UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

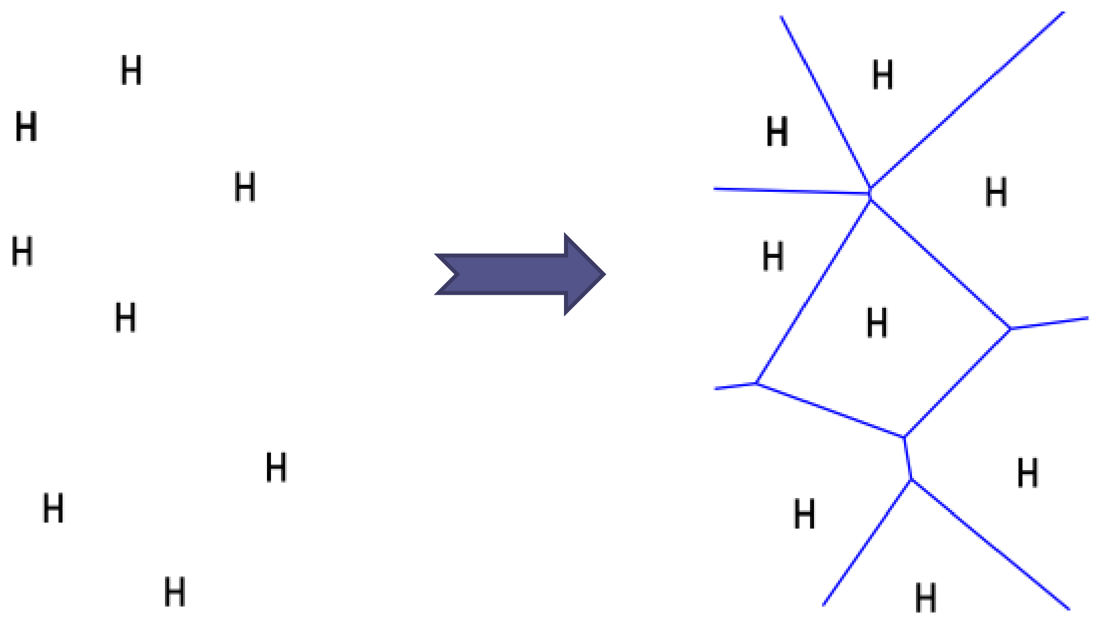
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computationala

11. Diagrame Voronoi: Introducere

Probleme de plecare

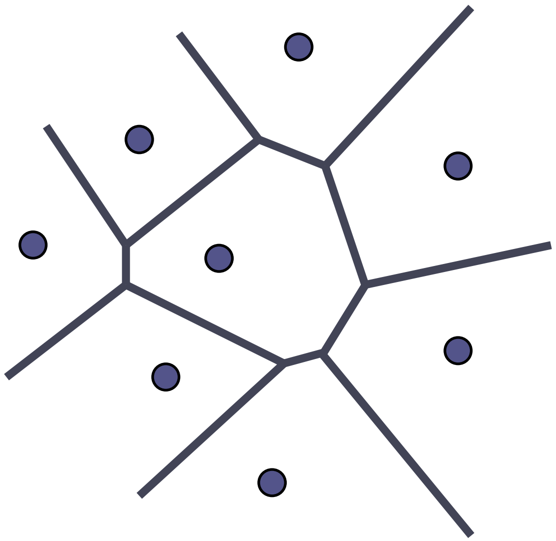
- Care este aria optima de acoperire a unui oficiu postal?
- Avand servicii de urgenta in mai multe localitati, de unde ar trebui sa vina ambulanta cel mai rapid?



Descrierea problemei

- **Intrare**: O multime S de n locatii ale punctelor (*situri*) in plan

- **Iesire**: Vor(S), o divizare planara in “celule”. Fiecare celula contine toate punctele pentru care situl corespunzator acesteia este cel mai apropiat.



Aplicatie: Aflarea celui mai apropiat punct invecinat (prin localizarea punctului respectiv in diagrama).

Observatie: In construcita diagramei se foloseste functia Euclideana de distanta. Muchiile diagramei reprezinta parti ale *bisectoarelor*. Bisectoarea a doua puncte este o dreapta.

