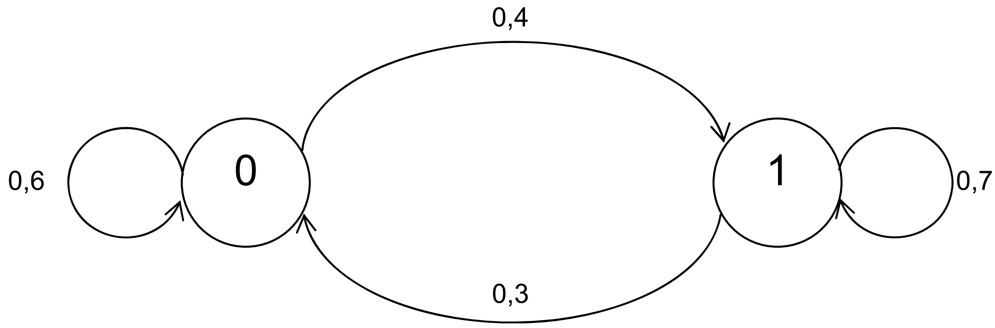
Modelarea prin lanţuri Markov discrete



Dacă I şi S sunt populaţia iniţială a unui oraş şi respective populaţia suburbană a acelui oraş şi dacă se determină că în fiecare an 40% din populaţia oraşului migrează în suburban în timp ce 30% din populaţia din suburban migrează în oraş atunci după un an populaţia urbană şi suburbană sunt calculabile prin relaţia matricială

$$\begin{pmatrix} 0.6I + 0.3S \\ 0.4I + 0.7S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

este foarte importantă. În adevăr, valorile fiecărei coloane sunt pozitive şi suma acestora este 1. Astfel de vectori sunt numiţi vectori de ***probabilitate*** . O matrice în care toate coloanele sunt vectori de probabilitate se numesc matrice de ***tranziţie*** sau ***stohastice*** . Andrei Markov, matematician rus, a fost primul care a studiat aceste matrice. La începutul secolului XX acesta a dezvoltat fundamentele teoriei ***Lanţurilor Markov***.

Un lanţ Markov este un proces care constă dintr-un număr finit de ***stări*** şi anumite probabilităţi cunoscute p_{ij}, unde p_{ij} este probabilitatea trecerii din starea i în starea j. În exemplul anterior, sunt două stări: ***0*** şi ***1***. Valoarea p_{ij} reprezintă probabilitatea trecerii din starea i în starea j, într-un anumit interval de timp.

Lanţurile Markov pot avea două sau mai multe stări.

Un sistem de calcul cu trei procesoare, spre exemplu, poate avea toate procesoarele funcţionale (starea 3) după cum poate avea doar două procesoare funcţionale (starea 2), unul funcţional (starea 1) sau niciunul (starea 0). Sistemul de calcul este, iniţial, complet funcţional şi are capacitatea să recupereze, parţial sau total, funcţionalitatea.
Probabilitatea p_{30}, spre exemplu, reprezintă probabilitatea defectării la un moment dat a întregului sistem, constituit din cele trei procesoare.

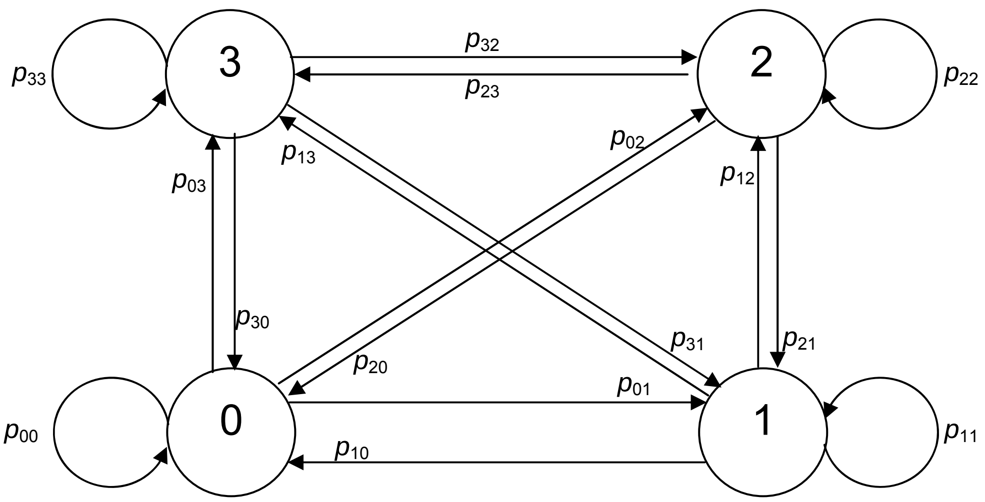


Figura 1. Lanţul Markov asociat unui sistem tri-procesor având capacitatea unei recuperări dinamice.

