CURSUL 6 - Bazele teoretice ale testării circuitelor

Elemente de calcul diferenţial discret

Utilizarea diferenţei Boole-ene, iniţial în teoria codurilor şi apoi în studiul funcţiilor binare de variabile binare a condus la dezvoltarea unui aparat matematic similar celui din calculul diferenţial clasic. Acest aparat matematic a fost numit, datorită acestei similitudini, *calcul diferenţial discret*.

Aplicaţiile calculului diferenţial discret, între altele, sunt deosebit de interesante în teoria testării circuitelor de comutaţie, în optimizarea booleană a reţelelor combinaţionale multi-nivel (calculul termenilor interni nespecificaţi de observabilitate), dar şi în proiectarea şi optimizarea circuitelor VLSI construite cu porţi SAU-EXCLUSIV, în sinteza circuitelor cu bune proprietăţi de testabilitate etc.

6.1 Definiţii si notaţii

Fie f o funcţie binară scalară de n variabile binare: $f: B^n \rightarrow B$. Domeniul de definiţie al funcţiei f conţine 2^n vectori, fiecare cu n componente binare, de forma $\mathbf{x} = (x_{n-1}, x_{n-2},...,x_0)$. Vom considera vectorii $\mathbf{x}$ ordonaţi lexicografic, astfel fiecărui vector $\mathbf{x}$ îi asociem un număr natural j de forma:

$$j= 2^{n-1}x_{n-1} + 2^{n-2}x_{n-2} + ... +2^0x_0. \quad (6.1)$$

În relaţia (6.1) expresia din dreapta semnului egal este calculată ajutorul operatorilor aritmetici tradiţionali. Este făcută această precizare deoarece în continuare semnul plus şi juxtapunerea vor fi folosite, din motive de simplitate a scrierii, cu sensul de reuniune (disjuncţie sau sumă logică) respectiv intersecţie (conjuncţie sau produs logic), exceptând cazul în care se precizează, aşa cum s-a procedat anterior, explicit un alt sens. Relaţia (6.1) vine să asocieze unui minterm $\mathbf{x}$ un număr natural j unic. In continuare, se va realiza şi corespondenţa inversă: cu ajutorul exponenţierii binare scalare se va asocia unui număr natural un minterm unic.

> **Definiţia 6.1.** Fie a şi x doua variabile binare, atunci *exponenţierea binară* cu baza x si argument a este dată de expresia:
> $$x^{(a)} = x \oplus a' \quad (6.2)$$
> unde semnul $\oplus$ reprezintă suma modulo-2 (disjuncţia exclusivă) iar a' este notaţia pentru a complementat .

Se observă că folosind proprietăţile sumei modulo-2 se poate deduce cu uşurinţă:

$$x^{(1)}=x \text{ şi } x^{(0)}=x'.$$

In continuare folosind definiţia exponenţierii binare se introduc două notaţii. Astfel dacă **x** este o variabilă vectorială cu *n* ranguri iar *j* este un număr natural cuprins între 0 si 2^n-1, inclusiv capetele, în baza 2 numărul *j* se scrie $\mathbf{j}=(j_{n-1}\, j_{n-2}\, \ldots\, j_0)_2$, atunci *exponenţierea scalară* este conjuncţia:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{j})} = \bigcap_{k=1}^{n} x_{n-k}^{(j_{n-k})} .$$

Prin această operaţie de exponenţiere scalară, se remarcă faptul că se pot genera mintermi corespunzători numerelor *j*.
Spre deosebire de exponeţierea binară scalară care generează un termen produs, un minterm, *exponenţierea binară vectorială* a variabilei **x** la exponentul **j**, produce vectorul notat astfel:

$$(\mathbf{x}^{(\mathbf{j})}) = (x_{n-1}^{(j_{n-1})}, x_{n-2}^{(j_{n-2})}, \ldots, x_0^{(j_0)})$$

cu alte cuvinte vectorul acesta reprezintă punctul din B^n corespunzător numărului natural *j*.