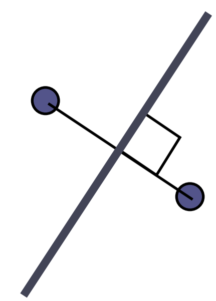
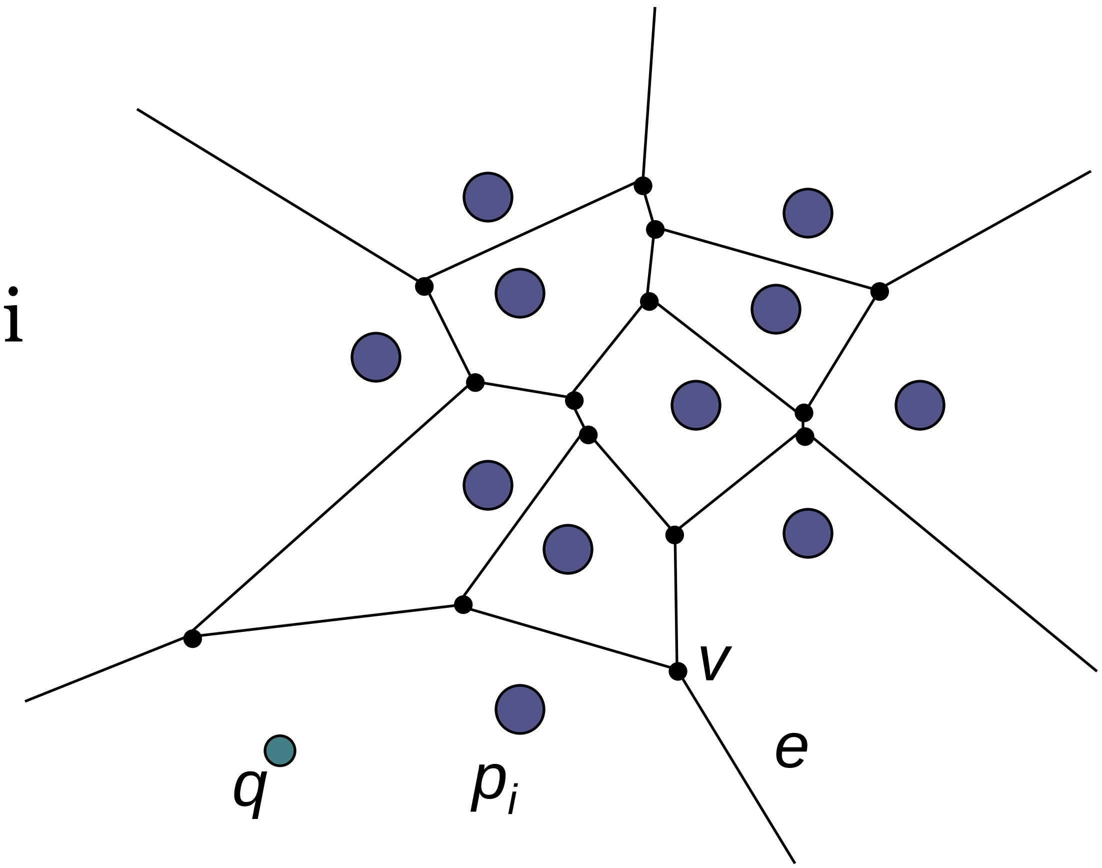


