Modelele Markov

Modelele Markov sunt utilizate în sistemele complexe, presupuse ca având viteze de defectare constante, dar pentru care abordarea prin argumente combinatorice este ineficientă în analiza fiabilităţii respectivelor sisteme.

Modelele Markov oferă un tratament structural pentru determinarea fiabilităţii sistemelor care conţin procese de reparare şi facilităţi de acoperire a erorilor.

Un lanţ Markov este un tip special de proces stohastic.
Un proces stohastic $X(t)$, în general, este un număr infinit de variabile aleatoare indexate prin timpul t. Se consideră un proces stohastic $X(t)$ care ia valori dintr-o mulţime (numită spaţiul stărilor) de entităţi discrete. Se va utiliza pentru spaţiul stărilor o submulţime a numerelor întregi $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Procesul stohastic $X(t)$ este numit Markov dacă:

$$\text{Prob}\{ X(t_n) = j \mid X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1} \} = \text{Prob}\{ X(t_n) = j \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1} \},$$

pentru fiecare $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$.

Dacă $X(t) = i$, pentru un anumit t şi i, se spune că lanţul este în starea i la momentul t.
În cele ce urmează se vor considera lanţuri Markov cu stări discrete pentru care timpul este real şi pozitiv ($0 \le t < \infty$), iar $X(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Proprietatea Markov înseamnă că pentru determinarea traiectoriei viitoare a lanţului (valorile viitoare $X(t)$) este suficientă cunoaşterea stării prezente. Independenţa stării viitoare a lanţului Markov de totalitatea istoriei sale anterioare este deosebit de importantă pentru analiza proceselor stohastice.

Comportamentul probabilistic al unui lanţ Markov are o descriere simplă. Odată ce lanţul Markov a ajuns într-o stare oarecare i, acesta va rămâne în această stare pentru un timp care are distribuţie exponenţială cu parametrul λ_i. Aceasta implică o viteză constantă λ_i a părăsirii stării i.

Probabilitatea ca, atunci când lanţul Markov părăseşte starea i, să ajungă în starea j (cu $i \neq j$) se notează prin p_{ij} ($\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$).
Viteza de tranziţie din starea i în starea j este:

$$\lambda_{ij} = p_{ij}\lambda_i \; \left(\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i \right).$$

Se notează, în general, prin $P_i(t)$ probabilitatea ca procesul să fie în starea i la momentul t, dată fiind startarea acestuia din starea i_0 la momentul $t = 0$.

Pentru un anumit moment de timp t şi pentru o stare dată i şi pentru un foarte scurt interval de timp Δt, lanţul va fi în starea i la momentul $t + \Delta t$, într-unul din următoarele cazuri:

1. Lanţul a fost în starea *i* la momentul *t* şi nu a tranzitat într-o altă stare pe durata intervalului de timp Δt. Acest eveniment are probabilitatea $P_i(t)(1 - \lambda_i\Delta t)$ la care se adaugă, posibil, termeni în Δt^2.

2. Lanţul a fost în starea *j* la momentul *t* ($j \neq i$) şi a tranzitat din starea *j* în starea *i* pe durata intervalului de timp Δt. Acest eveniment are probabilitatea $P_j(t)\lambda_{ji}\Delta t$ la care se adaugă, posibil, termeni în Δt^2.

Probabilitatea efectuării mai multor tranziţii pe durata intervalului de timp Δt este neglijabilă (este de ordinul Δt^2) dacă intervalul de timp Δt este suficient de mic. Astfel, pentru un interval scurt de timp Δt,

$$P_i(t + \Delta t) \approx P_i(t)(1 - \lambda_i\Delta t) + \sum_{i \neq j} P_j(t)\lambda_{ji}\Delta t\,.$$

Această aproximaţie devine mai precisă atunci când intervalul de timp considerat Δt tinde spre zero, $\Delta t \to 0$ şi rezultă:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda_i P_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j(t)\,,$$

Deoarece $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i$, relaţia anterioară se rescrie astfel:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j(t)$$

Acest set de ecuaţii diferenţiale (pentru i = 0, 1, 2, …)poate fi soluţionat utilizând condiţiile $P_{i_0} = 1$ şi $P_j(0) = 0$ pentru $j \neq i_0$ (deoarece i_0 este starea iniţială a lanţului Markov.

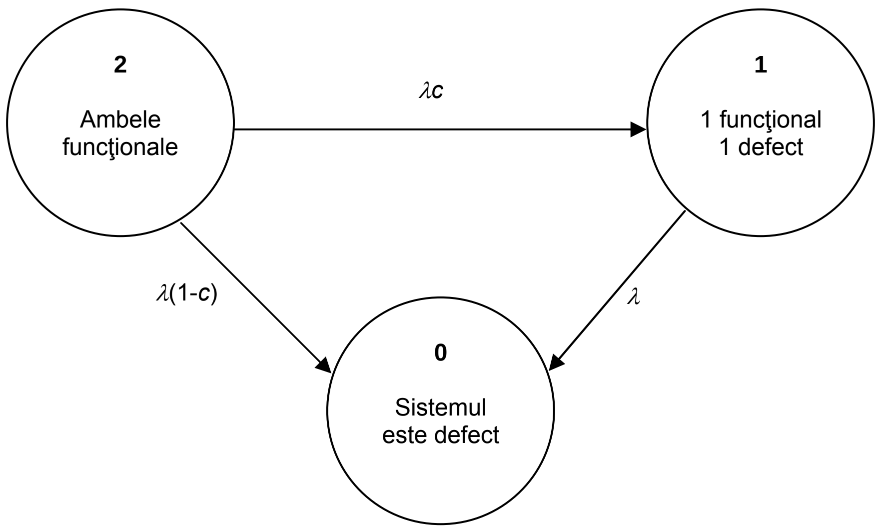

Figura 1. Modelul Markov al unui sistem duplex cu un procesor activ şi unul în rezervă.

