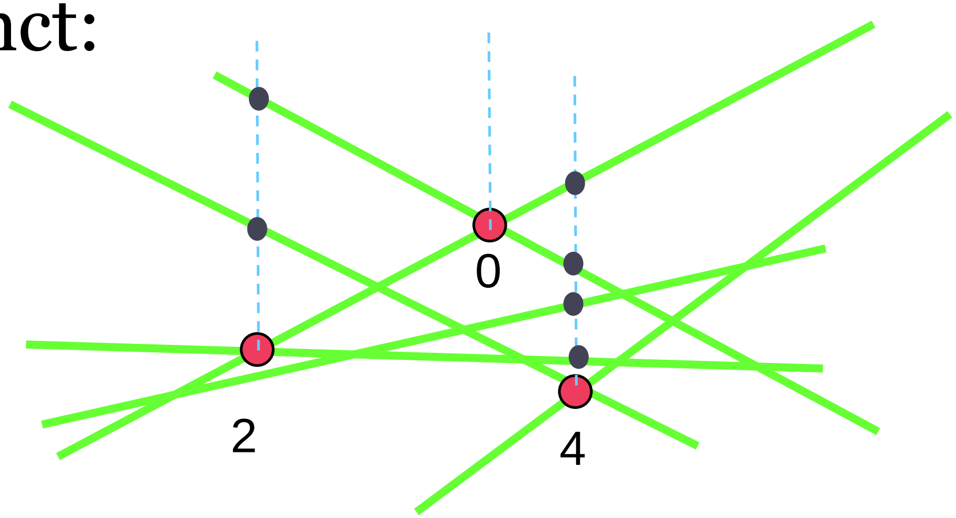
- Fie $P = \{p_1,\ldots, p_n\}$ o multime de n puncte in plan. Pentru toate perechile de puncte (p_i,p_j), sa se afle numarul de puncte aflate deasupra dreptei l_{ij}



- *Algoritm naiv:* se clasifica toate cele n^2 puncte in raport cu fiecare din $n(n-1)/2$ drepte l_{ij} $\rightarrow O(n^3)$ timp

Clasificarea punctelor (2)

- **Transformare duala:** $P^*=\{p_1^*,\ldots, p_n^*\}$ este un set de drepte ce se intersecteaza in punctele l_{ij}^* iar dreapta l_{ij} este indusa de punctele (p_i,p_j)
- Se calculeaza *nivelul* fiecarui punct dual l_{ij}^* in aranjamentul dual $A(P^*)$. Nivelul unui punct este dat de numarul de puncte ce se afla *deasupra* acelui punct:



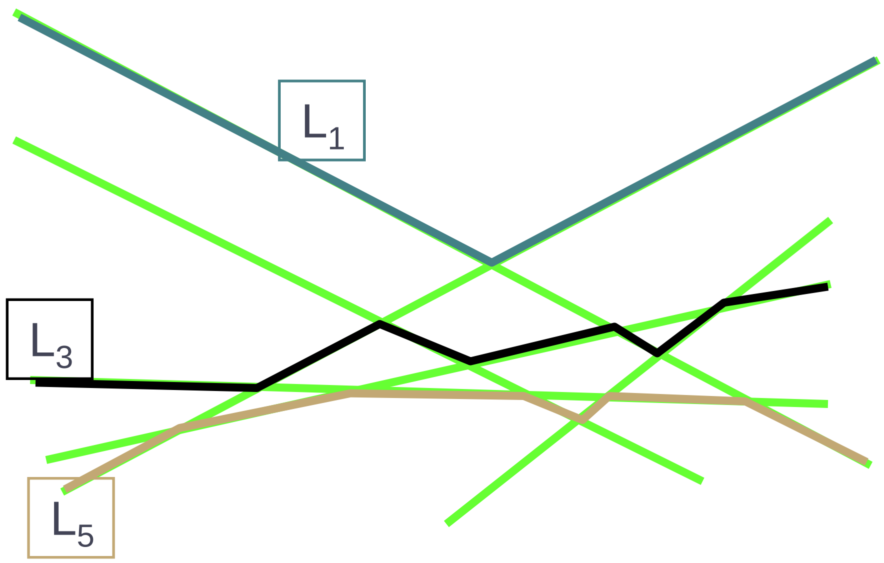
Clasificarea punctelor: calcul

- **Afirmatie:** nivelul tuturor punctelor este un aranjament ce poate fi calculat in $\Theta(n^2)$ timp optimal.

- **Observatii:**
  1. La fiecare intersectie de drepte, nivelul creste sau scade cu 1.
  2. De-a lungul fiecarei drepte p_i^* nivelul punctelor de intersectie consecutive l_{ij}^* creste monoton si apoi scade monoton.