Diagrama Voronoi

- p_i : situri
- q : punct liber
- e : muchie Voronoi
- v : punct Voronoi



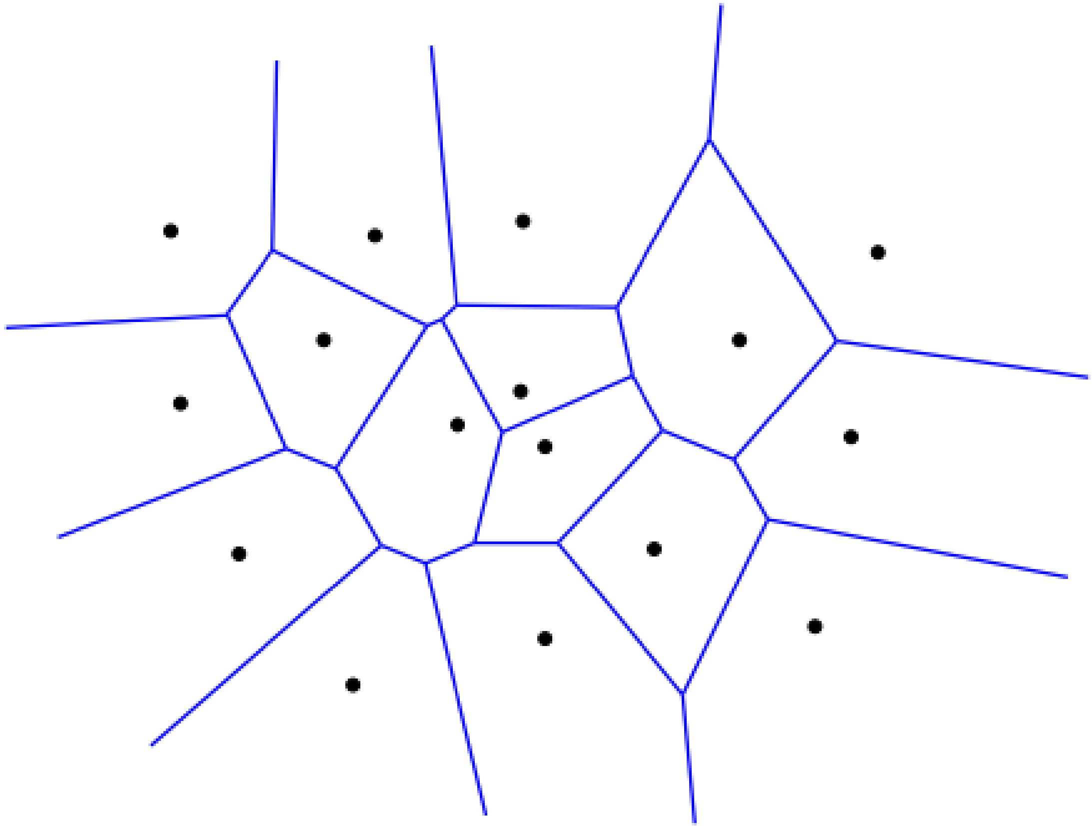
Definitie

- Fiind data o multime de puncte $P = \{p_1,\ldots p_n\}$ sa se construiasca o multime de celule $V(p_\mathrm{i})$ astfel incat:

$$V(p_i) = \{q \mid ||p_i - q|| \leq ||p_j - q||, \text{ pentru orice } i \neq j\}$$

- Diagrama Voronoi a lui *P* este un graf *G* de puncte si muchii noi, ce corespund granitelor celulelor.

