



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI



Instrumente Structurale
2007-2013

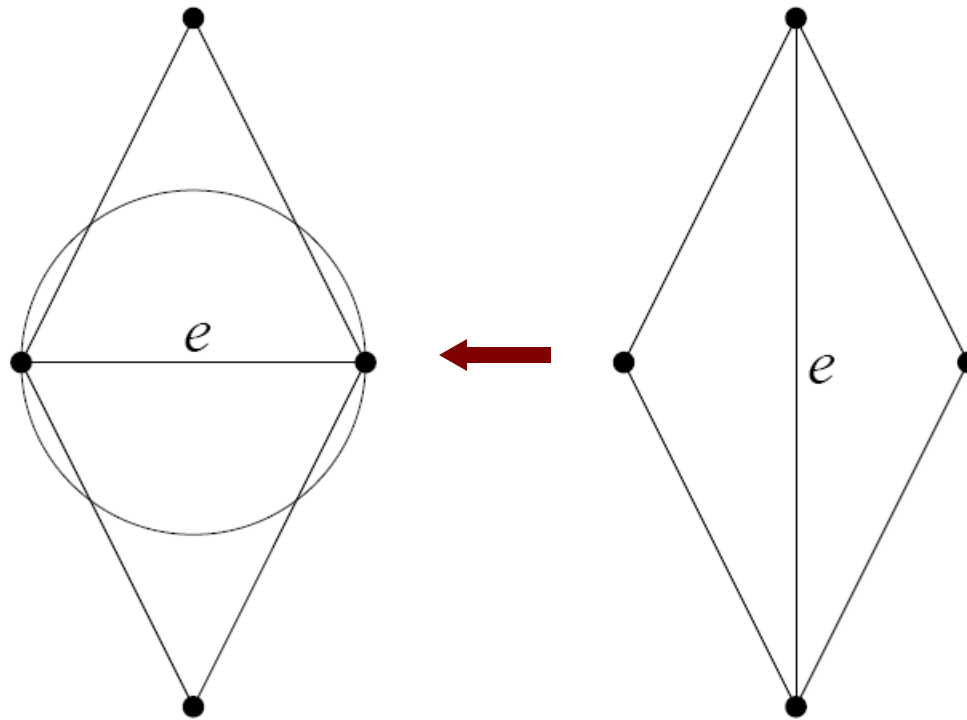


Platformă de e-learning și curriculum e-content
pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computacionala