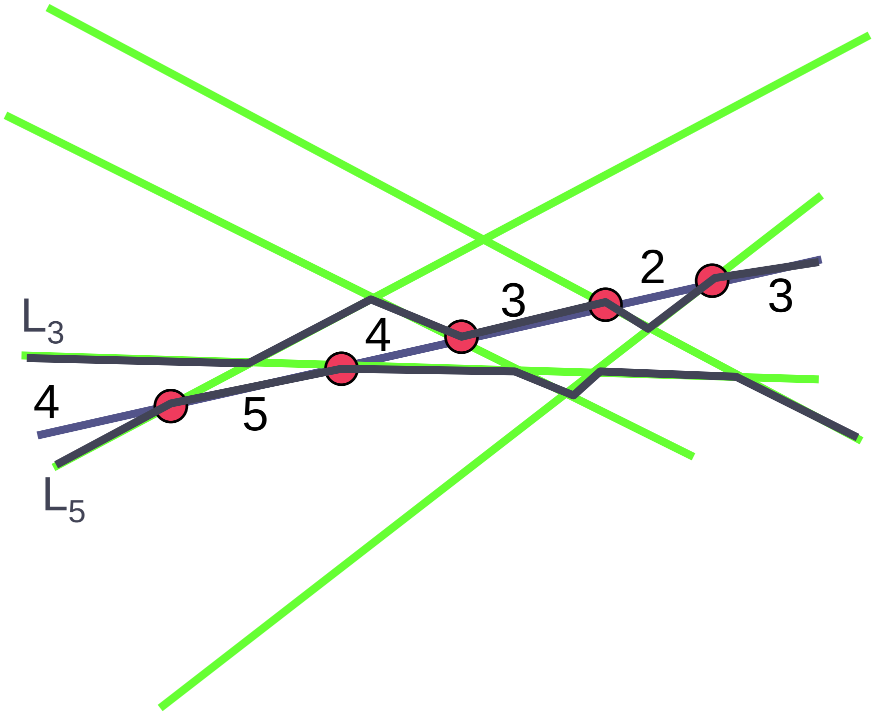
Nivelurile unui aranjament

- Un punct se afla la *nivelul k* al unui aranjament de *n* drepte daca exista cel mult *k*-1 drepte deasupra acestui punct si cel mult *n*-*k* drepte dedesubtul acestui punct.
- Exista *n* nivele intr-un aranjament de *n* drepte.
- Un punct poate fi pe mai multe nivele, in functie de numarul de drepte ce trec prin el.



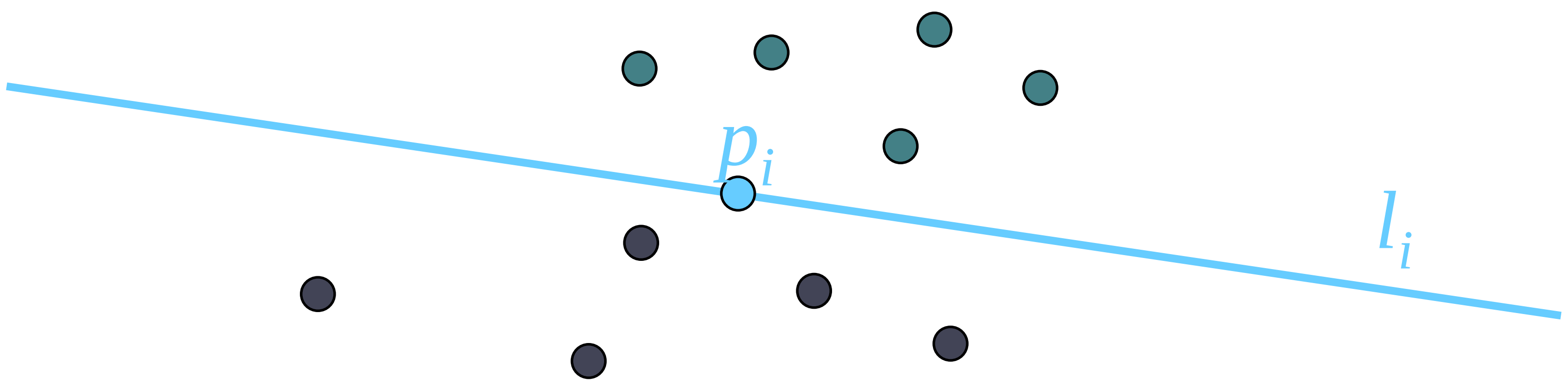
Un algoritm in $\Theta(n^2)$

- Se construieste aranjamentul dual.
- Pentru fiecare dreapta se calculeaza nivelurile tuturor punctelor sale.
- Se calculeaza nivelurile razelor infinite la stanga prin sortarea pantelor in timp $O(n \log n)$.
- Se traverseaza toate dreptele de la stanga la dreapta, incrementand sau decrementand nivelul, in functie de directia (panta) dreptei de intersectie. $\Theta(n)$ pentru fiecare dreapta.
- Total: $\Theta(n^2)$.