Definţia 6.2 Fie *a* şi *x* două variabile binare, atunci *exponenţierea normală* în baza *x* şi argument *a* se calculează astfel:
$x^1 = x$, dacă *a* are valoarea 1 şi (6.3)
$x^0 = 1$, dacă *a* are valoarea 0. (6.3')

Exponenţierea normală se mai numeşte şi *exponenţiere inelară* deoarece poate fi privită ca o exponenţiere în inelul construit peste mulţimea B cu două elemente şi înzestrată cu o legea aditivă (suma modulo-2) şi cu o lege multiplicativă (intersecţia): B(⊕,•).

Similar exponenţierii binare, se pot introduce alte două notaţii folosind aceleaşi precizări ca şi mai înainte .*Exponenţierea normală scalară* este conjuncţia:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{j}} = \bigcap_{k=1}^{n} x_{n-k}^{j_{n-k}}$$

iar *exponenţierea normală vectorială* a variabilei x la exponent j este vectorul:

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{j}}) = (x_{n-1}^{j_{n-1}}, x_{n-2}^{j_{n-2}}, \ldots, x_0^{j_0})$$

Exponenţierea normală scalară acţionează ca un filtru taie-toate acele variabile pentru care exponentul este nul, în timp ce exponenţierea normală vectorială calculează un vector ce are o parte din componente nominalizate cu valoarea 1.
Exponeţierea normală (inelară) este adesea, din motive de exprimare uşoara, referită (simplu) şi ca exponenţiere.

Dacă $\boldsymbol{x}$ este un vector binar din B^5, spre exmplu, atunci $\boldsymbol{x}^{(10)}=x_4'x_3x_2'x_1x_0'$, adică un minterm, (deoarece $10=(01010)_2$ pe 5 ranguri), iar $(\boldsymbol{x})^{(10)}=(x_4',x_3,x_2',x_1,x_0')$ şi pentru exponenţierea normală se obţine: $\boldsymbol{x}^{10}=x_3x_1$ iar $(\boldsymbol{x})^{10}=(1,x_3,1,x_1,1)$.

6.2 Derivate discrete

In continuare definiţia 6.3 oferă cea mai simplă metodă de calcul direct a derivatei discrete pentru o funcţie binară de variabile binare.

Definiţia 6.3 Derivata discretă a funcţiei f în raport cu variabila x_i, $0 \le i \le n$, este dată de expresia:

$$\frac{df}{dx_i} = f(x_{n-1},\dots,x_{i+1},1,x_{i-1},\dots,x_0) \oplus f(x_{n-1},\dots,x_{i+1},0,x_{i-1},\dots,x_0)$$

Aplicarea iterativă a derivatei discrete, în raport cu anumite variabile conduce la necesitatea definirii derivatei discrete în raport cu o submulţime a mulţimii variabilelor funcţiei f.
Fie $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)$ o partiţie a vectorului $\mathbf{x}$, astfel încât $\mathbf{x}_1$ sa conţină primele t variabile din $\mathbf{x}$ începând cu x_0 (eventual renumerotând variabilele).

Definiţia 6.4 Derivata discretă a funcţiei f în raport cu $\mathbf{x}_1$ este funcţia:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}_1} = \frac{d}{dx_0}\left(\frac{d}{dx_1}\left(\dots\left(\frac{df}{dx_{t-1}}\right)\dots\right)\right)$$

Derivata discretă are un număr mare de proprietăţi matematice. În continuare sunt enumerate unele dintre cele mai importante proprietăţi ale derivatei discrete şi anume cele legate de domeniul proiectării şi testării subsistemelor digitale.

$$\frac{df}{dx_i} = 0 \Rightarrow f = f(x_{n-1},\dots,x_{i+1},x_{i-1},\dots,x_0)$$
(6.4)

$$\frac{d(f')}{dx_i} = \frac{df}{dx_i}$$
(6.5)

$$\frac{df}{dx_i'} = \frac{df}{dx_i}$$
(6.6)

$$\frac{d(f \oplus g)}{dx_i} = \frac{df}{dx_i} \oplus \frac{dg}{dx_i}$$
(6.7)

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx_i} = \frac{df}{dx_i} \cdot g \oplus \frac{dg}{dx_i} \cdot f \oplus \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{dg}{dx_i}$$
(6.8)

$$\frac{d(f+g)}{dx_i} = \frac{df}{dx_i} \oplus \frac{dg}{dx_i} \oplus \frac{d(f.g)}{dx_i}$$
(6.9)