**20. Triangulari Delaunay: Rotire. Algoritmi de triangulare
Delaunay**

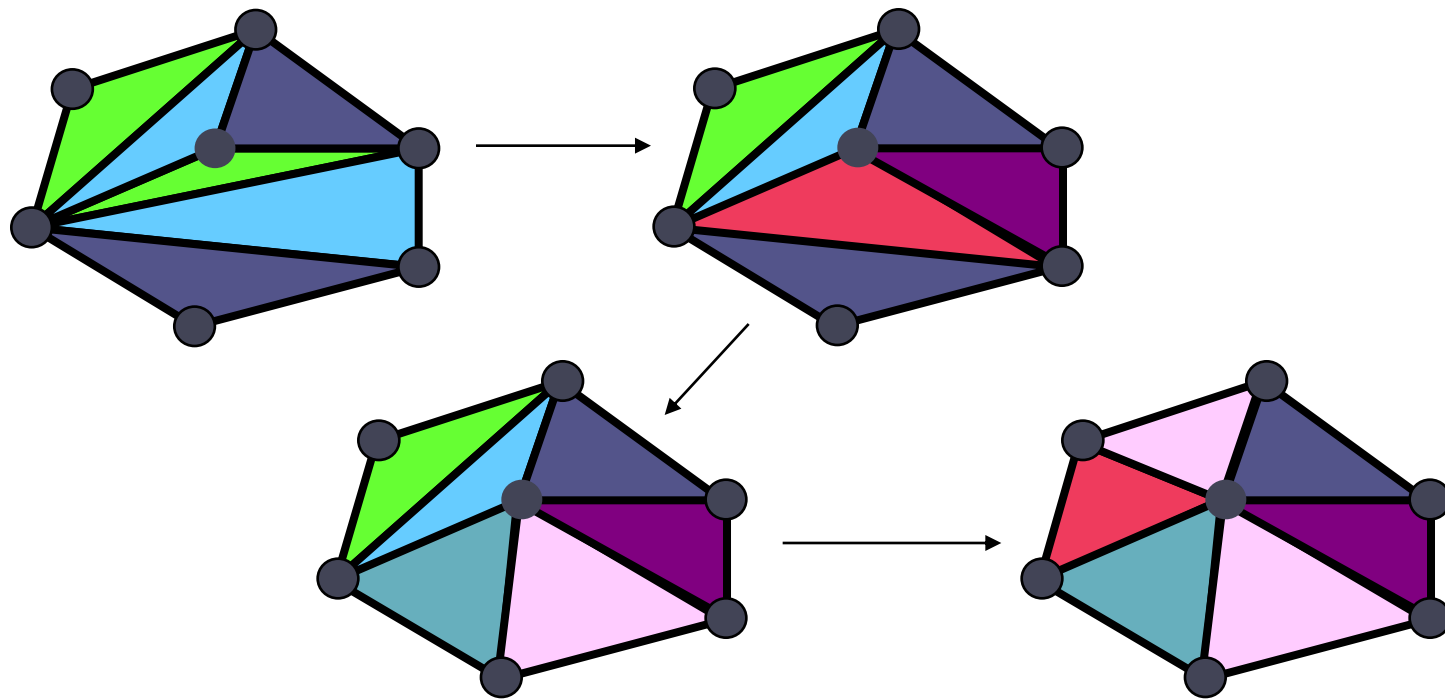
Rotirea unei muchii: Delaunay local



Algoritmul de rotire (*Flip*)

1. Fie V setul de puncte la intrare.
2. $T =$ Orice triangulare a lui V .
3. **<Repeat>** pana cand toate muchiile din T sunt Delaunay
 - Se gaseste o muchie ce nu este Delaunay si care poate fi rotita.
 - Se rotește muchia

Algoritmul de rotire (*Flip*)