Analog, probabilitatea p_{02}, spre exemplu, reprezintă probabilitatea reparării simultane a două procesoare, din cele trei ale sistemului, după acelaşi interval de timp t, atunci când sistemul tri-procesor a fost complet nefuncţional.
Pentru fiecare stare a lanţului Markov din figura 1 se pot scrie relaţiile:

$$
\begin{aligned}
p_{33} + p_{32} + p_{31} + p_{30} = 1, \\
p_{23} + p_{22} + p_{21} + p_{20} = 1, \\
p_{13} + p_{12} + p_{11} + p_{10} = 1, \\
p_{03} + p_{02} + p_{01} + p_{00} = 1.
\end{aligned}
$$

Aceste relaţii arată completitudinea sistemului de evenimente asociate fiecărei stări, în parte, din lanţul Markov.

Probabilitatea ca sistemul să fie complet funcţional, spre exemplu, la momentul n poate fi scrisă astfel:

$$P_3(n) = p_{33}P_3(n\text{-}1) + p_{23}P_2(n\text{-}1) + p_{13}P_1(n\text{-}1) + p_{03}P_0(n\text{-}1). \qquad (01)$$

În (01) s-a notat, spre exemplu, prin $P_2(n\text{-}1)$ probabilitatea ca sistemul să funcţioneze cu două unităţi din trei la momentul n-1, iar prin p_{23} s-a notat probabilitatea recuperării unității nefuncţionale pe durata momentului n-1.

Similar, probabilităţile ca la momentul n sistemul să a funcţioneze cu 2, 1 sau niciuna dintre unităţile sale funcţionale sunt:

$$P_2(n) = p_{32}P_3(n\text{-}1) + p_{22}P_2(n\text{-}1) + p_{12}P_1(n\text{-}1) + p_{02}P_0(n\text{-}1), \tag{02}$$
$$P_1(n) = p_{31}P_3(n\text{-}1) + p_{21}P_2(n\text{-}1) + p_{11}P_1(n\text{-}1) + p_{01}P_0(n\text{-}1), \tag{03}$$
$$P_0(n) = p_{30}P_3(n\text{-}1) + p_{20}P_2(n\text{-}1) + p_{10}P_1(n\text{-}1) + p_{00}P_0(n\text{-}1), \tag{04}$$

Relaţiile anterioare ((01) – (04)) se pot rescrie matricial astfel:

$$\begin{bmatrix} P_3(n) \\ P_2(n) \\ P_1(n) \\ P_0(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{33}\,p_{23}\,p_{13}\,p_{03} \\ p_{32}\,p_{22}\,p_{12}\,p_{02} \\ p_{31}\,p_{21}\,p_{11}\,p_{01} \\ p_{30}\,p_{20}\,p_{10}\,p_{00} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} P_3(n-1) \\ P_2(n-1) \\ P_1(n-1) \\ P_0(n-1) \end{bmatrix} \tag{05}$$

Se notează în (05) vectorul coloană din stânga prin:

$$\Pi_n = \begin{bmatrix} P_3(n) \\ P_2(n) \\ P_1(n) \\ P_0(n) \end{bmatrix} \tag{06}$$

Matricea pătrată a sistemului din (05) se notează, tradiţional, astfel:

$$A = \begin{bmatrix} p_{33}\,p_{23}\,p_{13}\,p_{03} \\ p_{32}\,p_{22}\,p_{12}\,p_{02} \\ p_{31}\,p_{21}\,p_{11}\,p_{01} \\ p_{30}\,p_{20}\,p_{10}\,p_{00} \end{bmatrix} \tag{07}$$

Atunci relaţia (05) se rescrie astfel:

$$\Pi_n = A \bullet \Pi_{n-1}\,. \tag{07}$$

Explicitând expresia (07) rezultă:

$$\Pi_n = A^n \bullet \Pi_0 \tag{08}$$

Vectorul iniţial Π_0 arată astfel:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{09}$$

Vectorul coloană iniţial arată astfel deoarece, la momentul zero, sistemul se presupune că era complet funcţional.

Pentru o istorie suficient de lungă a funcţionării sistemului tri-procesor considerat acesta intră într-o starea staţionară caracterizată printr-o anumită distribuţie a probabilităţilor stărilor acestuia.

$$\Pi = A \bullet \Pi \tag{10}$$

Această distribuţie stabileşte probabilităţile sistemului de a se găsi în cele patru stări posibile.
Un vector coloană de probabilităţi Π care satisface (10) este alcătuit din valori proprii ale matricei A.
Determinarea valorilor proprii ale unei matrice poate fi o sarcină laborioasă.
Dintr-un punct de vedere pragmatic vectorul coloană Π poate fi aproximat printr-un calcul iterativ aplicând expresia (07). Calculul poate fi oprit deîndată ce:

$$\left| \Pi_{n+1} - \Pi_n \right| \le \varepsilon \tag{11}$$

În (11) constanta pozitivă ε poate fi aleasă convenabil, în raport cu precizia urmărită, în calculul probabilităţilor staţionare ale lanţului Markov respectiv. Uzual, valori ale erorii ε de ordinul $0 < \varepsilon < 10^{-6}$ sunt satisfăcătoare în marea majoritate a situaţiilor.