Proiectarea Algoritmilor 2011-2012

Laborator 7

Aplicații DFS

Cuprins

1 Obiective laborator

- Întelegerea noţiunilor teoretice:
  - tare conexitate, componente tare conexe
  - punct de articulaţie
  - punţi
  - componente biconexe
- Înţelegerea algoritmilor ce rezolvă aceste probleme şi implementarea acestor algoritmi.

2 Importanţă – aplicaţii practice

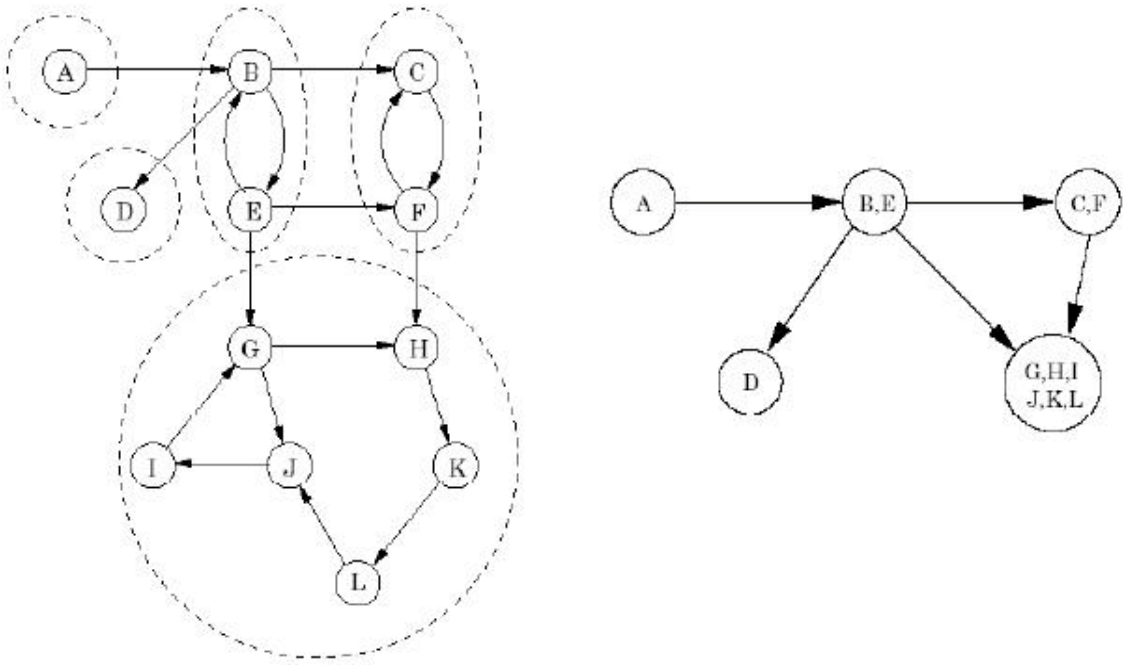
- Componentele biconexe au aplicaţii importante în reţelistică, deoarece o componentă biconexă asigură redundanţa.
- Tare conexitate: problema 2-SAT.
- Descompunerea în componente tare conexe: data mining, compilatoare, calcul ştiinţific.

3 Noţiuni teoretice

Tare conexitate. Un graf orientat este tare conex, dacă oricare ar fi două vârfuri `u` şi `v`, ele sunt tare conectate (strongly connected) - există drum atât de la `u` la `v`, cât şi de la `v` la `u`.

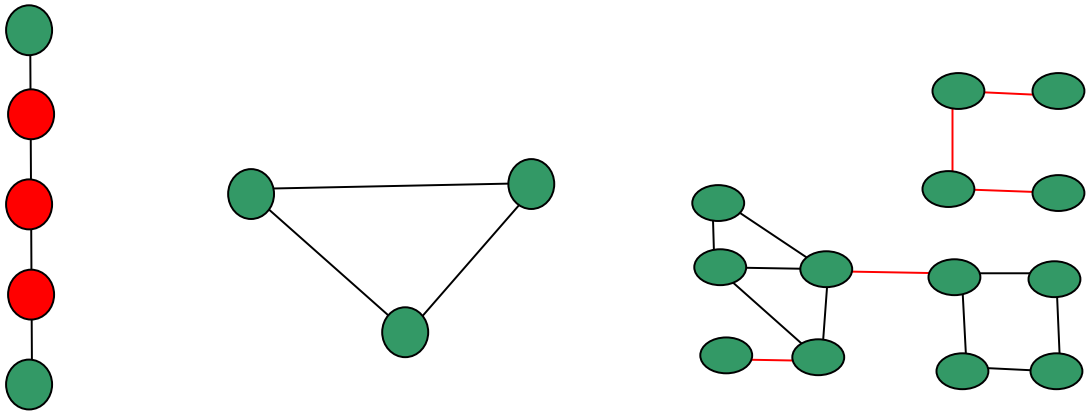
O componentă tare conexă este un subgraf maximal tare conex al unui graf orientat, adică o submulţime de vârfuri `U` din `V`, astfel încât pentru orice `u` şi `v` din `U` ele sunt tare conectate. Dacă fiecare componentă tare conexă este redusă într-un singur nod, se va obţine un graf orientat aciclic.

