UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

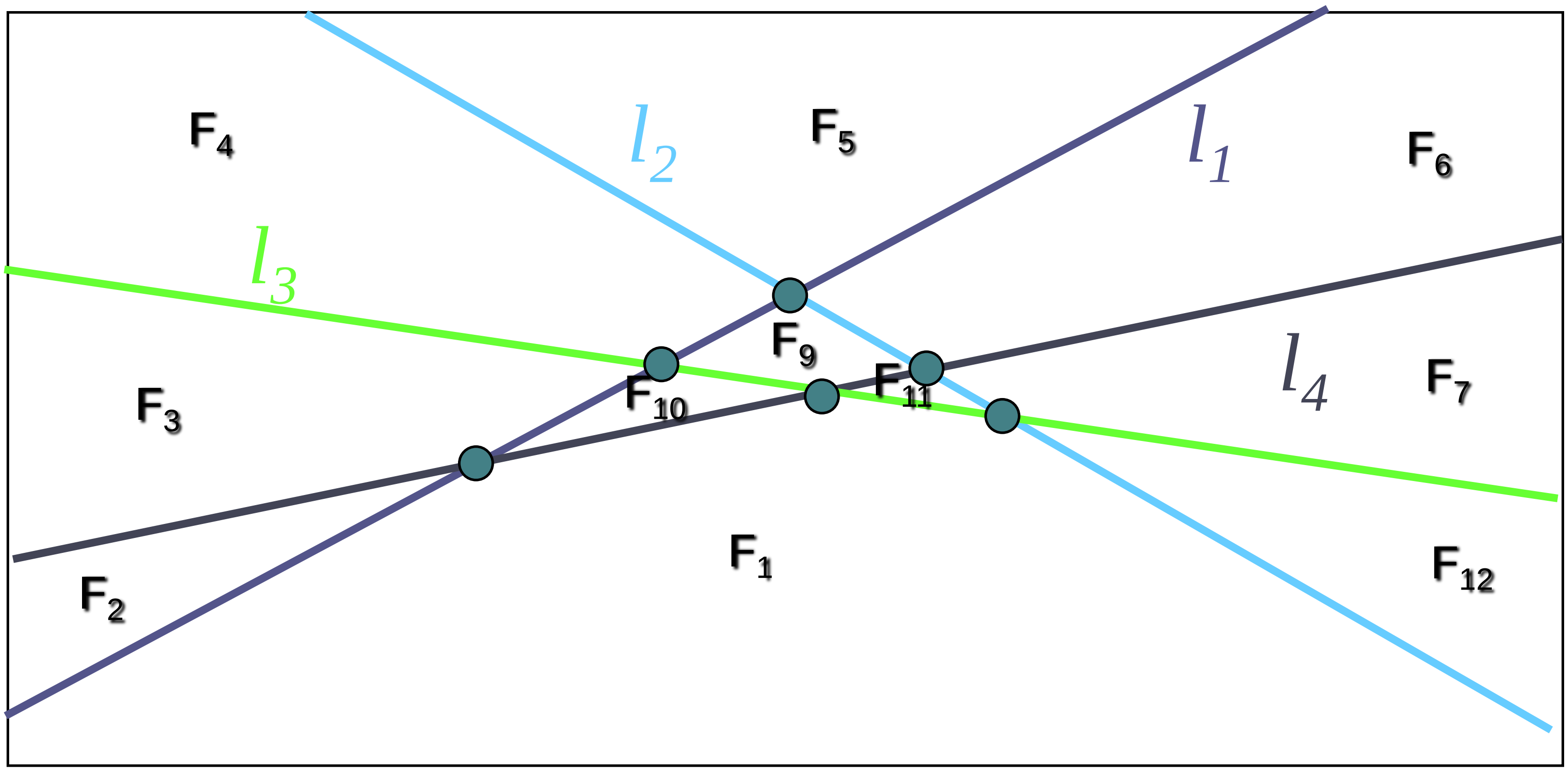
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computationala