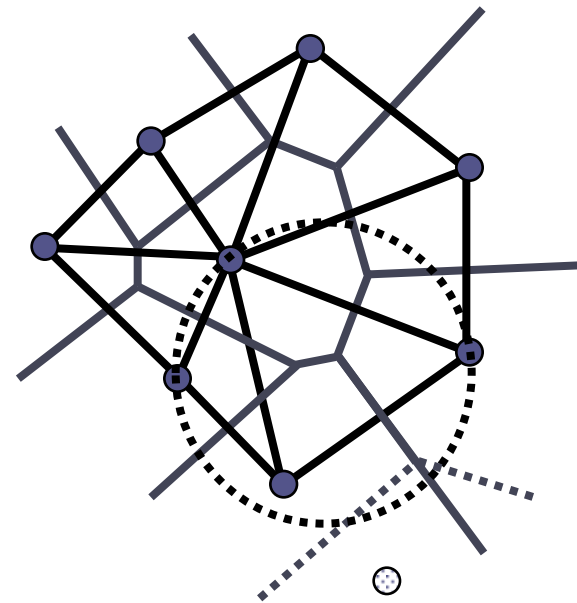


Numarul de rotiri

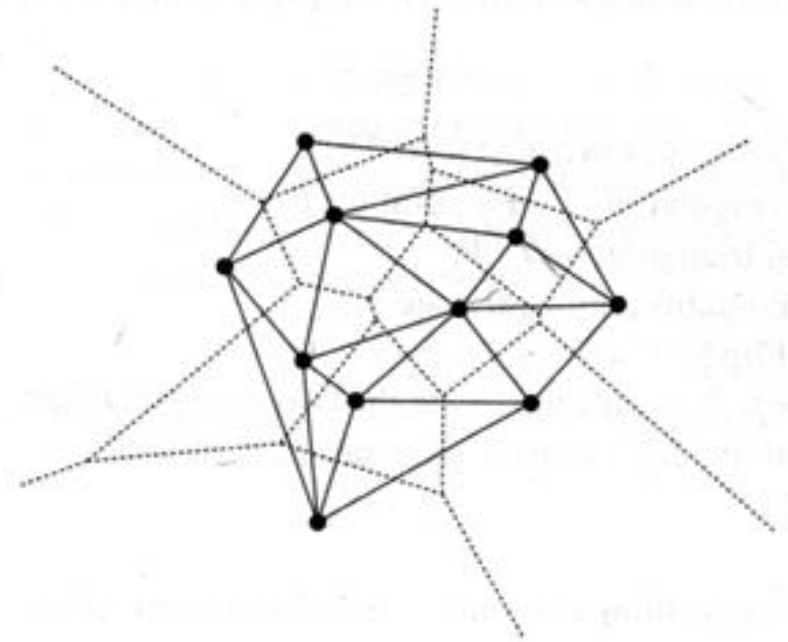
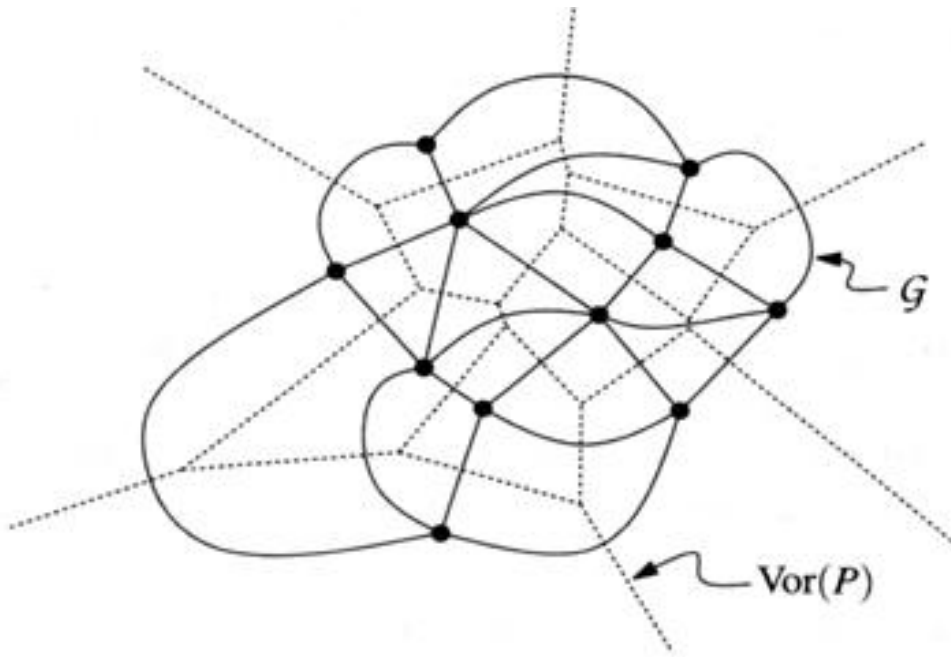
- Algoritmul inceteaza dupa cel mult $O(n^2)$ rotiri.
- Fie $\langle T \rangle$ o functie definita pe toate triangularile
 - $\langle T \rangle =$ Numarul de perechi triunghi-varf (v,t) astfel incat v este un punct al lui T , t este un triunghi al T iar cercul circumscris al lui t contine v .
 - $\langle T \rangle = O(n^2)$.
 - Numarul de varfuri = n
 - Numarul de triunghiuri = $O(n)$

Triangulare Delaunay prin dualitate

- Se deseneaza graful Delaunay (graful dual al diagramei Voronoi) prin conectarea tuturor perechilor de situri invecinate in diagrama Voronoi.
- Daca nu exista 4 puncte conciclice, atunci graful Delaunay este triangulat.
- Presumptie generala de pozitie: *Nu exista 4 puncte conciclice.*
- Trebuie sa demonstram:
 - Corectitudinea acestei dualitati, mai exact faptul ca prin trasarea grafului Delaunay cu segmente drepte nu duce la intersectii de segmente.
 - Ca aceasta triangulare duce la maximizarea vectorului de unghiuri.
- **Corolar:** Triangularea Delaunay (TD) a n puncte poate fi calculata in timpul $O(n \log n)$.