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{df}{dx_i}\right) = 0$$
(6.10)
$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{df}{dx_j}\right) = \frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right)$$
(6.11)

6.3 Dezvoltări canonice disjunctiv-exclusive ale funcţiilor binare de *n* variabile binare

Se consideră dezvoltarea canonică disjunctivă (Shanon) a funcţiei f:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} = 0) \cdot \mathbf{x}^{(0)} + f(\mathbf{x} = 1) \cdot \mathbf{x}^{(1)} + \ldots + f(\mathbf{x} = 2^{n-1}) \cdot \mathbf{x}^{(2^n-1)} \quad (6.12)$$

Ţinând cont că termenii în x sunt disjuncţi, relaţia (1.12) se poate rescrie astfel:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} = 0) \cdot \mathbf{x}^{(0)} \oplus f(\mathbf{x} = 1) \cdot \mathbf{x}^{(1)} \oplus \ldots \oplus f(\mathbf{x} = 2^{n-1}) \cdot \mathbf{x}^{(2^n-1)} \quad (6.13)$$

În continuare forma (6.13) se va numi dezvoltarea canonică disjunctiv-exclusivă a funcţiei *f*.

Pentru o mai bună introducere a unei propoziţii importante care urmează a fi enunţată, se consideră următorul exemplu:

Exemplul 6.1 Fie o funcţie binară g de o singură variabilă binară. Aplicând dezvoltarea canonică disjunctiv-exclusivă, pentru acest caz particular şi substituind în dezvoltarea obţinută literalul x' prin $x\oplus 1$, se observă că se poate ajunge la expresia:

$$g(x) = g(0) \oplus (g(0) \oplus g(1))x$$

Utilizând definiţia derivatei discrete, egalitatea anterioară se poate rescrie (6.14):

$$g(x) = g(0) \oplus \frac{dg}{dx} x$$
(6.14)

Printr-un procedeu similar, dar grupâd altfel, se poate obţine şi relaţia (6.15):

$$g(x) = g(1) \oplus \frac{dg}{dx} x' \quad (6.15)$$

În relaţiile (6.14) şi (6.15) se poate remarca faptul că derivata discretă este o constantă (funcţia g este dependentă doar de o singură variabilă).
Se poate observa că relaţiile (6.14) şi (6.15) se pot aplica şi unor funcţii de două sau mai multe variable. În acest caz procedeul se aplică după una (oarecare) dintre variabilele funcţiei, dar derivata discretă calculată nu mai este o constantă.

Relaţiile (6.14) si (6.15) se pot denumi, din cauza asemănării evidente, dezvoltări Taylor în 0 şi respectiv în 1 ale funcţiei *g*. Propoziţia următoare, atribuită lui S.B. Akers, cuprinde generalizarea relaţiilor (6.14) şi (6.15). În toate referinţele această teoremă este enunţată fără demonstraţie. În continuare este prezentată o demonstraţie, prin inducţie completă, realizată de autor. Realizarea demonstraţiei a fost necesară în mod deosebit pentru evitarea confuziilor legate de convenţiile de notaţie, adeseori presupuse cunoscute implicit dar, totuşi, variabile de la o şcoală la alta.

***Propoziţia 6.1* (S.B. Akers)**

Dezvoltarea Taylor a unei funcţii f, într-un punct $\mathbf{k}=(k_{n-1},k_{n-2},...,k_0)$ din domeniul B^n, este dată de relaţia:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{k}) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{n} \frac{df}{dx_i}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{k}} \cdot x_i^{(k_i')}\Big) \oplus$$

$$\Big(\bigoplus_{0<i<j}^{n} \frac{df}{dx_i\ \ dx_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{k}} \cdot x_i^{(k_i')} x_j^{(k_j')}\Big) \oplus \ldots \oplus \frac{df}{dx_0\ \ dx_1 \ldots dx_{n-1}} \cdot x_0^{(k_0')} x_1^{(k_1')} \ldots x_{n-1}^{(k_{n-1}')}. \qquad (6.16)$$

Demonstraţie

Demonstraţia se va face prin inducţie completă după n, numărul de variabile al funcţiei f. Considerând relaţiile (6.14) şi (6.15) acestea se pot scrie unitar utilizând exponenţierea binară astfel:

$$f(x) = f(k) \oplus \frac{df}{dx} \cdot x^{(k')}. \qquad \text{(i)}$$

Cu aceasta se poate considera că verificarea propoziţiei pentru $n = 1$ este realizată.