24. Aranjamente liniare. Calcularea aranjamentelor liniare

Aranjamente liniare: definitie

- Fiind data o multime $L = \{l_1,..l_n\}$ de n drepte in plan, *aranjamentul* lor $A(L)$ este subdiviziunea planului indusa de L (puncte, laturi, fete)



Aranjamente liniare: aplicatii

- Clasificare in functie de semiplane

$$F_5 = h_1 \wedge \neg h_2 \wedge \neg h_3 \wedge \neg h_4$$

- Multiple utilizari:
  - Cel mai mare poligon convex
  - Toate bisectoarele
  - Numarul de puncte deasupra liniilor
  - Diagrame Voronoi de nivel superior

Aranjamente liniare: complexitate

Teorema: Complexitatea aranjamentului de n drepte este $\Theta(n^2)$ in cel mai nefavorabil caz.

Demonstratie:

- Numarul de varfuri $\leq \binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

  Fiecare pereche de drepte distincte se intersecteaza cel mult o data
- Numar de muchii $\leq n^2$

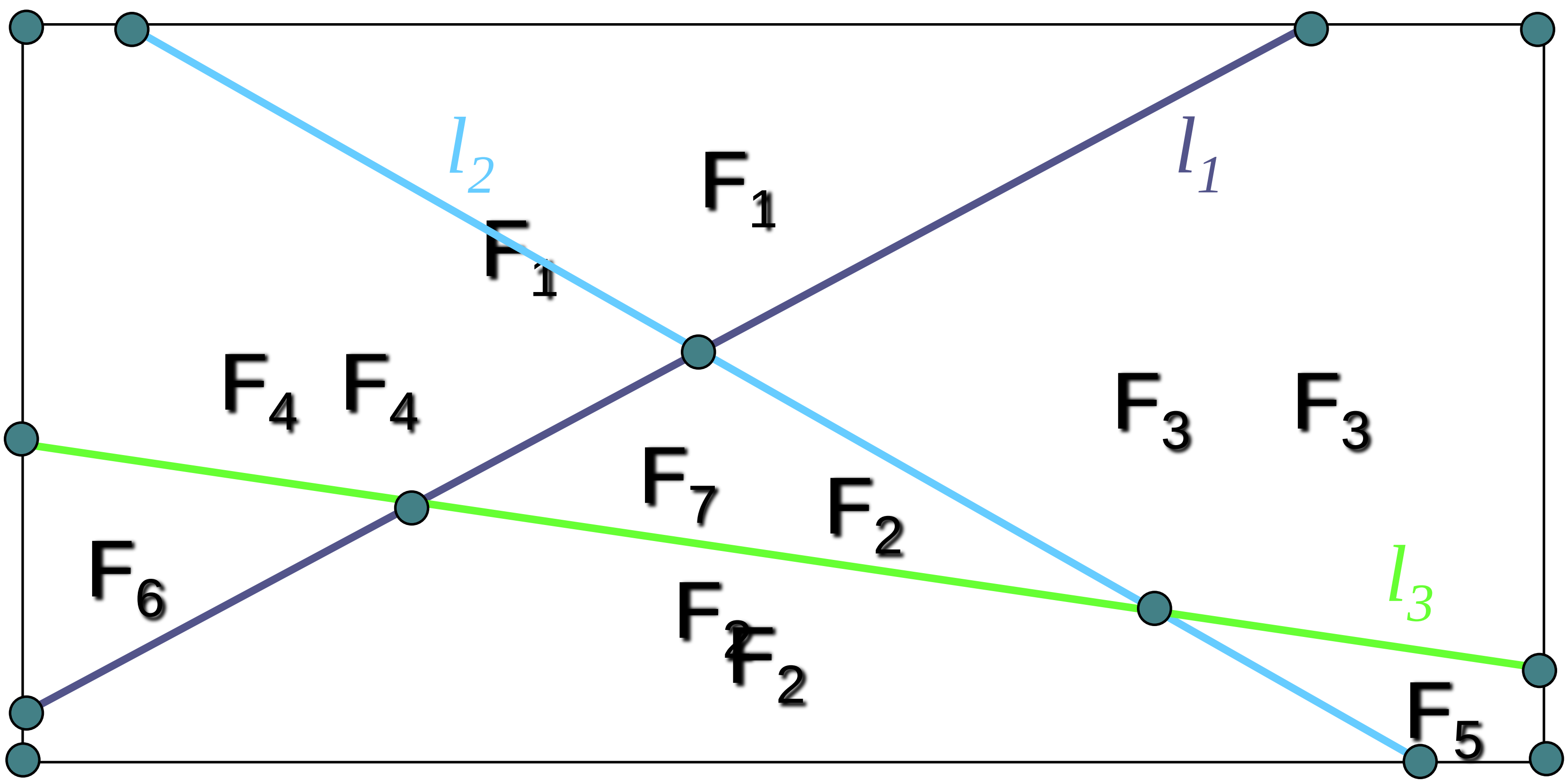
  Fiecare dreapta este impartita in cel mult n parti de cel mult n-1 alte drepte
- Numarul de fete $\leq \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$