Graful Dual Voronoi-Delaunay



Triangulare Delaunay: proprietate principala

Teorema: Fie S un set de puncte in plan.

Atunci,

(i) $p_i, p_j, p_k \in S$ sunt varfuri ale triunghiului (fetei) lui $TD(S)$

\Leftrightarrow Cercul ce trece prin p_i, p_j, p_k este gol.

(ii) p_i, p_j (pentru $p_i, p_j \in S$) este o muchie a lui $DT(S)$

\Leftrightarrow Exista un cerc gol ce trece prin p_i, p_j .

Demonstratie: Dualizarea teoremei diagramei Voronoi.

Corolar: O triangulare $T(S)$ este $TD(S)$

\Leftrightarrow Orice cerc circumscris al unui triunghi $\Delta \in T(S)$ este gol.

Concluzie

Teorema:

Fie S un set de puncte in plan, si fie $T(S)$ o triangulare a lui S . Atunci,

$$T(S) = TD(S) \iff T(S) \text{ este legala}$$

Demonstratie:

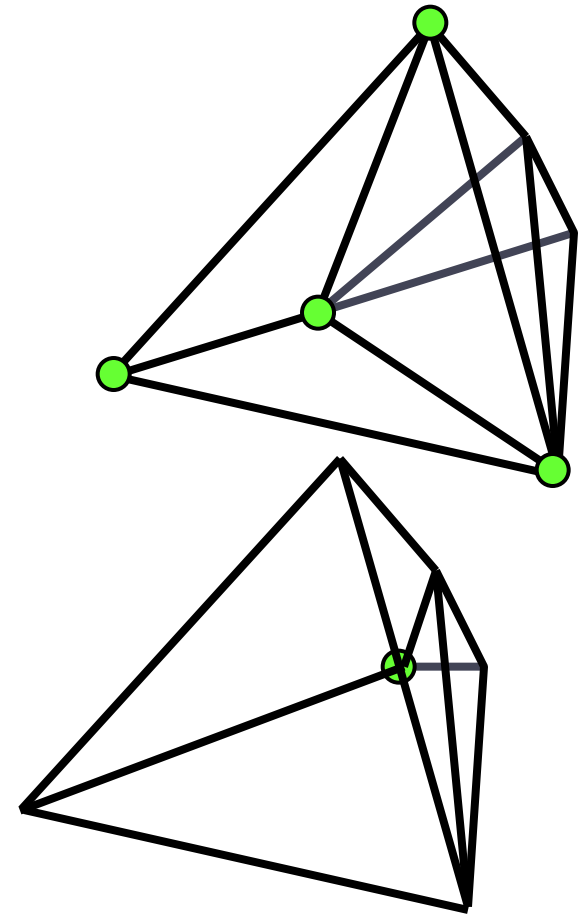
Din definitiile muchiilor si triangularilor legale.

Corolar: $TD(S)$ maximizeaza unghiurile.