De exemplu:



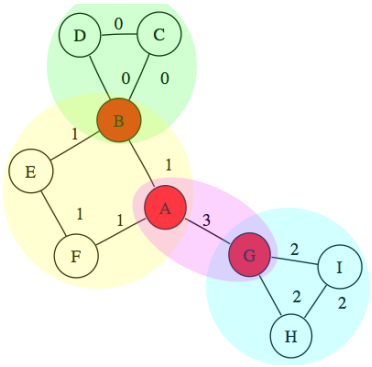
Un punct de articulaţie (cut vertex) este un nod al unui graf a cărui eliminare duce la creşterea numărului de componente conexe ale unui acelui graf.

O punte (bridge) este o muchie a unui graf (se mai numeşte şi muchie critică) a cărei eliminare duce la creşterea numărului de componente conexe ale acelui graf.



Biconexitate. Un graf biconex este un graf conex cu proprietatea că eliminând oricare nod al acestuia, graful rămâne conex.

O componentă biconexă a unui graf este o mulţime maximală de noduri care respectă proprietatea de biconexitate.



4 Componente tare conexe

Vom porni de la definiţie pentru a afla componenta tare conexă din care face parte un nod `v`. Vom parcurge graful (DFS sau BFS) pentru a găsi o mulţime de noduri `S` ce sunt accesibile din `v`. Vom parcurge apoi graful transpus (obţinut prin inversarea muchiilor din graful iniţial), determinând o nouă mulţime de noduri `T` ce sunt accesibile din `v` în graful transpus. Intersecţia dintre `S` şi `T` va fi reprezenta componenta tare conexa. Graful iniţial şi cel transpus au aceleaşi componente conexe.

4.1 Algoritmul lui Kosaraju

Algoritmul foloseşte două DFS (una pe graful iniţial şi una pe graful transpus) şi o stivă pentru a reţine ordinea terminării parcurgerii nodurilor grafului original (evitând astfel o sortare a nodurilor după acest timp la terminarea parcurgerii).

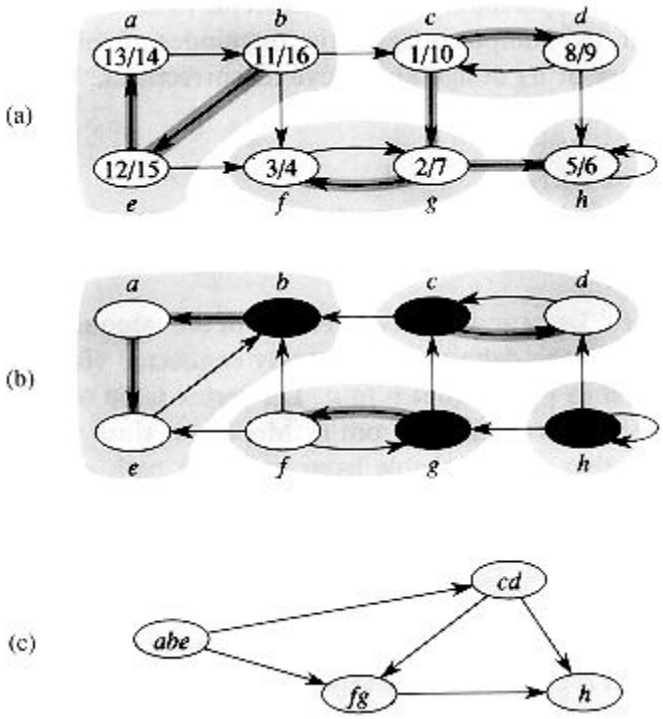
```
ctc(G = (V, E))
      S <- stiva vida
      culoare[1..n] = alb
      cat timp exista un nov v din V care nu e pe stiva
            dfs(G, v)
```

```
      culoare[1..n] = alb
      cat timp S != stiva vida
            v = pop(S)
            dfsT(GT, v) /* toate nodurile ce pot fi vizitate din v fac
parte din ctc; dupa vizitare, aceastea sunt scoase din S si din G */

dfs(G, v)
      culoare[v] = gri
      pentru fiecare (v, u) din E
            daca culoare[u] == alb
                  dfs(u)
      push(S, v) // nodul este terminat de expandat, este pus pe stiva
      culoare[v] = negru

dfsT(G, v) - similar cu dfs(G, v): fara stiva, dar cu retinerea solutiei
```

