Seminar 10 - TS

Analiza stabilității SRA folosind criteriul Nyquist

Aplicație 1

Fie sistemul de reglare automată (SRA) la care partea fixată are funcția de transfer: $H(s) = \dfrac{5s^2+2s+1}{s(s-1)^2}$ iar compensatorul dinamic este $H_c(s) = K_c > 0$

Să se analizeze stabilitatea SRA utilizând criteriul Nyquist general (cu formularea bazată pe numărul de înconjurări)

Rezolvare

Pas 1: Trasarea completă a hodografului

Funcția de transfer din buclă:

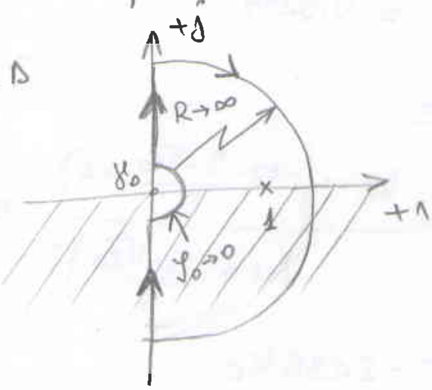
$$H_b(s) = H_c(s)\cdot H(s) = \frac{K_c(5s^2+2s+1)}{s(s-1)^2}$$

Discuția stabilității se face în raport cu K_c!

a) polii lui $H_b(s)$

$p_1 = 0$, $p_{2,3} = 1$

Planul s



Datorită simetriei, se va analiza doar planul de sus

Se transformă conturul Nyquist pe porțiuni

b1) axa imaginară

$s = j\omega$, $\omega \in (0,\infty)$

$$H_b(j\omega) = \frac{K_c(1-5\omega^2+j\cdot 2\omega)}{j\omega(-1+j\omega)^2} = \frac{K_c(1-5\omega^2+2j\omega)(-j)(-1-j\omega)^2}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

$$K_c[2\omega + j(5\omega^2-1)](1-\omega^2+j\cdot 2\omega)$$

$$U_b(\omega) = \frac{K_c(2\omega - 2\omega^3 - 10\omega^3 + 2\omega)}{\omega(1+\omega^2)^2} = \frac{K_c(-12\omega^2+4)}{(1+\omega^2)^2}$$

$$V_b(\omega) = \frac{K_c(5\omega^2 - 1 - 5\omega^4 + \omega^2 + 4\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2} = \frac{K_c(-5\omega^4 + 10\omega^2 - 1)}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

ω	0	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{20}}{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}$	$+\infty$
U_b	$4K_c$	$2.236K_c$	0	$-2.236K_c$	0_-
V_b	$-\infty$	0	$\sqrt{3}K_c$	0	0_-

i) intersecția cu axele:

- $U_b(\omega) = 0 \Rightarrow -12\omega^2 + 4 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$V_b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{K_c\left(-\frac{5}{9} + \frac{10}{3} - 1\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{3}K_c \cdot \frac{16}{16} =$$

$$= K_3\sqrt{3}$$

- $V_b(\omega) = 0 \Rightarrow 5\omega^4 - 10\omega^2 + 1 = 0$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-5}}{5} = \frac{5 \pm \sqrt{20}}{5}$$ → ambele valori sunt pozitive ⇒ rămân valabile

$$\Rightarrow \omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{20}}{5}} \simeq 0.3249$$

$$\omega_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}$$

$$U_b\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{20}}{5}}\right) = \frac{K_c \cdot \left(-12 \cdot \frac{5-\sqrt{20}}{5} + 4\right)}{\left(1 + \frac{5-\sqrt{20}}{5}\right)^2} \simeq 2.236K_c$$

$$U_b\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}\right) \simeq -2.236K_c$$

b2) conturul din jurul polilor: γ_0

$$\gamma_0: s = \rho_0 \cdot e^{j\alpha}, \quad \rho_0 \to 0$$

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$H_d(s)\Big| \quad K_c \quad M e^{j\beta} \to \quad M \to \infty$$

Pas2: Interpretarea stabilității

Avem 2 poli în interiorul conturului Nyquist ($p_{2,3}$)

$\Rightarrow P_{NYQ} = 2$

Conform teoremei $\rightsquigarrow$ hodograful trebuie să înconjoare de 2 ori punctul critic $(1,0)$

Studiu în funcție de K_c

- dacă se reduce K_c $\Rightarrow$ toată caracteristica hodograf se comprimă în jurul originii, dar forma caracteristicii se păstrează
- dacă K_c crește $\Rightarrow$ caracteristica hodograf se expandează

a) "$\wedge\wedge\wedge\wedge$" $\quad -1 < -2.236 K_c \Leftrightarrow 0 < K_c < \frac{1}{2.236}$