Se presupune în continuare că relaţia (6.16) este verificată pentru orice funcţie f care depinde de cel mult n-1 variabile şi în baza acestei ipoteze se demonstrează că relaţia (6.16) se verifică şi pentru funcţii cu n variabile.

Fie f o funcţie de n variabile şi fie $\boldsymbol{x} = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots ,x_0)$ vectorul variabilelor sale. Fie $\boldsymbol{k}$ din B^n punctul în care se calculează dezvoltarea funcţiei f.

Asupra vectorului $\mathbf{x}$ se efectează o partiţie de forma: $\boldsymbol{x} = (x_{n-1}, \mathbf{x}_0)$, unde $\mathbf{x}_0$ este un vector cu n-1 componente: $\mathbf{x}_0 = (x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots , x_0)$. Deci se poate scrie $f(\mathbf{x}) = f(x_{n-1},\mathbf{x}_0)$. Funcţiei f îi putem aplica o dezvoltare în raport numai cu variabila x_{n-1}, în punctul $x_{n-1} = k_{n-1}$, astfel:

$$f(x_{n-1}, \mathbf{x}_0) = f(k_{n-1}, \mathbf{x}_0) \oplus \frac{df(x_{n-1}, \mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}} \cdot x_{n-1}^{(k_{n-1}')}. \qquad \text{(ii)}$$

In relaţia obţinută au apărut doi termeni, fiecare depinzând de n-1 variabile: $f(k_{n-1},\mathbf{x}_0)$ şi $\dfrac{df(x_{n-1}, \mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}}$.

Acestor termeni li se poate aplica ipoteza de inducţie într-un punct $\mathrm{k}_0=(k_{n-2}, k_{n-3}, \ldots ,k_0)$ din B^{n-1}, astfel încât punctul $\mathbf{k}$ din B^n este $\mathbf{k} = (k_{n-1},\mathbf{k}_0)$:

$$f(k_{n-1},\mathbf{x}_0)=f(k_{n-1},\mathbf{k}_0)\oplus\Big(\bigoplus_{i=0}^{n-2}\frac{df(k_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_i}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{j>i=0}^{n-2}\frac{df(k_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_i dx_j}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}x_j^{(k_j^{'})}\Big)\oplus\ldots$$
$$\ldots\oplus\frac{df(k_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_0dx_1\ldots dx_{n-2}}\cdot x_0^{(k_0^{'})}x_1^{(k_1^{'})}\ldots x_{n-2}^{(k_{n-2}^{'})},\tag{iii}$$

respectiv:

$$\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}}\cdot x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}=\Bigg(\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}}\Bigg|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\oplus\Big(\bigoplus_{i=0}^{n-2}\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}dx_i}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}\Big)\oplus$$
$$\oplus\Big(\bigoplus_{j>i=0}^{n-2}\frac{df(x_{n-1,}\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}dx_i dx_j}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}x_j^{(k_j^{'})}\Big)\oplus\ldots\oplus\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}dx_0dx_1\ldots dx_{n-2}}\cdot x_0^{(k_0^{'})}x_1^{(k_1^{'})}\ldots x_{n-2}^{(k_{n-2}^{'})}\Bigg)x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}.\tag{iv}$$

Sumând modulo-2 relaţiile (iii) şi (iv), şi ţinând cont că $f(k_{n-1},\mathbf{k}_0)$ $=f(\mathbf{k})$ se obţine, după gruparea convenabilă a termenilor, egalitatea:

$$f(\mathbf{k})\oplus\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}}x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}=f(\mathbf{k})\oplus\Bigg(\Big(\bigoplus_{i=0}^{n-2}\frac{df(k_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_i}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}\Big)\oplus\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}\Bigg)\oplus$$
$$\oplus\Bigg(\Big(\bigoplus_{j>i=0}^{n-2}\frac{df(k_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_i dx_j}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_i^{(k_i^{'})}x_j^{(k_j^{'})}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{i=0}^{n-2}\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_{n-1}dx_i}\Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{k}_0}\cdot x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}x_i^{(k_i^{'})}\Big)\Bigg)\oplus\ldots$$
$$\ldots\oplus\frac{df(x_{n-1},\mathbf{x}_0)}{dx_0dx_1\ldots dx_{n-1}}\cdot x_0^{(k_0^{'})}x_1^{(k_1^{'})}\ldots x_{n-1}^{(k_{n-1}^{'})}.\tag{v}$$

Acum se observă cu uşurinţă ca relaţia (v) este identică cu relaţia (6.16) şi demonstraţia este încheiată.