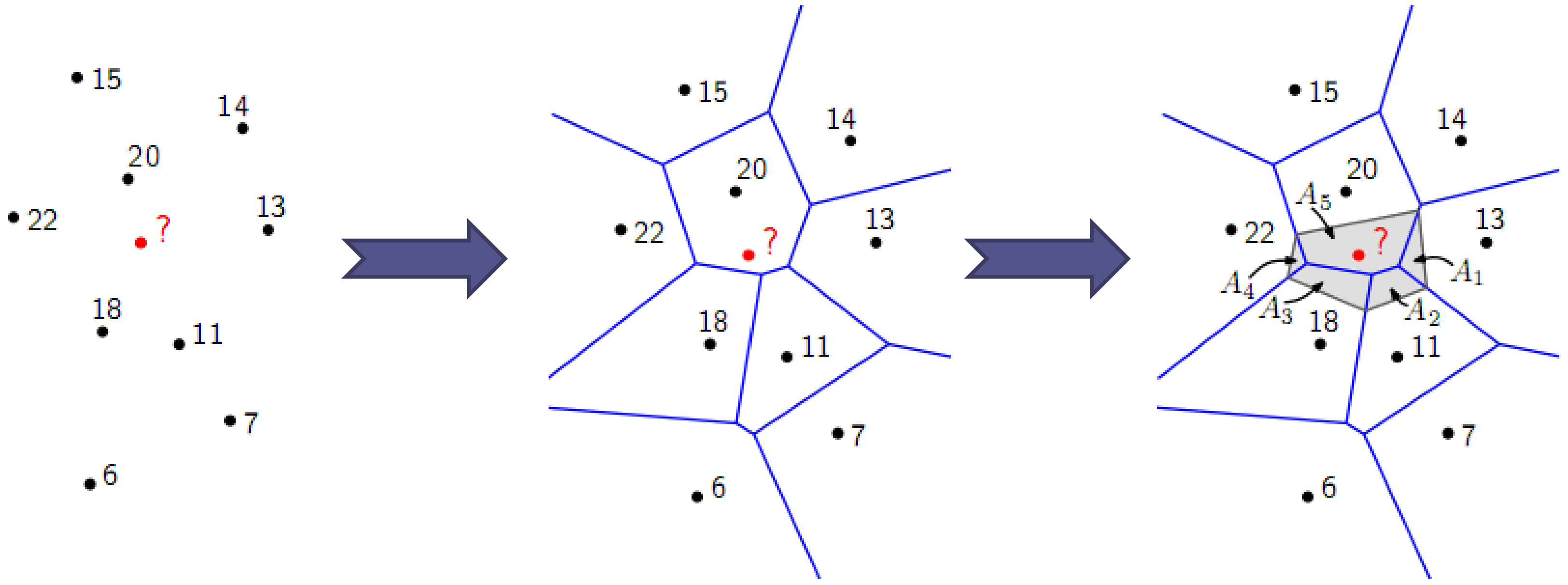
Exemplu diagrama Voronoi



Interpolare Spatiala (1)

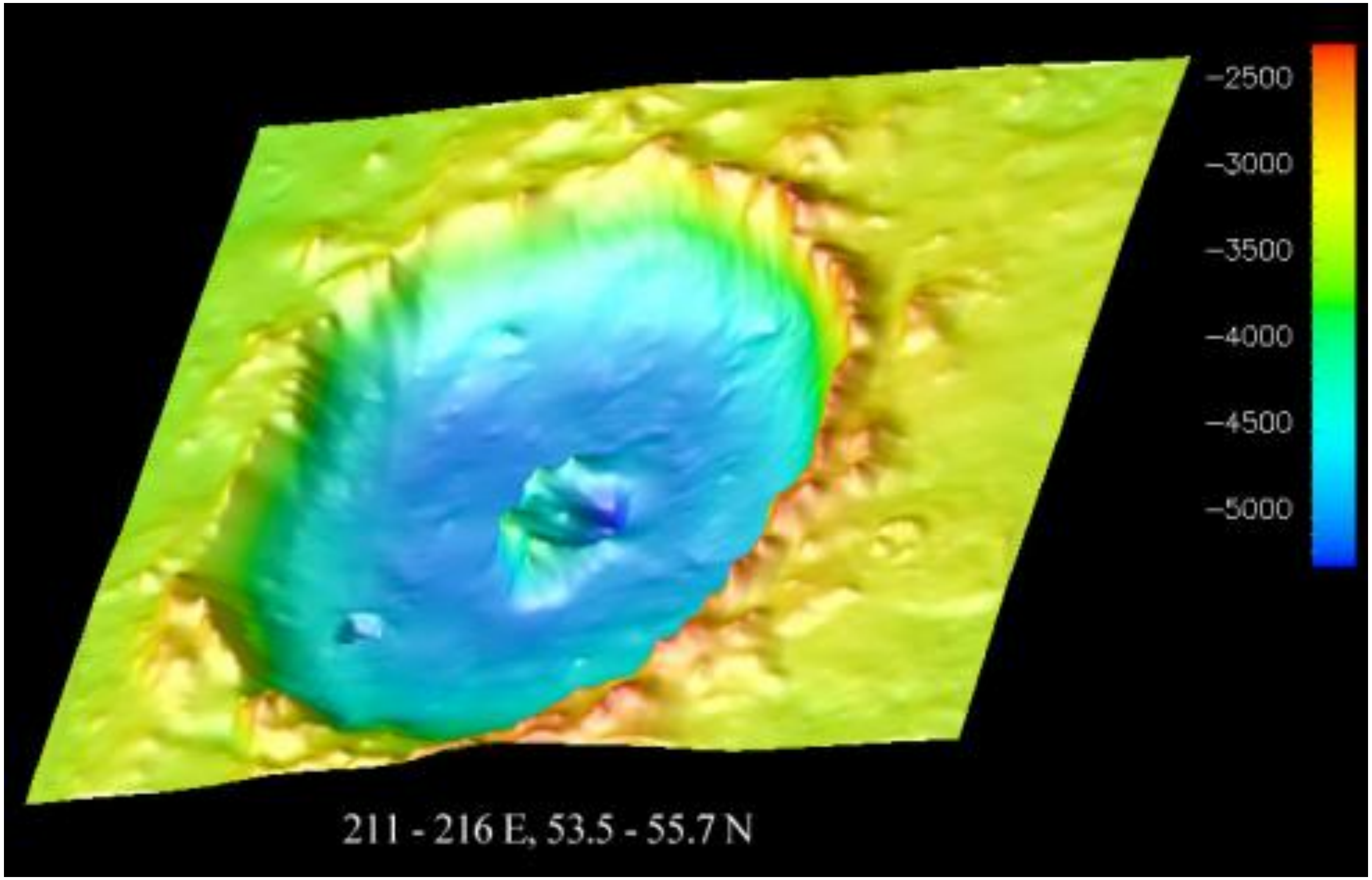
- Avand masuratori pentru anumite situri, putem interpola valoarea pentru un punct intermediar folosind valorile vecinilor din diagrama Voronoi