Algoritm triangulare Delaunay in $O(n \log n)$

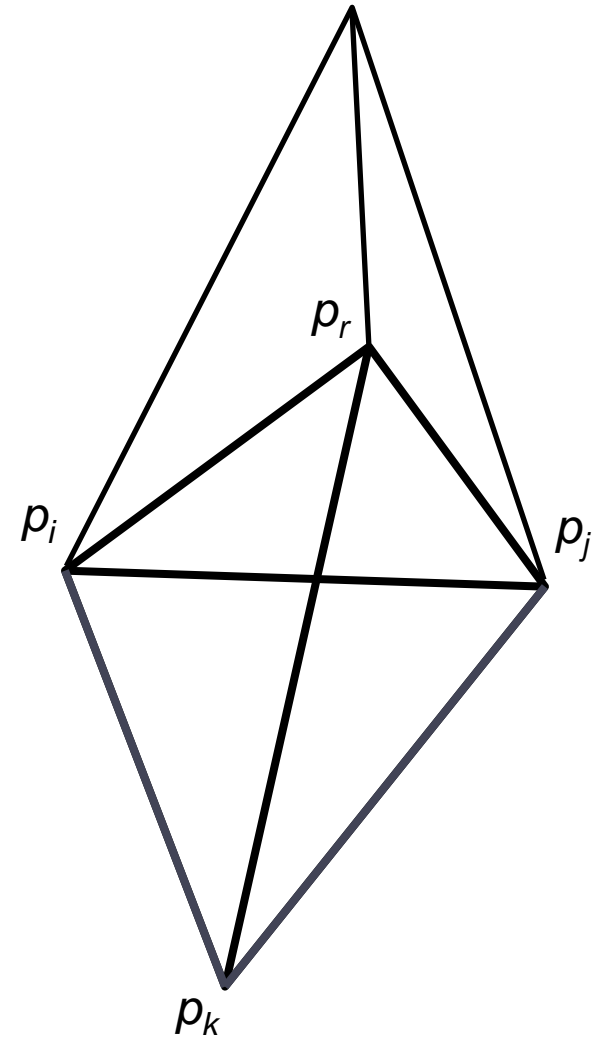
Algoritm aleatoriu incremental:

- Se formeaza triunghiul de incadrare Δ_0 ce contine toate punctele.
- Se adauga punctele unul dupa altul in ordine aleatoare si se actualizeaza triangularea.
- Daca punctul se afla in interiorul unui triunghi existent:
 - Se conecteaza punctul cu varfurile triunghiului.
 - Se verifica daca se poate efectua o rotire pe oricare din laturile triunghiului. Daca da, se roteste muchia si se verifica recursiv laturile invecinate (opuse noului punct).
- Daca situl se afla pe o muchie existenta:
 - Se inlocuieste muchia cu 4 noi muchii.
 - Se verifica daca se poate efectua o rotire pe oricare din laturile opuse. Daca da, se roteste muchia si se verifica recursiv muchiile invecinate (opuse noului punct).