  Prin formula lui Euler ($V+F = E+2$), conectand toate razele intr-un punct la infinit
- Egalitatile sunt valabile pentru drepte in pozitia generala.

Calcularea aranjamentelor liniare

1. **Cautare in plan (*Plane-sweep*)**
   - Se calculeaza toate $\Theta(n^2)$ puncte→ $\Theta(n^2)$ evenimente
   - $\Theta(\log n)$ timp pentru fiecare eveniment → $\Theta(n^2 \log n)$ in total
2. **Divide-et-impera**
   - Se imparte si uneste recursiv multimea de drepte in jumatati →$\Theta(\log n)$
   - Se unesc celulele (dificil)
3. **Incremental**
   - Se adauga cate o dreapta → $\Theta(n)$ drepte
   - Actualizarea dureaza $\Theta(n)$ → $\Theta(n^2)$ optimal

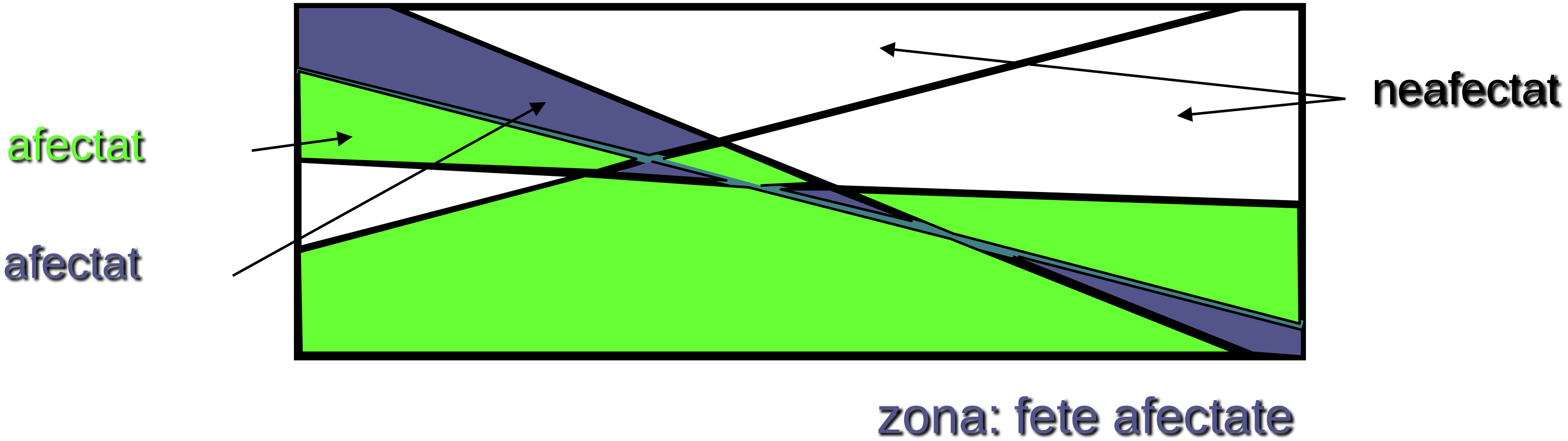
Algoritmul incremental



dreptunghi de incadrare B(L)