$$A_T = A_1 + A_2 + \cdots + A_5 \qquad ? = \frac{A_1}{A_T}13 + \frac{A_2}{A_T}11 + \cdots + \frac{A_5}{A_T}20$$



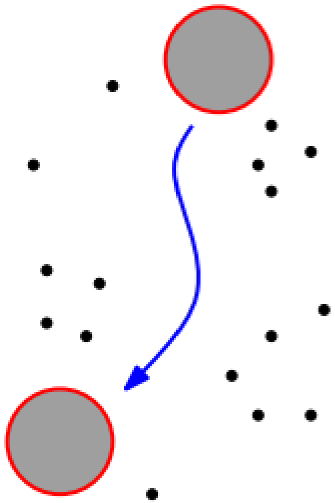
Interpolare Spatiala (2)

- Imagine interpolata reprezentand un crater de pe Marte



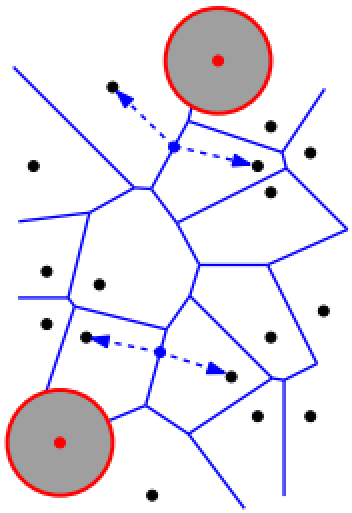
Planificarea miscarii

- *Avem loc sa miscam un disc printr-o multime de obstacole punctiforme?*



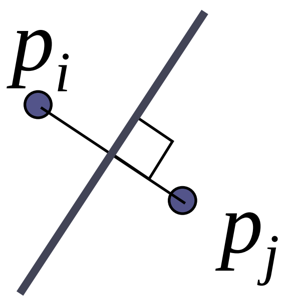
Posibil raspuns:

- Deoarece punctele diagramei Voronoi sunt la distanta cea mai mare intre obstacole, discul are loc printre obstacole numai daca exista un traseu format din muchii ale diagramei Voronoi pe unde are loc sa treaca.

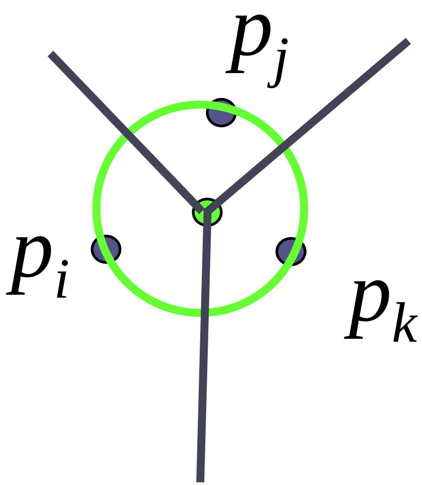


Observatii (1)

- **<u>Obs 1</u>**: bisectoarea perpendiculara a doua puncte p_i si p_j imparte planul in doua semiplane care respecta criteriul celui mai apropiat site, iar punctele de pe bisectoare sunt echidistante fata de p_i si p_j .