Pentru o mai mare uşurinţă în manevrarea formulei (6.16) aceasta se poate rescrie, mai compact, folosind ca argument al funcţiei f punctul în care se calculează derivata discretă, astfel:

$$f(\mathbf{x})\ =\ \bigoplus_{\mathbf{j}=0}^{2^n\text{-}1}\frac{df(\mathbf{x}=\mathbf{k})}{d\mathbf{x}^{\mathbf{j}}}.(\mathbf{x}\oplus\mathbf{k})^{\mathbf{j}}\tag{6.17}$$

În continuare, folosind forma (6.17), se pot deduce câteva proprietăţi interesante .

Corolarul 6.1

Fie **x** un vector cu n componente binare şi fie $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0)$ o partiţie a sa unde $\boldsymbol{x}_0$ cuprinde primele m variabile ($m \le n$) din $\boldsymbol{x}$ (eventual re-numerotând). Dezvoltarea Taylor în raport cu $\boldsymbol{x}_0$, în jurul unui punct $\boldsymbol{i}_0$ din spaţiul B^m, pentru funcţia f este:

$$f(\mathbf{x}) \;=\; \bigoplus_{\mathbf{j}=0}^{2^m-1} \frac{df(\mathbf{x}_0 = \mathbf{i}_0)}{d\mathbf{x}_0^{\mathbf{j}}} \cdot (\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{i}_0)^{\mathbf{j}} \tag{6.18}$$

Corolarul 6.2

În relaţia (6.17) se poate observa că substituind $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{k}$ se obţine:

$$f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{k}) \;=\; \bigoplus_{\mathbf{j}=0}^{2^n-1} \frac{df(\mathbf{x} = \mathbf{k})}{d\mathbf{x}^{\mathbf{j}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{j}} \tag{6.19}$$

Dacă se însumează modulo-2 relaţiile (6.17) şi (6.19), se obţine următorul rezultat:

$$f(\mathbf{x}) \oplus f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{k}) \;=\; \bigoplus_{\mathbf{j}=0}^{2^n-1} \frac{df(\mathbf{x} = \mathbf{k})}{d\mathbf{x}^{\mathbf{j}}} \cdot \mathbf{k}^{\mathbf{j}} \tag{6.20}$$

Corolarul 6.3

Remarcând faptul că relaţia (6.17) este o identitate în raport cu $\boldsymbol{k}$, după o prealabilă interschimbare a variabilei $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{k}$, se obţine:

$$f(\mathbf{x}) \oplus f(\mathbf{k}) \;=\; \bigoplus_{\mathbf{j}=1}^{2^n-1} \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^{\mathbf{j}}} \cdot (\mathbf{k} \oplus \mathbf{x})^{\mathbf{j}} \tag{6.21}$$

Formele de dezvoltare Taylor mai sunt cunoscute în literatură şi sub numele de *forme canonice Reed-Muller* (RMCF), iar vectorul, punctul, $\boldsymbol{k}$ din B^n în jurul căruia se face dezvoltarea este numit *vector de polarizare* .

Se observă cu uşurinţă că atunci când în vectorul $\boldsymbol{k}$ componenta de rang j este nulă, corespunzător acesteia variabila de rang j se dezvoltă în zero şi în consecinţă dezvoltarea Taylor va cuprinde variabila de rang j doar în forma directă. Complementar, atunci când în vectorul $\boldsymbol{k}$ componenta de rang j este nenulă, dezvoltarea Taylor va cuprinde doar forma complementată (negată) a variabilei de rang j.

