Seminar 3
Discretizarea funcțiilor continue

Problema 1

Se dă funcția $f: R \to R$,

$$f(t) = (4 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se discretizeze funcția folosind transformata Laplace.

Rezolvare

Se va face trecerea:

$$f(t) \xrightarrow{\text{transformata Laplace}} f(s) \xrightarrow{\text{discretizare}} f_d(z) = \sum_{\text{polii } f(s)} \text{rez}\left[f(s) \cdot \frac{z}{z - e^{sh}}\right]$$

Se aplica transformata Laplace şi se obţine:

$$f(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{4s^2 + 17s + 17}{(s+1)(s+2)^2}$$

Acum se poate calcula $f_d(z)$:

$$f_d(z) = \sum_{\text{polii } f(s)} \text{rez}\left[f(s) \cdot \frac{z}{z - e^{sh}}\right]$$

$$f_d(z) = \sum_{\substack{p1=-1,\ m1=1 \\ p2=-2,\ m2=2}} \text{rez}\left[\frac{4s^2 + 17s + 17}{(s+1)(s+2)^2} \cdot \frac{z}{z - e^{sh}}\right]$$

Se calculează separat $\text{rez}_1[\ ]$ și $\text{rez}_2[\ ]$:

$$\text{rez}_1[\ ] = \lim_{s \to -1} \frac{1}{0!}\left[(s+1) \cdot \frac{4s^2 + 17s + 17}{(s+1)(s+2)^2} \cdot \frac{z}{z - e^{sh}}\right]$$

$$\text{rez}_1[\ ] = \frac{4 - 17 + 17}{1} \cdot \frac{z}{z - e^{-h}} = 4\ \frac{z}{z - e^{-h}}$$

$$\text{rez}_2[\ ] = \lim_{s \to -2} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2 \cdot \frac{4s^2 + 17s + 17}{(s+1)(s+2)^2} \cdot \frac{z}{z - e^{sh}}\right]$$

$$\text{rez}_2[\ ] = \lim_{s \to -2} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[\frac{z(4s^2 + 17s + 17)}{(s+1)(z - e^{sh})}\right]$$

$$\mathrm{rez}_2[\ ] = \lim_{s\to -2} \frac{1}{1!}\left[\frac{z(8s+17)(s+1)\left(z-e^{sh}\right) - z(4s^2+17s+17)\left(z-e^{sh}-h(s+1)e^{sh}\right)}{(s+1)^2(z-e^{sh})^2}\right]$$

$$\mathrm{rez}_2[\ ] = \frac{z(-16+17)(-1)\left(z-e^{-2h}\right) - z(16-17)\left(z-e^{-2h}-h(-1)e^{-2h}\right)}{(z-e^{-2h})^2}$$

$$\mathrm{rez}_2[\ ] = \frac{-z\left(z-e^{-2h}\right) + z\left(z-e^{-2h}+he^{-2h}\right)}{(z-e^{-2h})^2}$$

$$\mathrm{rez}_2[\ ] = h \cdot \frac{z}{(z-e^{-2h})^2} \cdot e^{-2h}$$

$$f_d(z) = \mathrm{rez}_1[\ ] + \mathrm{rez}_2[\ ] = 4 \cdot \frac{z}{z-e^{-h}} + h \cdot \frac{z}{(z-e^{-2h})^2} \cdot e^{-2h}$$

Problema 2

Se dă funcția $f: R \to R$,

$$f(t) = (4 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se calculeze transformata Z a funcției discretizate.

Indicație: Trebuie să se obțină același rezultat ca în problema 1, având în vedere faptul că se dorește discretizarea aceleeași funcții.

Rezolvare

Se va face trecerea:

$$f(t) \xrightarrow{\text{discretizare}} f_d(k) = f(kh) \xrightarrow{\text{tranformata Z}} f_d(z)$$

Funcția discretizată cu pasul $h > 0$ este $f_d: N \to R$, având forma:

$$f_d(k) = f(kh) = 4 \cdot e^{-kh} + k \cdot h \cdot e^{-2kh}, k \in N$$

$$f_d(k) = 4 \cdot \left(e^{-h}\right)^k + C_k^1 \cdot h \cdot \left(e^{-2h}\right)^k$$

$$f_d(k) = 4 \cdot \left(e^{-h}\right)^k + h \cdot C_k^1 \cdot \left(e^{-2h}\right)^{k-1} \cdot e^{-2h}$$

Acum se poate calcula direct $f_d(z)$ cu ajutorul transformatei Z:

$$f_d(z) = Z[f_d(k)] = 4 \cdot \frac{z}{z-e^{-h}} + h \cdot \frac{z}{(z-e^{-2h})^2} \cdot e^{-2h}$$

Problema 3

Se dă funcția $f: R \to R$,

$$f(t) = e^{2t}(3\sin 2t - \cos 2t) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se discretizeze funcția folosind transformarea Laplace.

