



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI



Instrumente Structurale
2007-2013



1818

Platformă de e-learning și curriculum e-content pentru învățământul superior tehnic

Sisteme Tolerante la Defecte

25. Modelele Markov in modelarea sistemelor cu reparare

Modelele Markov în Modelarea Sistemelor cu Reparare

Modelele Markov sunt utilizate în sistemele complexe, presupuse ca având viteze de defectare constante, dar pentru care abordarea prin argumente combinatorice este inefficientă în analiza fiabilității respectivelor sisteme.

Modelele Markov oferă un tratament structural pentru determinarea fiabilității sistemelor care conțin procese de reparare și facilități de acoperire a erorilor.

Un lanț Markov este un tip special de proces stohastic.

Un proces stohastic $X(t)$, în general, este un număr infinit de variabile aleatoare indexate prin timpul t .

Se consideră un proces stohastic $X(t)$ care ia valori dintr-o mulțime (numită spațiul stărilor) de entități discrete. Se va utiliza pentru spațiul stărilor o submulțime a numerelor întregi $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Procesul stohastic $X(t)$ este numit Markov dacă:

$$\text{Prob}\{X(t_n) = j \mid X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = \text{Prob}\{X(t_n) = j \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\},$$

pentru fiecare $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$.

Dacă $X(t) = i$, pentru un anumit t și i , se spune că lanțul este în starea i la momentul t . În cele ce urmează se vor considera lanțuri Markov cu stări discrete pentru care timpul este real și pozitiv ($0 \leq t < \infty$), iar $X(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Proprietatea Markov înseamnă că pentru determinarea traiectoriei viitoare a lanțului (valorile viitoare $X(t)$) este suficientă cunoașterea stării prezente.

Independența stării viitoare a lanțului Markov de totalitatea istoriei sale anterioare este deosebit de importantă pentru analiza proceselor stohastice.

Comportamentul probabilistic al unui lanț Markov are o descriere simplă. Odată ce lanțul Markov a ajuns într-o stare oarecare i , acesta va rămâne în această stare pentru un timp care are distribuție exponențială cu parametrul λ_i .

Aceasta implică o viteză constantă λ_i a părăsirii stării i .

Probabilitatea ca, atunci când lanțul Markov părăsește starea i , să ajungă în starea j (cu $i \neq j$) se notează prin p_{ij} ($\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$).

Viteza de tranziție din starea i în starea j este:

$$\lambda_{ij} = p_{ij}\lambda_i \left(\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i \right).$$

Se notează, în general, prin $P_i(t)$ probabilitatea ca procesul să fie în starea i la momentul t , dată fiind startarea acestuia din starea i_0 la momentul $t = 0$.

Pentru un anumit moment de timp t și pentru o stare dată i și pentru un foarte scurt interval de timp Δt , lanțul va fi în starea i la momentul $t + \Delta t$, într-unul din următoarele cazuri:

1. Lanțul a fost în starea i la momentul t și nu a tranzitat într-o altă stare pe durata intervalului de timp Δt .
Acest eveniment are probabilitatea $P_i(t)(1 - \lambda_i\Delta t)$ la care se adaugă, posibil, termeni în Δt^2 .
2. Lanțul a fost în starea j la momentul t ($j \neq i$) și a tranzitat din starea j în starea i pe durata intervalului de timp Δt .
Acest eveniment are probabilitatea $P_j(t)\lambda_{ji}\Delta t$ la care se adaugă, posibil, termeni în Δt^2 .

Probabilitatea efectuării mai multor tranziții pe durata intervalului de timp Δt este neglijabilă (este de ordinul Δt^2) dacă intervalul de timp Δt este suficient de mic. Astfel, pentru un interval scurt de timp Δt ,

$$P_i(t + \Delta t) \approx P_i(t)(1 - \lambda_i\Delta t) + \sum_{j \neq i} P_j(t)\lambda_{ji}\Delta t.$$

Această aproximație devine mai precisă atunci când intervalul de timp considerat Δt tinde spre zero, $\Delta t \rightarrow 0$ și rezultă:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda_i P_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j(t),$$

Deoarece $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i$, relația anterioară se rescrie astfel:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j(t)$$

Acest set de ecuații diferențiale (pentru $i = 0, 1, 2, \dots$) poate fi soluționat utilizând condițiile $P_{i_0} = 1$ și $P_j(0) = 0$ pentru $j \neq i_0$ (deoarece i_0 este starea inițială a lanțului Markov).

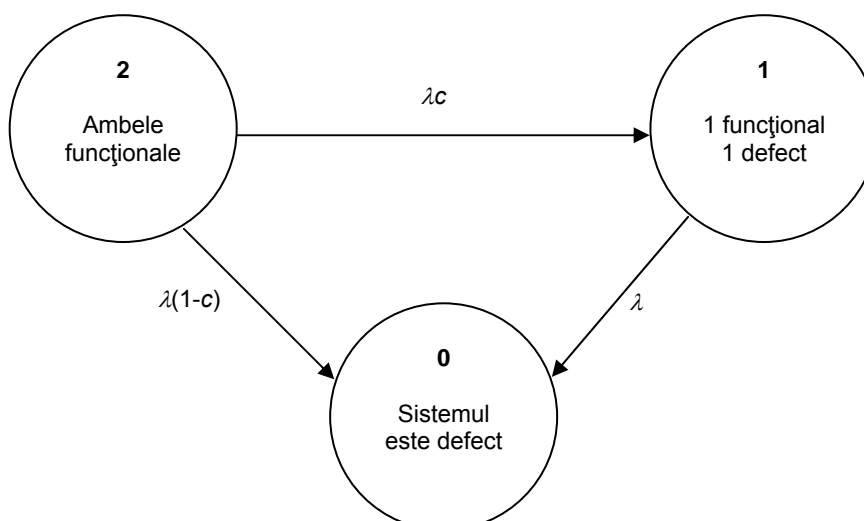


Figura 1. Modelul Markov al unui sistem duplex cu un procesor activ și unul în rezervă.