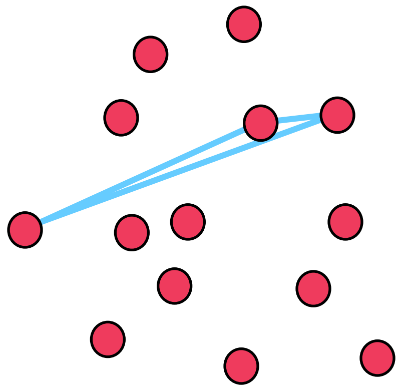
Drepte bisectoare

- Fie $P = \{p_1,\ldots, p_n\}$ un set de n puncte in plan. Sa se gaseasca multimea tuturor dreptelor ce trec printr-un punct p_i si impart P in doua multimi de dimensiuni egale.



Triunghi de arie minima

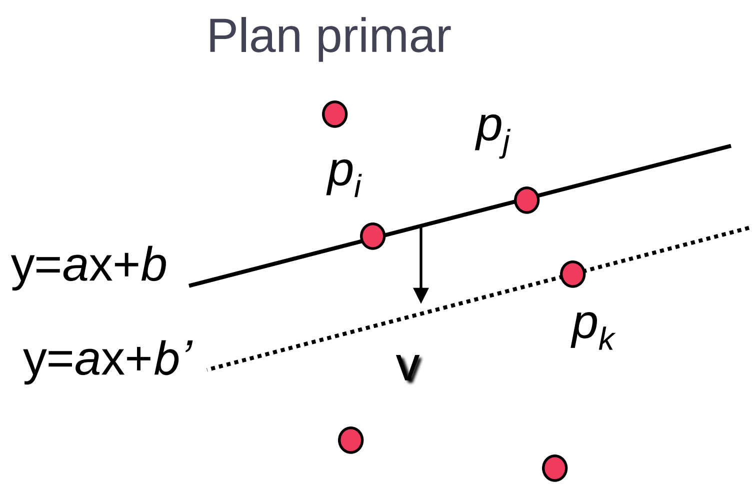
- Fiind data o multime de n puncte, sa se determine cele trei puncte ce formeaza un triunghi de arie minima.
- Usor de rezolvat in $\Theta(n^3)$.
- Se poate rezolva in $\Theta(n^2)$ folosind aranjamentele liniare in planul dual.

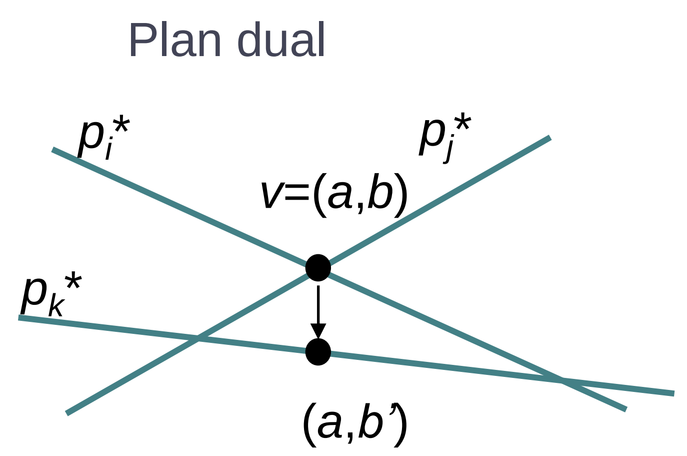


Nota: *cele 3 puncte nu sunt neaparat invecinate in diagrama Voronoi!*

Un algoritm in $\Theta(n^2)$

- Se construieste aranjamentul liniar dual in $\Theta(n^2)$.
- Pentru fiecare pereche de puncte p_i si p_j
  Fie $p_i p_j$ baza triunghiului:
  - Se identifica punctul v al aranjamentului, corespunzand dreptei ce trece prin aceste puncte.
  - Se gaseste dreapta din aranjament ce se afla cel mai aproape de v in plan vertical.
  - Se pastreaza doar dreapta cea mai buna.
- Algoritmul returneaza coordonatele punctului ce corespunde celei mai bune drepte duale.





Aranjamente in dimensiuni superioare

- Spatiul este imapartit in regiuni induse de hiperplanuri *d*-dimensionale
- Complexitatea aranjamentului: $\Theta(n^d)$
- *Teorema zonei in dimensiuni superioare*: Complexitatea zonei unui hiperplan intr-un aranjament de *n* hiperplanuri in *d* dimensiuni este $\Theta(n^{d-1})$.
- Un aranjament *d*-dimensional poate fi calculat optimal in $\Theta(n^d)$ timp si spatiu.
- Alte extinderi: polilinii, curbe, suprafete