Exemplul 6.2 Se consideră funcţia:

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_0'x_1'x_2' + x_0x_1'x_2' + x_0x_1'x_2 + x_0'x_1x_2 .$$

Se va calcula dezvoltarea disjunctiv-exclusivă (6.17) a funcţiei pentru punctul $\boldsymbol{k}$ = 4 ($x_2 = 1$, $x_1 = 0$ şi $x_0 = 0$, deci $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{k} = (x_2', x_1, x_0)$). Termenii produs sunt:

j ($j_4 j_2 j_0$) $(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{k})^j = (x_2', x_1, x_0)^j$

0	(0 0 0)	1
1	(0 0 1)	x_0
2	(0 1 0)	x_1
3	(0 1 1)	x_1x_0
4	(1 0 0)	x_2'
5	(1 0 1)	$x_2'x_0$
6	(1 1 0)	$x_2'x_1$
7	(1 1 1)	$x_2'x_1x_0$

Funcţia $f(x_2,x_1,x_0)$, în punctul $\boldsymbol{x} = 4$, are valoarea 0.

Determinarea derivatelor discrete conduce la expresiile:

$$\frac{df}{dx_0} = x_2;\frac{df}{dx_1} = 1;\frac{df}{dx_2} = x_0^{'};\frac{df}{dx_0dx_1} = 0;\frac{df}{dx_0dx_2} = 1;\frac{df}{dx_1dx_2} = 0;\frac{df}{dx_0dx_1dx_2} = 0;$$

După calcularea tuturor coeficienţilor constituiţi din valorile derivatelor discrete în punctul **x**=4, dezvoltarea disjunctiv-exclusivă care se obţine, conform **Propoziţiei 6.1**, este:
$f(x_2,x_1,x_0) = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2^{'} \oplus x_0x_2^{'}.$

Privitor la calculul coeficienţilor constituiţi din valorile derivatelor discrete se pot face următoarele consideraţii.
Deoarece în dezvoltarea (6.17) sunt necesare doar valorile derivatelor discrete în punctul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$, calculul coeficienţilor dezvoltării se poate desfăşura mult mai eficient (mai ales în calcul automat) pornind de la vectorul de valori al funcţiei f (metoda este dezvoltată în continuare). Calculul formal al derivatelor discrete este fezabil doar pentru exemple de complexitate mică dar are avantajul independenţei de punctul de dezvoltare.

6.4 Derivate discrete ale funcţiilor compuse

Considerăm o funcţie binară vectorială $\boldsymbol{g}$ de n variabile binare:

$$\mathbf{g} : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}^m$$

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{x})=(g_{m-1}(\boldsymbol{x}),g_{m-2}(\boldsymbol{x}),...,g_0(\boldsymbol{x})),\ \ \boldsymbol{x} \in \mathrm{B}^{\mathrm{n}};$$

şi fie f o funcţie binară de m variabile binare:

$$f: \mathrm{B}^{\mathrm{m}} \to \mathrm{B},$$

iar h este funcţia compusă

$$h : \mathrm{B}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{B},$$

$$h(\boldsymbol{x}) = f \circ \boldsymbol{g}\ (\boldsymbol{x}).$$

Propoziţia următoare enunţă modul de derivare discret al funcţiilor compuse.
Formula de calcul corespunzătoare, este adeseori numită formula de derivare în lanţ ("*chain rule*") şi este demonstrabilă folosind **Propoziţia 6.1**.

Propozitia 6.2 Derivata discretă a funcţiei h în raport cu variabila x_i este dată de expresia:

$$\frac{dh}{dx_i} = \left(\bigoplus_{0\le j}^{m-1} \frac{df}{dg_j} \cdot \frac{dg_j}{dx_i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{0\le j<k}^{m-1} \frac{df}{dg_j\ dg_k} \cdot \frac{dg_i}{dx_i} \cdot \frac{dg_k}{dx_i}\right) \oplus \ldots$$
$$\oplus \frac{df}{dg_0\ dg_1\ \ldots\ dg_{m-1}} \cdot \frac{dg_0}{dx_i} \cdot \frac{dg_1}{dx_i} \cdots \frac{dg_{m-1}}{dx_i} \qquad (6.22)$$

Se poate construi o demonstraţie a formulei de calcul a derivatei compuse dezvoltând disjunctiv-exclusiv (6.17), într-un punct g, funcţia h. Derivând discret în raport cu variabila x_i, în ambii membri dezvoltării şi grupând convenabil se obţine formula de calcul (6.22).