Complexitate: `O(|V| + |E|)`



4.2 Algoritmul lui Tarjan

Algoritmul foloseşte o singură parcurgere DFS şi o stivă. Ideea de bază a algoritmului este că o parcurgere în adâncime porneşte dintr-un nod de start. Componentele tare conexe formează subarborii arborelui de căutare, rădăcinile cărora sunt de asemenea rădăcini pentru componentele tare conexe.

Nodurile sunt puse pe o stivă, în ordinea vizitării. Când parcurgerea termină de vizitat un subarbore, nodurile sunt scoase din stivă şi se determină pentru fiecare nod dacă este rădăcina unei component tare conexe. Dacă un nod este rădăcina unei componente, atunci el şi toate nodurile scoase din stivă înaintea lui formează acea component tare conexă.

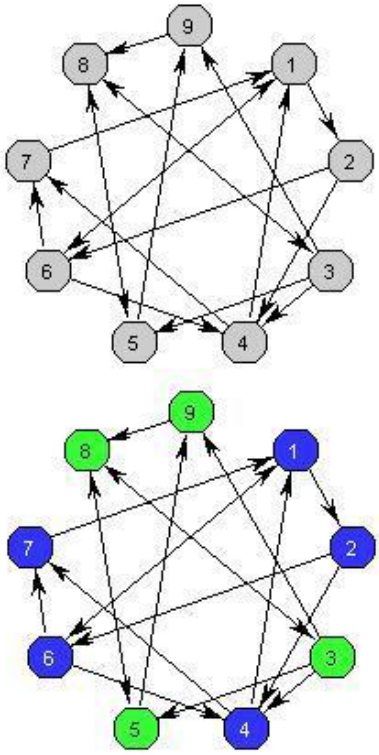
Cea mai importantă parte este să determinăm dacă un nod este sau nu rădăcina unei componente tare conexe. Pentru a face asta, fiecărui nod i se atribuie un index în urma parcurgerii în adâncime (`idx[v]`), ce numără nodurile în ordinea în care sunt descoperite.

În plus, pentru fiecare nod se ţine şi o valoare `lowlink[v] = min { idx[u] | u este accesibil din v }`. Prin urmare, v este rădăcina unei componente tare conexe dacă şi numai dacă `lowlink[v] = idx[v]`. `lowlink[v]` se calculează în timpul parcurgerii în adâncime.

```
ctc_tarjan(G = (V, E))
      index = 0
      S = stiva vida
      pentru fiecare v din V
            daca (idx[v] nu e definit) // nu a fost vizitat
                  tarjan(G, v)

tarjan(G, v)
      idx[v] = index
      lowlink[v] = index
      index = index + 1
      push(S, v)
      pentru (v, u) din E
            daca (idx[u] nu e definit)
                  tarjan(G, u)
                  lowlink[v] = min(lowlink[v], lowlink[u])
            altfel
                  daca (u e in S)
                        lowlink[v] = min(lowlink[v], idx[u])
      daca (lowlink[v] == idx[v])
            // este v radacina unei CTC?
            print "O noua CTC: "
            repeat
                  u = pop(S)
                  print u
            until (u == v)
```

Complexitate: $O(|V| + |E|)$



	id	pre	low
1	1	0	10
2	1	1	10
3	2	5	10
4	1	2	10
5	2	6	10
6	1	4	10
7	1	3	10
8	2	7	10
9	2	8	10

5 Puncte de articulatie

Pentru determinarea punctelor de articulaţie într-un graf neorientat se foloseşte o parcurgere în adâncime modificată, reţinându-se informaţii suplimentare pentru fiecare nod. Fie T un arbore de adâncime descoperit de parcurgerea grafului. Atunci, un nod `v` este punct de articulaţie dacă:

- `v` este rădăcina lui `T` şi `v` are doi sau mai mulţi copii

sau

- `v` nu este rădăcina lui `T` şi are un copil `u` în `T`, astfel încât nici un nod din subarborele dominat de `u` nu este conectat cu un strămoş al lui `v` printr-o muchie înapoi (copii lui nu pot ajunge pe altă cale pe un nivel superior în arborele de adâncime).