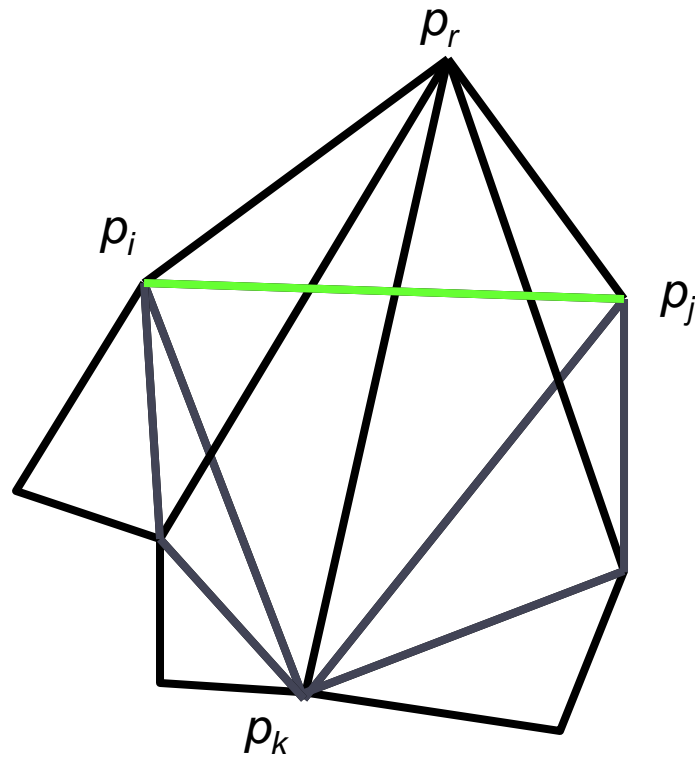


Rotirea muchiilor

- Un nou punct p_r a fost adaugat, ducand la crearea muchiilor $p_i p_r$ si $p_j p_r$.
- Legalitatea laturii $p_i p_j$ (cu varful opus) p_k este verificata.
- Daca $p_i p_j$ este ilegala, se efectueaza o rotire, si se verifica recursiv laturile $p_i p_k$ si $p_j p_k$, noile laturi opuse lui p_r .
- A se observa ca apelul recursiv la $p_i p_k$ nu poate elimina muchia $p_r p_k$.

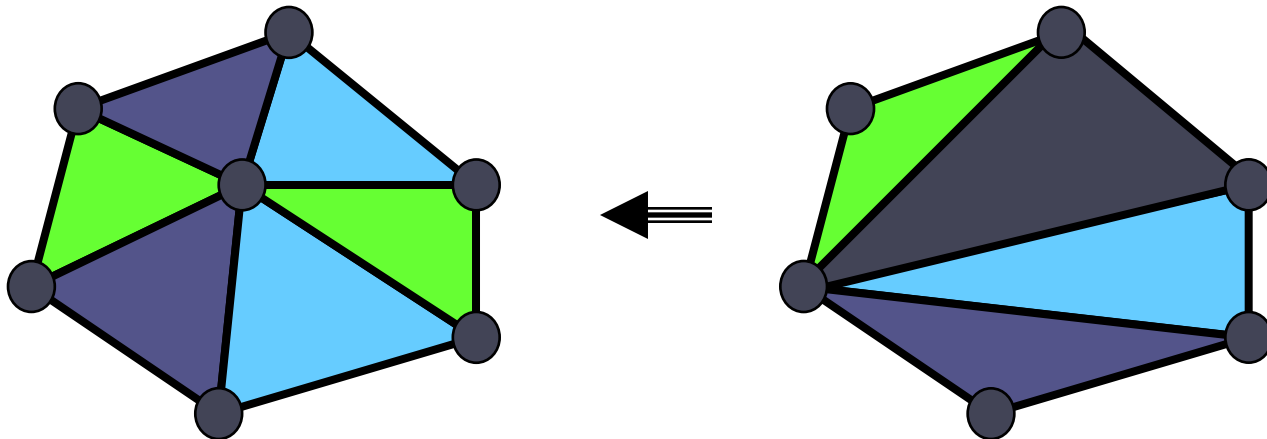


Exemplu de rotire laturi



Numarul de triunghiuri (1)

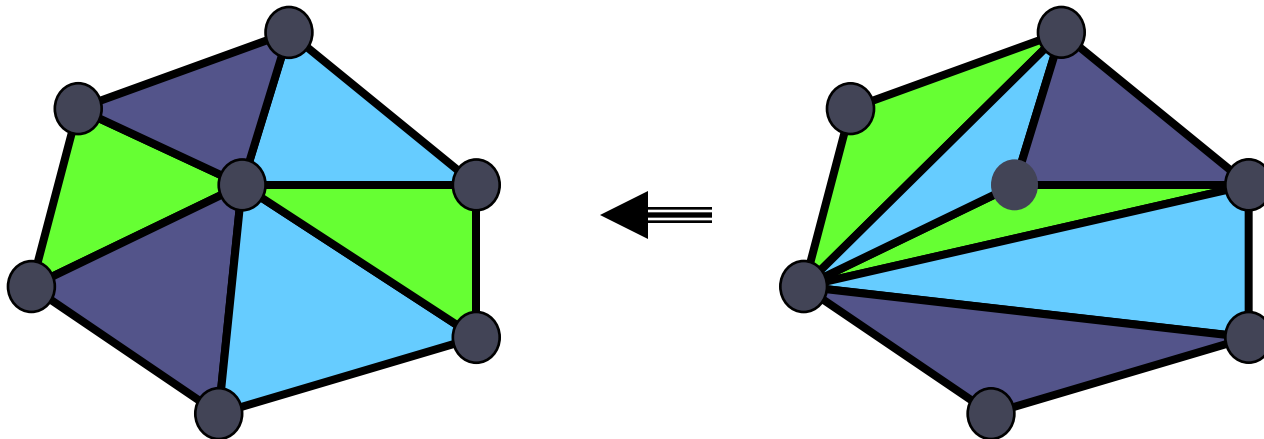
- **Teorema:** Numarul estimat de triunghiuri create pe parcursul algoritmului (unele dispar la un moment dat) este de cel mult $9n+1$.
- **Demonstratie:**
La inserarea punctului p_i , k_i noi laturi sunt create: 3 noi laturi initiale, si k_i-3 datorate rotirilor. Asadar numarul de noi triunghiuri este de cel mult $3+2(k_i-3) = 2k_i-3$.