Rezolvare

Se va face trecerea:

$$f(t) \xrightarrow{\text{transformata Laplace}} f(s) \xrightarrow{\text{discretizare}} f_d(z) = \sum\nolimits_{\text{polii } f(s)} \text{rez}\left[f(s) \cdot \frac{z}{z-e^{sh}}\right]$$

Se aplica transformata Laplace şi se obţine:

$$f(s) = \frac{6}{(s-2)^2+4} - \frac{s-2}{(s-2)^2+4} = \frac{8-s}{s^2-4s+8}$$

Acum se poate calcula $f_d(z)$:

$$f_d(z) = \sum_{\text{polii } f(s)} \text{rez}\left[f(s) \cdot \frac{z}{z-e^{sh}}\right]$$

$$f_d(z) = \sum_{\substack{p1=2+2j,\ m1=1 \\ p2=2-2j,\ m2=1}} \text{rez}\left[\frac{8-s}{s^2-4s+8} \cdot \frac{z}{z-e^{sh}}\right]$$

Se calculează separat $\text{rez}_1[\ ]$ și $\text{rez}_2[\ ]$:

$$\text{rez}_1[\ ] = \lim_{s\to 2+2j} \frac{1}{0!}\left[(s-2-2j) \cdot \frac{8-s}{(s-2-2j)(s-2+2j)} \cdot \frac{z}{z-e^{sh}}\right]$$

$$\text{rez}_1[\ ] = \frac{-(3j+1)z}{2(z-e^{2h}\cdot\cos 2h - j\cdot e^{2h}\cdot\sin 2h)}$$

$$\text{rez}_2[\ ] = \lim_{s\to 2-2j} \frac{1}{0!}\left[(s-2+2j) \cdot \frac{8-s}{(s-2-2j)(s-2+2j)} \cdot \frac{z}{z-e^{sh}}\right]$$

$$\text{rez}_2[\ ] = \frac{(3j-1)z}{2(z-e^{2h}\cdot\cos 2h + j\cdot e^{2h}\cdot\sin 2h)}$$

Sau se poate calcula direct:

$$\text{rez}_1[\ ] + \text{rez}_2[\ ] = 2\text{Re}\,[\text{rez}_1] = \frac{\left(6\cdot e^{2h}\cdot\sin 2h - 2z + 2\cdot e^{2h}\cdot\cos 2h\right)z}{2\left(z^2 - 2z\cdot\cos 2h\cdot e^{2h} + e^{4h}\right)}$$

$$f_d(z) = rez_1[\ ] + rez_2[\ ] = \frac{z\left(-z + e^{2h}(3 \cdot \sin 2h + \cos 2h)\right)}{z^2 - 2z \cdot \cos 2h \cdot e^{2h} + e^{4h}}$$

Problema 4

Se dă funcția $f: R \to R$,

$$f(t) = e^{2t}(3\sin 2t - \cos 2t) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se calculeze transformata Z a funcției discretizate.

Indicație: Trebuie să se obțină același rezultat ca în problema 1, având în vedere faptul că se dorește discretizarea aceleeași funcții.

Rezolvare

Se va face trecerea:

$$f(t) \xrightarrow{\text{discretizare}} f_d(k) = f(kh) \xrightarrow{\text{tranformata Z}} f_d(z)$$

Funcția discretizată cu pasul $h > 0$ este $f_d: N \to R$, având forma:

$$f_d(k) = f(kh) = e^{2kh}(3\sin 2kh - \cos 2kh), k \in N$$

Se poate calcula direct $f_d(z)$ cu ajutorul transformatei Z:

$$f_d(z) = Z[f_d(k)] = 3 \cdot \frac{z \cdot e^{2h} \cdot \sin 2h}{z^2 - 2z \cdot \cos 2h \cdot e^{2h} + e^{4h}} - \frac{z(z - e^{2h} \cdot \cos 2h)}{z^2 - 2z \cdot \cos 2h \cdot e^{2h} + e^{4h}}$$

$$f_d(z) = Z[f_d(k)] = \frac{3 \cdot z \cdot e^{2h} \cdot \sin 2h - z^2 + z \cdot e^{2h} \cdot \cos 2h}{z^2 - 2z \cdot \cos 2h \cdot e^{2h} + e^{4h}}$$

Probleme propuse

Se dă funcția $f\colon R \to R$,

$$f(t) = (t^2 + 2t + 3) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se determine $f_d(z)$ prin cele două metode prezentate.

Observații

În cadrul problemelor, s-au folosit formulele transformatelor Laplace și *Z*, formula lui Euler precum și proprietățile de paritate/imparitate ale semnalelor armonice *sin* și *cos*.