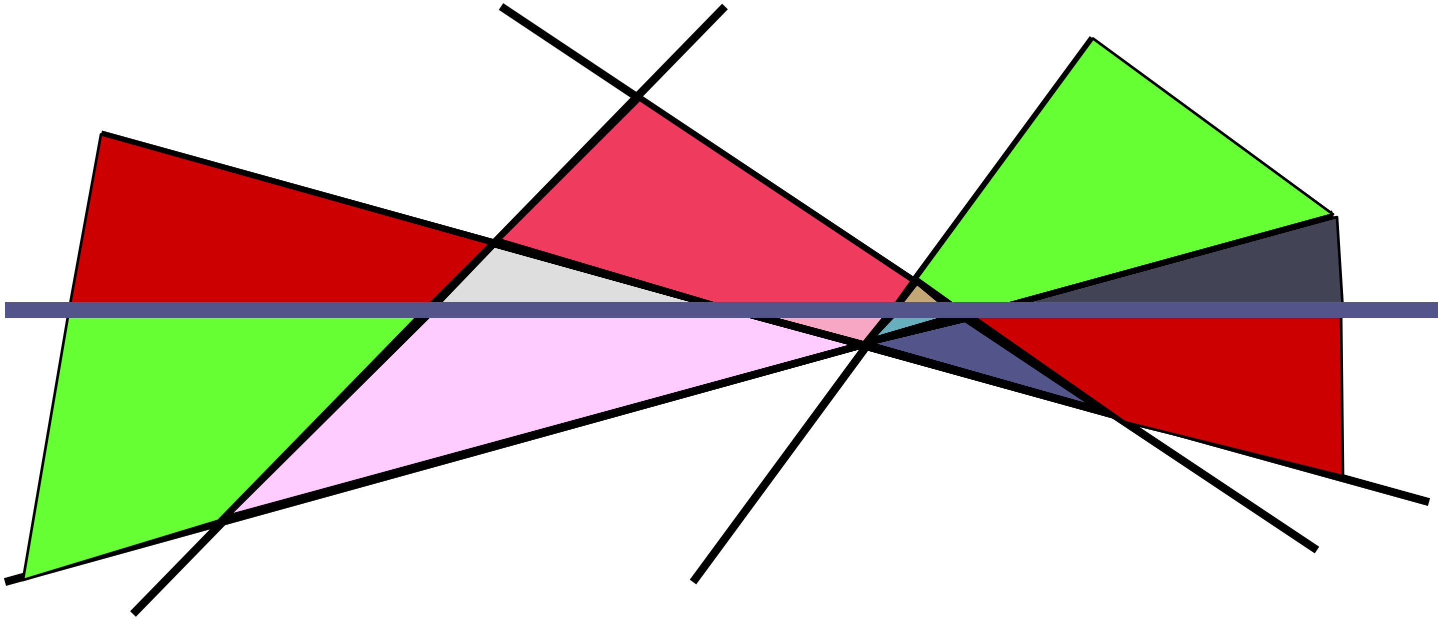
Algoritm incremental: observatii

- Dupa inserarea dreptei *i*, complexitatea reprezentarii este $O(i^2)$, sau $\Theta(i^2)$ in cazul cel mai nefavorabil cu dreptele in pozitia generala.
- Complexitatea de timp a fiecarei inserari a unei drepte depinde de complexitatea *zonei* asociate.



Zona unei drepte

- **Zona** uneli drepte ℓ in aranjamentul $A(L)$ este multimea de fete din $A(L)$ ce intersecteaza ℓ.
- **Complexitatea unei zone** este complexitatea totala a tuturor fetelor ei: suma totala a laturilor (sau punctelor) ale acelei fete.