Nr. de rotații $= 0 \Rightarrow$ SRA instabil

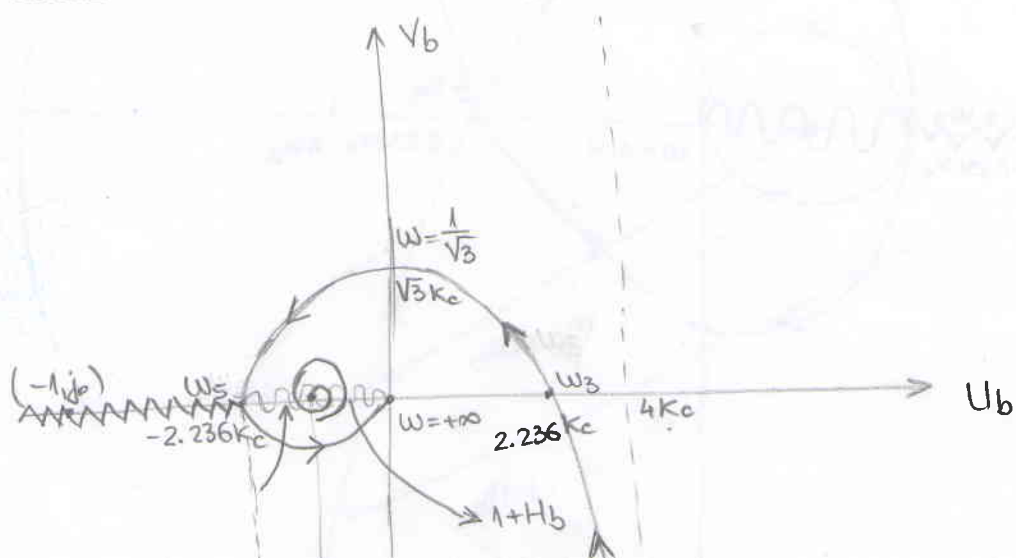
b) "$\sim\sim\sim\sim$" $\quad -2.236 K_c < -1 \Leftrightarrow K_c > \frac{1}{2.236}$

2 rotații în sens trigonometric $\Rightarrow$ SRA stabil

Aplicatie2 :

Să se reia studiul stabilității SRA din aplicatia 1, folosind criteriul Nyquist ptr. pulsații pozitive. Discuție după K_c pozitiv

Rezolvare : Se trasează hodograful ptr. pulsații pozitive. Tendințele asimptotice ale caracteristicii trebuie evidențiate corect



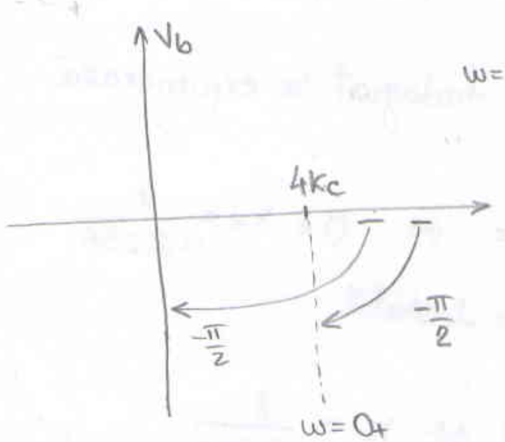
$b_3)$ conturul de la infinit

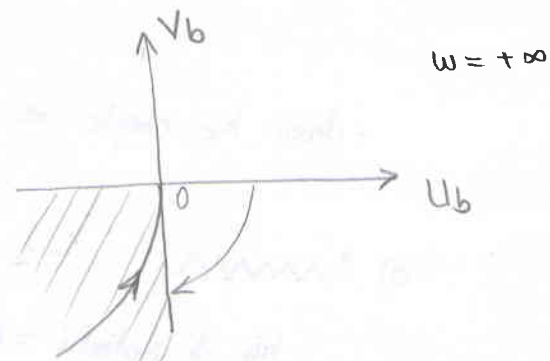
$$\Gamma : s = R\cdot e^{j\theta}, \quad R \to \infty, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$$

$$H_b(s)\Big|_{s\in\Gamma} \simeq \frac{5K_c R^2 e^{j2\theta}}{R^3 \cdot e^{j3\theta}} = \frac{5K_c}{R\cdot e^{j\theta}} = N\cdot e^{j\varphi} \Rightarrow N = \frac{5}{R} \to 0$$