Numarul de triunghiuri (2)

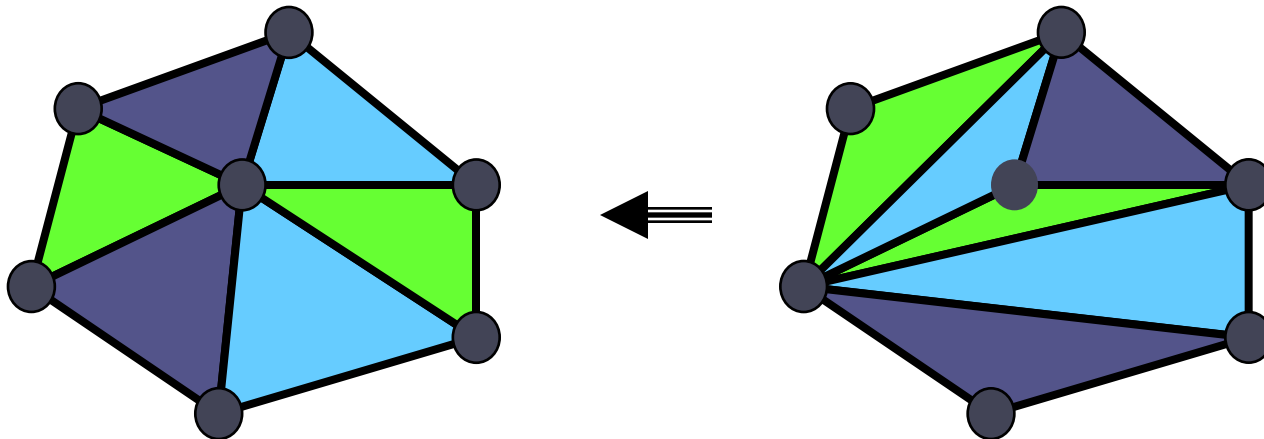
- Diagrama Voronoi are cel mult $3n-6$ muchii, unde n este numarul de puncte.
- Numarul de laturi dintr-un graf si dualul sau este identic.
- Luand in considerare triunghiul initial Δ_o , dupa inserarea de i puncte, exista cel mult $3(i+3)-6 = 3i+3$ laturi.

Trei dintre acestea apartin lui Δ_o , asadar ne raman cel mult $3i$ latui interne ce apar la punctele de intrare.



Numarul de triunghiuri (3)

- Suma tuturor gradelor punctelor este cel mult $2 \cdot 3i = 6i$.
- In medie, gradul fiecarui punct este doar 6.
- Asadar, numarul estimat de triunghiuri create in pasul i este de cel mult $E(2k_i - 3) = 2 E(k_i) - 3 = 9$.
- Deci numarul de triunghiuri create (si posibil distruse) pentru n puncte este $9n + 1$ (un triunghi de incadrare initial plus in medie 9 triunghiuri per punct).



Complexitatea algoritmului

- Localizarea punctului, pentru fiecare punct: $O(\log n)$.
- Rotiri: $\Theta(n)$ timp total estimat (pentru toti pasii).
- Timp total estimat: $O(n \log n)$.
- Spatiu: $\Theta(n)$.