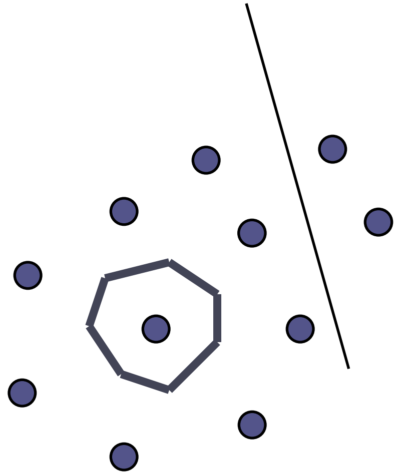
- **<u>Obs 2</u>**: centrul cercului definit de 3 puncte necolineare p_i, p_j, p_k este intersectia celor trei bisectoare ce corespund perechilor de puncte.



Observatii (2)

- **Obs 3**: Bisectoarele definesc conturul fiecarei celule $V(p_i)$ ca fiind intersectia a $n\!-\!1$ semiplanuri:

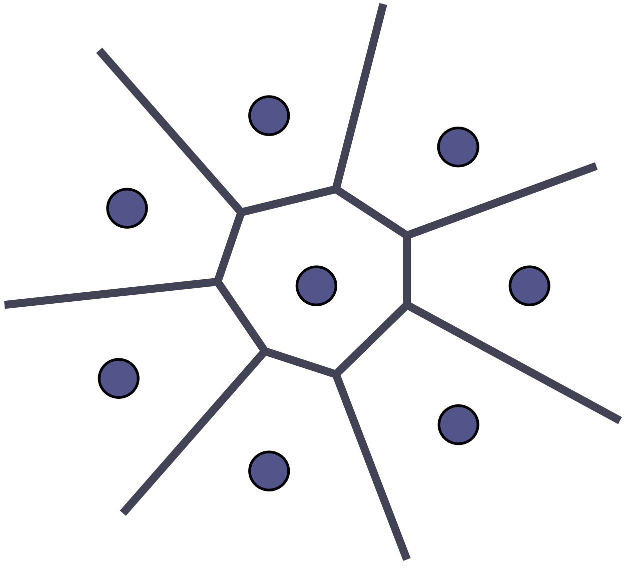
$$V(p_i) = \cap \, \mathrm{H}(p_i,p_j)$$



- **Obs 4**: Celulele interioare sunt inchise, cele exterioare sunt deschise.
- **Obs 5**: Toate celulele sunt convexe.

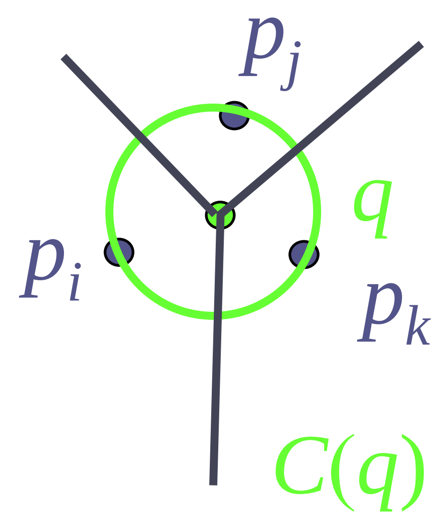
Observatii (3)

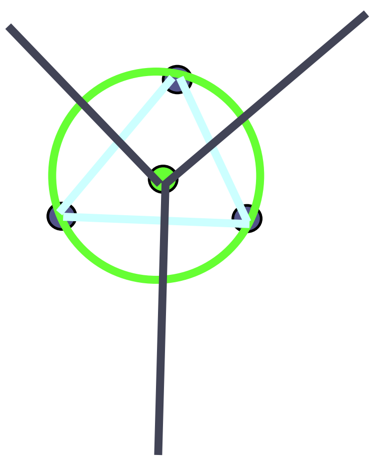
- **<u>Obs 6</u>**: Celulele Voronoi au cel putin o muchie (fara puncte) si cel mult $n-1$ puncte si muchii.



Proprietati (1)

- **Teorema 1:** fiecare punct al diagramei Voronoi reprezinta intersectia a exact 3 muchii ale diagramei.
- **Demonstratie:** Teorema lui Euler referitoare la bisectoarele unui triunghi.
- Cele trei situri ce definesc punctul se afla pe un cerc.