$$\varphi = -\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

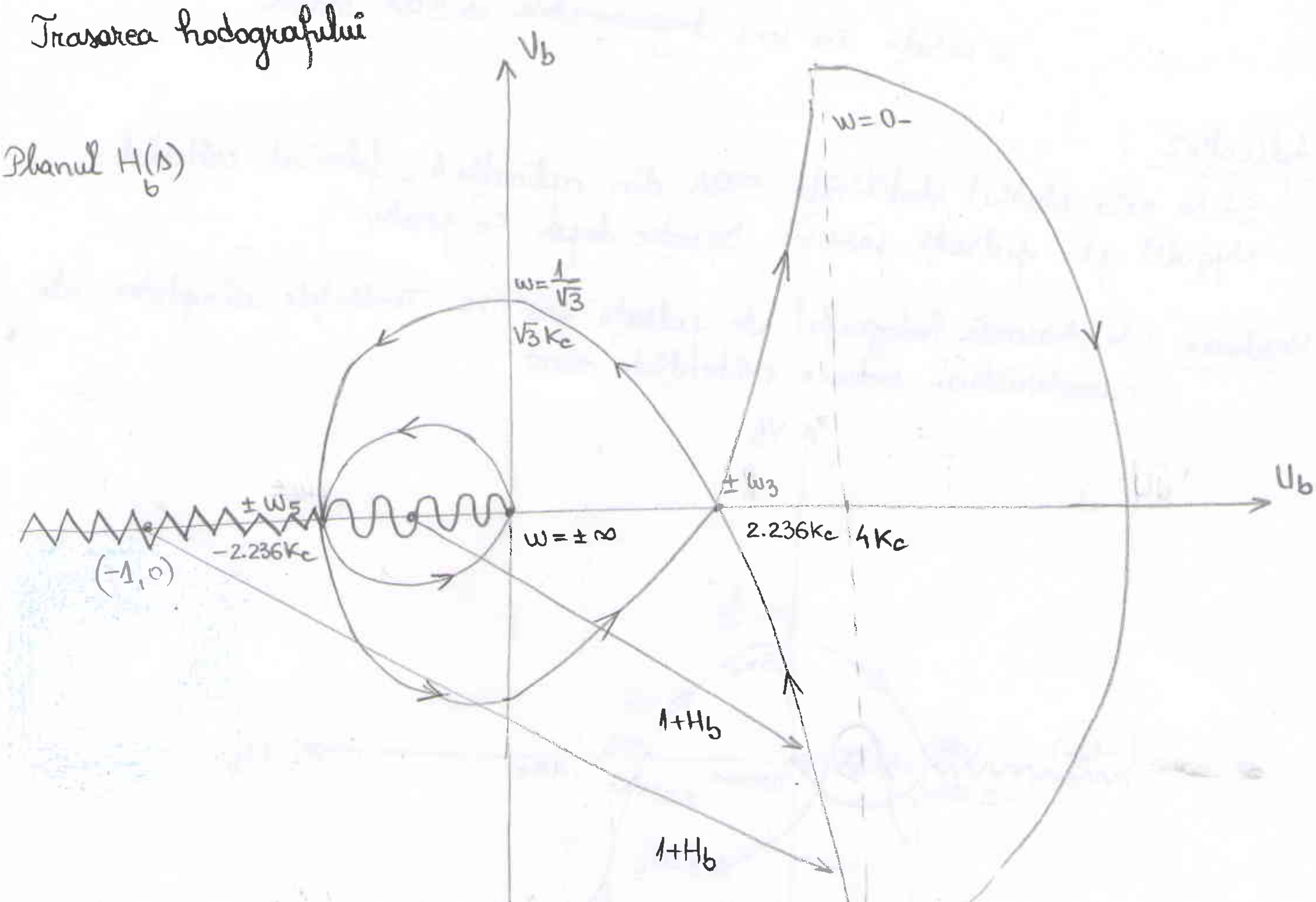
$$\Delta\varphi = \pi \quad (+)$$





Trasarea hodografului

Planul $H_b(s)$



Interpretarea stabilității:

$$P_{NYQ} = 2$$

$$q = q_0 = 1$$

Strict stabilitatea reclamă o variație de comportament

$$\Delta = \frac{\pi}{2}\left(2P_{NYQ} + q\right) = \frac{5\pi}{2}$$

a) " "

$$\Delta r = \frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \text{SRA instabil}$$

$$-1 < -2.236\,k_c \Rightarrow 0 < k_c < \frac{1}{2.236}$$

b) " "

$$-2.236\,k_c < -1 \Rightarrow k_c > \frac{1}{2.236}$$

$$\Delta r = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \text{SRA stabil}$$

! La examen, dacă vi se dă analiza stabilității unui SRA folosind crit. Nyquist, se poate folosi oricare dintre cele 2 abordări prezentate în seminar. Personal, cred că a doua abordare este mai ușoară.