Găsirea punctelor care se încadrează în primul caz este uşor de realizat.

Notăm: `d[v] = timpul de descoperire a nodului u low[v] = min { { d[v] } U { d[x] | (v, x) este o muchie înapoi de la un descendent v al lui u } }`

Pentru a putea găsi uşor punctele de articulaţie care se încadrează în cel de-al doilea caz se va calcula şi `low[v]` pentru fiecare vârf, în timpul parcurgerii în adâncime.

`v` va fi punct de articulaţie dacă şi numai dacă `low[u] ≥ d[v]`, pentru un copil `u` al lui `v` în `T`.

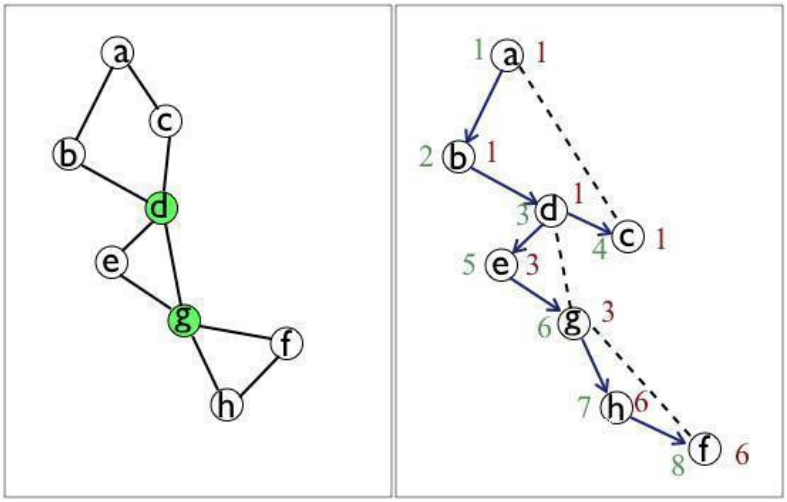
Funcţia `low` se poate calcula folosind relaţia de recurenţă:

```
low[u] = min( {d[u]} U { d[v] : (u, v) este o muchie înapoi } U
            { low[vi] : vi copil al lui v în arborele de adâncime} )
```

```
puncte_articulatie(G = (V, E))
      timp = 0
      pentru fiecare v din V
      daca (d[v] nu e definit)
            dfsCV(G, v)

dfsCV(G, v)
      d[v] = timp
      timp = timp + 1
      low[v] = d[v]
      copii = { } // multime vida
      pentru fiecare (v, u) din E
            daca (d[u] nu e definit)
                  copii = copii U {u}
                  dfsCV(G, u)
                  low[v] = min(low[v], low[u])
            altfel
                  low[v] = min(low[v], d[u])
      daca v radacina arborelui si |copii| >= 2
            v este punct de articulatie
      altfel
            daca (∃u ∈ copii) astfel incat (low[u] >= d[v])
                  v este punct de articulatie
```

Complexitate: $O(|V| + |E|)$



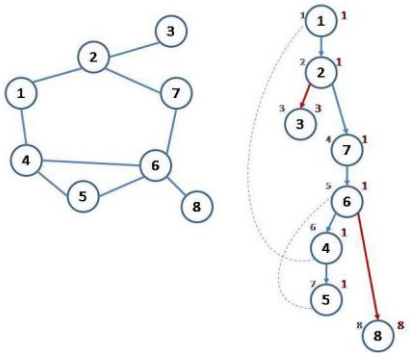
6 Punti

Pentru a determina muchiile critice se foloseşte tot o parcurgere în adâncime modificată, pornind de la următoarea observaţie: muchiile critice sunt muchiile care nu apar în niciun ciclu. Prin urmare, o muchie de întoarcere nu poate fi critică, deoarece o astfel de muchie închide întotdeauna un ciclu. Trebuie să verificăm pentru muchiile de avansare (în număr de `|V| - 1`) dacă fac parte dintr-un ciclu. Să considerăm că dorim să verificăm muchia de avansare `(v, u)`.