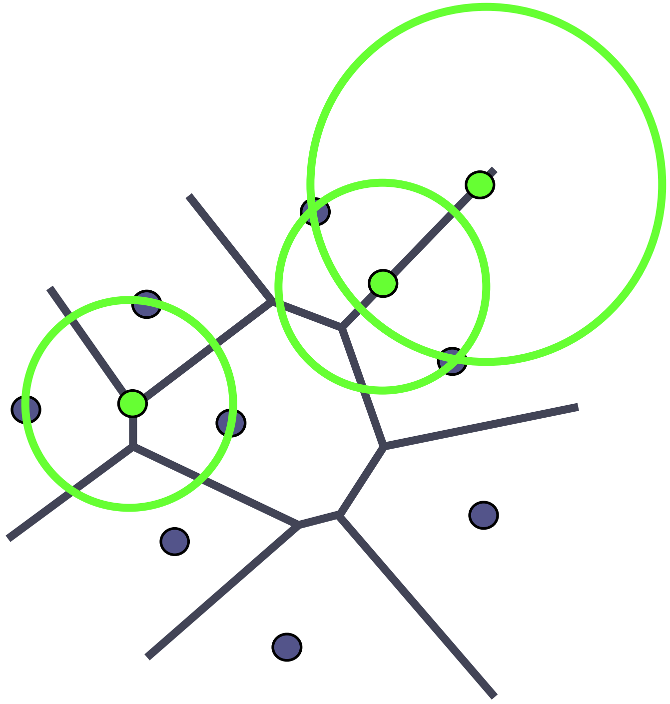




Proprietati (2)

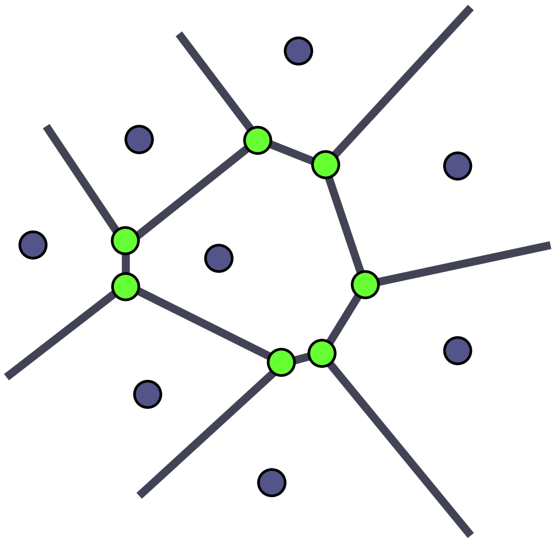
- **Teorema 2:** Pentru fiecare punct al diagramei Voronoi, cercul $C(q)$ definit de cele trei puncte nu contine nici un alt punct din P.

- **Demonstratie:** prin contradictie.



Presupuneri generale

- Nu exista 3 puncte Voronoi coliniare
- Nu exista 4 situri conciclice



Atunci:

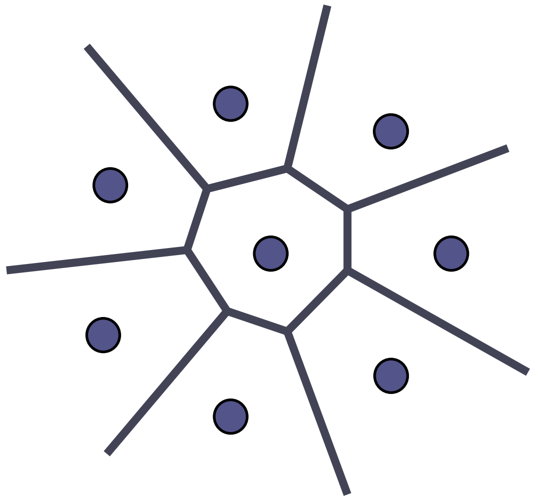
- Diagrama Voronoi este un *graf planar* (muchii nonintersectabile) ale carui varfuri sunt egal distantate de cate 3 situri si muchiile la egala distanta de cate o pereche de situri.

Complexitate (1)

Teorema:

Fie V, M, F numarul de varfuri, muchii (inclusiv semidrepte) si fete ale Vor(S). n este numarul de situri. Atunci:

- $V \leq 2n\text{-}5$
- $M \leq 3n\text{-}6$
- $F = n$



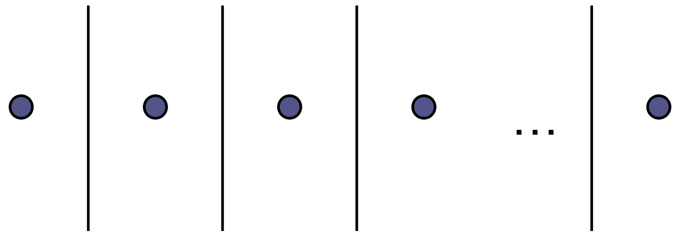
Observatii:

- O celula poate avea complexitatea maxima posibila de n-1, insa acest lucru nu este valabil pentru toate celulele.
- Reiese ca diagramele Voronoi au complexitate liniara.