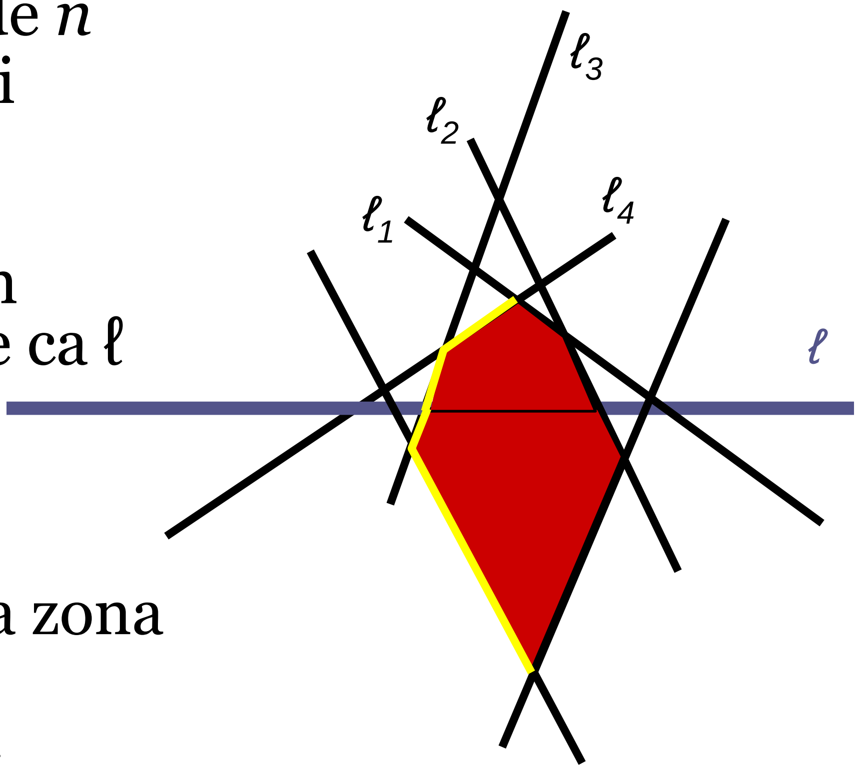


Teorema zonei

Teorema: Intr-un aranjament de n drepte, complexitatea zonei unei drepte este $O(n)$.

Demonstratie:

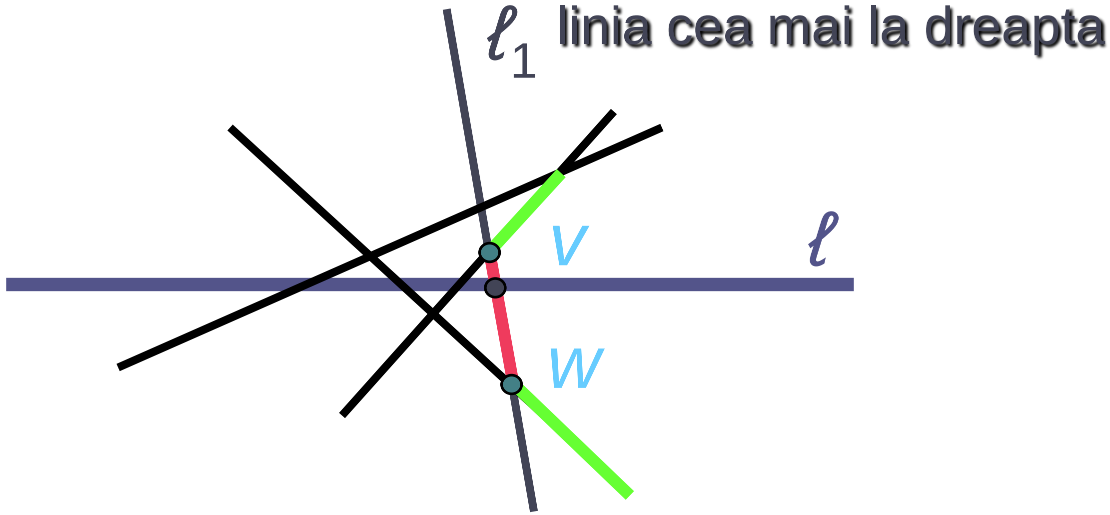
- Fie o dreapta ℓ. Fara a pierde din generalitate, se poate presupune ca ℓ este orizontala.
- Se presupune ca initial nu exista drepte orizontale.
- Se numara laturile ce incadreaza zona numai pe partea stanga si se demonstreaza ca acestea sunt in numar de cel mult $4n$. (aceeasi procedura pentru partea dreapta)