Ne vom folosi de `low[v]` (definit la punctul anterior): dacă din nodul `u` putem să ajungem pe un nivel mai mic sau egal cu nivelul lui `v`, atunci muchia nu este critică, în caz contrar ea este critică.

```
dfsB(G, v, parinte)
        d[v] = timp
        timp = timp + 1
        low[v] = d[v]
        pentru fiecare (v, u) din E
                daca u nu este parinte
                        daca d[u] nu este definit
                                dfsB(G, u, v)
                                low[v] = min(low[v], low[u])
                                daca (low[u] > d[v])
                                        (v, u) este muchie critica
                        altfel
                                low[v] = min(low[v], d[u])
```

Complexitate: `O(|V| + |E|)`



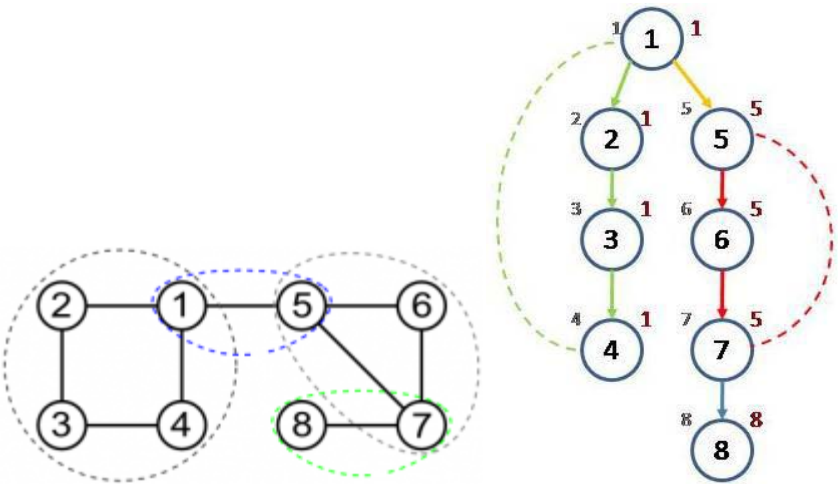
7 Componente biconexe

Împărţirea în componente biconexe nu introduce ca şi până acum (conexitate, tare conexitate) o partiţie a nodurilor grafului, ci o partiţie a muchiilor acestuia.

Se remarcă uşor că o component biconexă este o componentă care nu conţine puncte critice.

Astfel, pentru a determina componentele biconexe ale unui graf, vom adapta algoritmul de aflare a punctelor critice, reţinând şi o stivă cu toate muchiile de avansare şi de întoarcere parcurse până la un moment dat. La întâlnirea unui nod critic v se formează o nouă component biconexă pe care o vom determina extrăgând din stivă muchiile corespunzătoare. Nodul `v` este critic dacă am găsit un copil `u` din care nu se poate ajunge pe un nivel mai mic în arborele de adâncime pe un alt drum care foloseşte muchii de întoarcere (`low[u] >= d[v]`). Atunci când găsim un astfel de nod `u`, toate muchiile aflate în stivă până la muchia `(u, v)` inclusiv formează o nouă componentă biconexă.

Complexitate: `O(|V| + |E|)`



8 Concluzii

Algoritmul de parcurgere în adâncime poate fi modificat pentru calculul componentelor tare conexe, a punctelor de articulaţie, a punţilor şi a componentelor biconexe. Complexitatea acestor algoritmi va fi cea a parcurgerii: `O(|V| + |E|)`.

9 Referințe

[1] Introducere in Algoritmi, Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. – Capitolul 23 Algoritmi elementari pe grafuri

http://net.pku.edu.cn/~course/cs101/resource/Intro2Algorithm/book6/chap23.htm

[2] Wikipedia – Algoritmul lui Tarjan

http://en.wikipedia.org/wiki/Tarjan%27s_strongly_connected_components_algorithm

[3] Wikipedia – Algoritmul lui Kosaraju

http://en.wikipedia.org/wiki/Kosaraju%27s_algorithm

[4] Gazeta Informatică, Vol 10, nr. 3 – Introducere in teoria grafurilor

http://www.ginfo.ro/10_4/051.shtml