Complexitate (2)

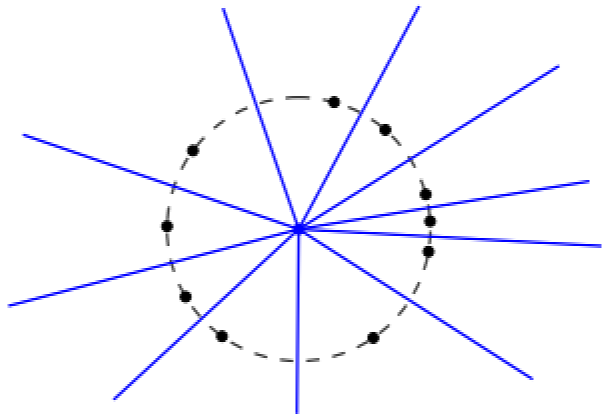
Demonstratie (cazuri degenerate):

- situri coliniare



$V = 0 \leq 2n\text{-}5$
$M = n\text{-}1 \leq 3n\text{-}6$
$F = n$

- situri conciclice



$V = 1 \leq 2n\text{-}5$
$M = n\text{-}1 \leq 3n\text{-}6$
$F = n$

Complexitate (3)

Demonstratie (cazul general):

- Se completeaza graful cu un graf planar prin conectarea tuturor “razelor” la “puncte la infinit”. Asadar, V creste cu 1, in timp ce M si F raman neschimbate.

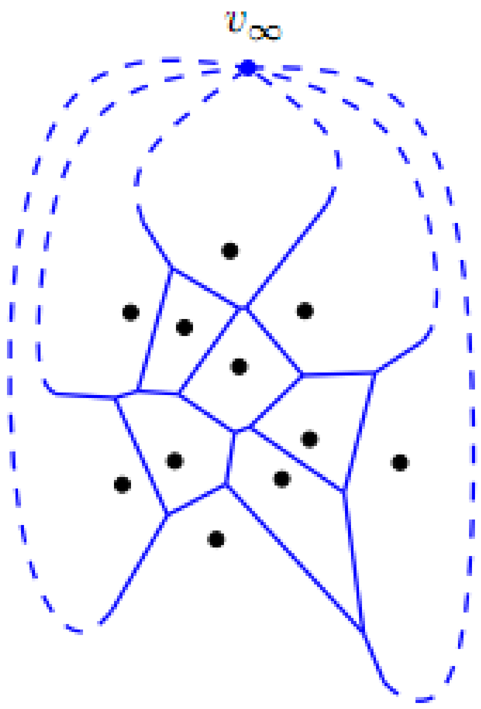
- Egalitatea lui Euler pentru grafuri planare:

  varfuri – muchii + feţe = 2

  devine:

  $$(V+1) - M + n = 2$$

  unde F = n, deoarece fiecare site defineste o celula Voronoi.



Complexitate (4)

Demonstratie (continuare):

- Fiecare muchie e definita de exact 2 situri si fiecare varf Voronoi e situat la intersectia a cel putin 3 muchii.
- Atunci:
  - Suma gradelor tuturor varfurilor = 2M
  - Suma gradelor tuturor varfurilor ≥ 3(V+1)

$$\Rightarrow 2M \geq 3(V+1)$$

- Combinand cu egalitatea precedenta se obtin:

$$V \leq 2n-5$$
$$M \leq 3n-6$$
$$F = n$$

Complexitate (5)

Dimensiunea medie a celulei Voronoi:

- Avem: $V - M + F = 2$, $F = n$
- Fiecare muchie participa la <u>exact</u> doua fete
- In medie avem d muchii per fata

$$\Rightarrow M \approx d \cdot n/2$$

- Dar $V \leq 2n - 5$

$$(2n - 5) + d \cdot n/2 + n \geq 2$$
$$2n + n - d \cdot n/2 \geq 7$$
$$d \leq 6 - 14/n$$

- Cand $n \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 6$

Dimensiunea medie a celulei Voronoi este 6