Complexitatea zonei: demonstratie (1)

- Demonstratie prin inductie pe n.
- Pentru n=1: Trivial.
- Pentru $n > 1$:
  - Fie ℓ_1 cea mai la dreapta linie ce intersecteaza ℓ.
  - Din ipoteza, zona lui ℓ in $A(L-\{\ell_1\})$ are cel mult $4(n\text{-}1)$ muchii de incadrare la stanga.
  - Cand se adauga ℓ_1, numarul de astfel de muchii creste… **(pag. urm.)**

Complexitatea zonei: demonstratie (2)



- o noua muchie pe ℓ_1.
- doua muchii existente despartite de ℓ_1.

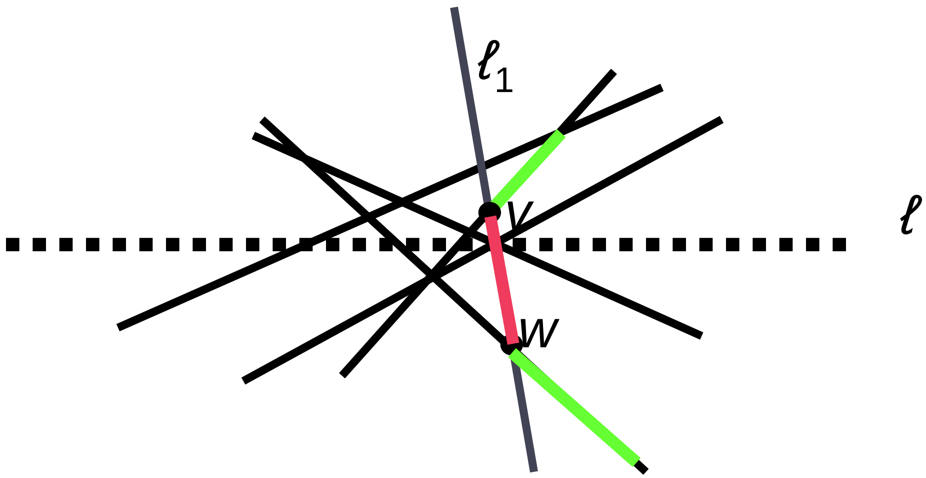
- Asadar noua complexitate a zonei este:

$$\mathbf{4(n\text{-}1)+3 < 4n}$$

Complexitatea zonei: demonstratie (3)

- Ce se intampla daca mai multe linii intersecteaza ℓ in punctele de intersectie aflate cel mai la dreapta?
  - Se alege ℓ_1 in mod aleator dintre aceste linii.
  - Din ipoteza, zona lui ℓ in $A(L-\{\ell_1\})$ are cel mult $4(n-1)$ muchii de incadrare la stanga.
  - Cand se adauga ℓ_1, numarul de astfel de muchii creste… **(pag. urm.)**

Complexitatea zonei: demonstratie (4)



- doua noi muchii pe ℓ_1.
- doua muchii existente despartite de ℓ_1.

- Asadar, noua complexitate a zonei este:

$$\mathbf{4(\boldsymbol{n}-1)+4 = 4\boldsymbol{n}}$$

Complexitatea zonei: demonstratie (5)

- Daca exista si alte drepte orizontale?
  - daca exista drepte paralele cu ℓ, atunci ele vor fi rotite (imaginar), marind complexitatea zonei lui ℓ.
  - daca exista o dreapta ℓ_0 identica ℓ, atunci complexitatea zonei lui ℓ este egala cu cea a zonei lui ℓ_0.
  - daca exista mai multe drepte identice cu ℓ, complexitatea zonei lui ℓ nu va creste.

Constuctia aranjamentului

- Timpul necesar pentru a insera o dreapta ℓ_i este liniar in complexitatea zonei asociate, deci liniar in numarul de drepte deja existente.
- Asadar, timpul total este:

$$\underbrace{O(n^2)}_{\text{gasirea unui dreptunghi de incadrare}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} O(i)}_{\text{din teorema zonei}} = O(n^2).$$

- Acest timp nu depinde de ordinea de inserare!