Se consideră, spre exemplu, un sistem duplex care are un singur procesor activ și un singur procesor de rezervă, în așteptare. Procesorul de rezervă este conectat numai atunci când s-a detectat o eroare în procesorul activ.

Fie λ viteza, fixă, de defectare a unui procesor atunci când acesta este activ și fie c factorul de acoperire. Modelul Markov al acestui sistem este prezentat în figura 1.

Deoarece întregii atribuiri diferitelor stări sunt, în general, arbitrari aceștia pot fi asociați unei semnificații pentru sistemul modelat.

Starea reprezintă numărul de procesoare funcționale (0, 1, sau 2 procesoare funcționale - în starea inițială fiind două procesoare funcționale).

Ecuatiile diferențiale care descriu acest lanț Markov sunt:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_2(t)}{dt} &= -\lambda P_2(t) \\
 \frac{dP_1(t)}{dt} &= \lambda c P_2(t) - \lambda P_1(t) \\
 \frac{dP_0(t)}{dt} &= \lambda(1-c)P_2(t) + \lambda P_1(t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Soluționarea sistemului (1) cu condițiile inițiale $P_2(0) = 1$, $P_1(0) = P_0(0) = 0$, conduce la expresiile probabilităților celor trei stări:

$$\begin{aligned}
 P_2(t) &= e^{-\lambda t}, \\
 P_1(t) &= c\lambda t e^{-\lambda t}, \\
 P_0(t) &= 1 - P_2(t) - P_1(t).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Fiabilitatea sistemului duplex considerat are expresia:

$$\begin{aligned} R_{duplex}(t) &= 1 - P_0(t), \\ R_{duplex}(t) &= P_2(t) + P_1(t), \\ R_{duplex}(t) &= e^{-\lambda t} + c\lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Un alt sistem duplex care este imediat analizabil prin modelul lanțurilor Markov este cel care are o viteză constantă de defectare λ dar și o viteză constantă de reparație μ .

Modelul Markov al acestui sistem este prezentat în figura 2.

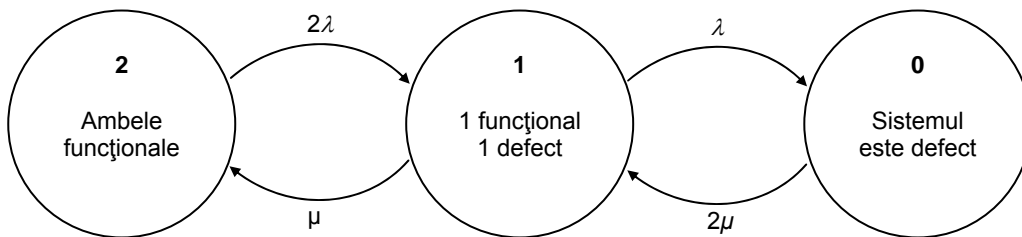


Figura 2. Modelul Markov al unui sistem duplex cu reparație.

Similar cazului anterior starea din acest lanț Markov este reprezentată prin numărul de procesoare funcționale.

Ecuțiile diferențiale care descriu acest lanț Markov sunt descrise prin sistemul (4):

$$\begin{aligned} \frac{dP_2(t)}{dt} &= -2\lambda P_2(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= 2\lambda P_2(t) + 2\mu P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= \lambda P_2(t) - 2\mu P_0(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Soluția sistemului (4) cu condițiile inițiale $P_2(0) = 1$, $P_1(0) = P_0(0) = 0$, arată astfel:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2} e^{-2(\lambda + \mu)t}, \\ P_1(t) &= \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{2\lambda(\lambda - \mu)}{(\lambda + \mu)^2} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{2\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2} e^{-2(\lambda + \mu)t}, \\ P_0(t) &= 1 - P_1(t) - P_2(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Se poate remarca faptul că s-au determinat doar expresiile pentru $P_1(t)$ și $P_2(t)$.

Prin utilizarea condiției de însumare a celor trei probabilități s-a determinat și cea de-a treia probabilitate ($P_0(t)$). Prin această metodă se reduce cu o unitate numărul de ecuații diferențiale care trebuiesc rezolvate.

Este de reținut faptul că sistemul acesta nu se defectează complet niciodată.

Redevine operațional după ce a stat un timp în starea 0, și după ce s-a reparat revine în funcțiune.

Pentru sistemele cu reparare calculul disponibilității este mai semnificativ, mai important, decât calculul fiabilității.

Disponibilitatea sau probabilitatea ca sistemul să fie operațional la momentul t este:

$$A(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (6)$$

Deoarece în cele mai multe din cazuri procesoarele sunt reparate atunci când s-au defectat amândouă, disponibilitatea pe termen lung a sistemului duplex este mult mai relevantă decât fiabilitatea aceluiași sistem.

Pentru calculul acesteia trebuie determinate $P_2(\infty)$, $P_1(\infty)$ și $P_0(\infty)$.

Acestea probabilități pot fi obținute prin trecerea la limită a variabilei t în expresiile corespunzătoare sau prin anularea tuturor derivatelor din sistemul (5) și soluționând sistemul de ecuații rezultat.

$$A = P_2(\infty) + P_1(\infty) = \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}, \quad (7)$$

$$A = \frac{\mu(\mu + \lambda)}{(\lambda + \mu)^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$