Se consideră, spre exemplu, un sistem duplex care un singur procesor active şi un singur procesor de rezervă, în aşteptare. Procesorul de rezervă este conectat numai atunci când s-a detectat o eroare în procesorul activ.

Fie λ viteza, fixă, de defectare a unui procesor atunci când acesta este activ şi fie c factorul de acoperire. Modelul Markov al acestui sistem este prezentat în figura 1.
Deoarece întregii atribuiţi diferitelor stări sunt, în general, arbitrari aceştia pot fi asociaţi unei semnificaţii pentru sistemul modelat. Starea reprezintă numărul de procesoare funcţionale (0, 1, sau 2 procesoare funcţionale - în starea iniţială fiind două procesoare funcţionale).
Ecuaţiile diferenţiale care descriu acest lanţ Markov sunt:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_2(t)}{dt} &= -\lambda P_2(t) \\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= \lambda c P_2(t) - \lambda P_1(t) \\
\frac{dP_0(t)}{dt} &= \lambda(1-c)P_2(t) + \lambda P_1(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

Soluţionarea sistemului (1) cu condiţiile iniţiale $P_2(0) = 1$, $P_1(0) = P_0(0) = 0$, conduce la expresiile probabilităţilor celor trei stări:

$$\begin{aligned}
&P_2(t) = e^{-\lambda t}, \\
&P_1(t) = c\lambda t e^{-\lambda t}, \\
&P_0(t) = 1 - P_2(t) - P_1(t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Fiabilitatea sistemului duplex considerat are expresia:

$$\begin{aligned}
&R_{duplex}(t) = 1 - P_0(t), \\
&R_{duplex}(t) = P_2(t) + P_1(t), \\
&R_{duplex}(t) = e^{-\lambda t} + c\lambda e^{-\lambda t}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Un alt sistem duplex care este imediat analizabil prin modelul lanţurilor Markov este cel care are o viteză constantă de defectare λ dar şi o viteză constantă de reparaţie μ. Modelul Markov al acestui sistem este prezentat în figura 2.

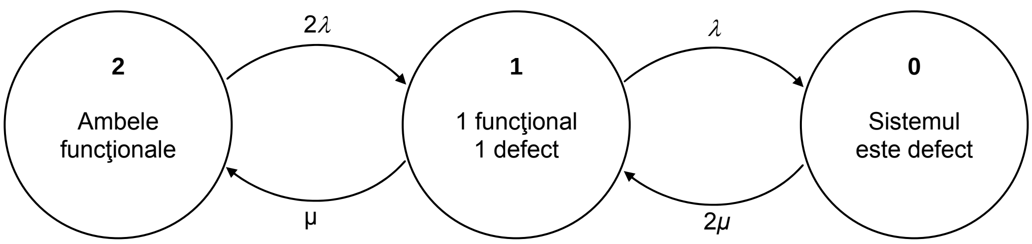

Figura 2. Modelul Markov al unui sistem duplex cu reparaţie.

Similar cazului anterior starea din acest lanţ Markov este reprezentată prin numărul de procesoare funcţionale. Ecuaţiile diferenţiale care descriu acest lanţ Markov sunt descrise prin sistemul (4):

$$\begin{aligned}\frac{dP_2(t)}{dt} &= -2\lambda P_2(t) + \mu P_1(t)\\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= 2\lambda P_2(t) + 2\mu P_0(t) - (\lambda+\mu)P_1(t)\\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= \lambda P_2(t) - 2\mu P_0(t)\end{aligned} \tag{4}$$

Soluţia sistemului (4) cu condiţiile iniţiale $P_2(0) = 1$, $P_1(0) = P_0(0) = 0$, arată astfel:

$$\begin{aligned}P_2(t) &= \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}e^{-2(\lambda+\mu)t},\\ P_1(t) &= \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda(\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}e^{-2(\lambda+\mu)t},\\ P_0(t) &= 1 - P_1(t) - P_2(t).\end{aligned} \tag{5}$$

Se poate remarca faptul că s-au determinat doar expresiile pentru P_1(t) şi P_2(t). Prin utilizarea condiţiei de însumare a celor trei probabilităţi s-a determinat şi cea de-a treia probabilitate (P_0(t)). Prin această metodă se reduce cu o unitate numărul de ecuaţii diferenţiale care trebuiesc rezolvate.

Este de reţinut faptul că sistemul acesta nu se defectează complet niciodată. Redevine operaţional după ce a stat un timp în starea 0, şi după ce s-a reparat revine în funcţiune.
Pentru sistemele cu reparare calculul disponibilităţii este mai semnificativ, mai important, decât calculul fiabilităţii.
Disponibilitatea sau probabilitatea ca sistemul să fie operaţional la momentul t este:

$$A(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{6}$$

Deoarece în cele mai multe din cazuri procesoarele sunt reparate atunci când s-au defectat amândouă, disponibilitatea pe termen lung a sistemului duplex este mult mai relevantă decât fiabilitatea aceluiaşi sistem.
Pentru calculul acesteia trebuie determinate $P_2(\infty)$, $P_1(\infty)$ şi $P_0(\infty)$. Acestea probabilităţi pot fi obţinute prin trecerea la limită a variabilei t în expresiile corespunzătoare sau prin anularea tuturor derivatelor din sistemul (5) şi soluţionând sistemul de ecuaţii rezultat.

$$\begin{aligned}A &= P_2(\infty) + P_1(\infty) = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2},\\ A &= \frac{\mu(\mu+\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}.\end{aligned} \tag{7}$$