# Proiectarea Algoritmilor 2011-2012

Laborator 4

# Backtracking și optimizări

**Cuprins**



## 1 Obiective laborator

- Înțelegerea noțiunilor de bază legate de backtracking și optimizările aferente;
- Conștientizarea necesității îmbunătățirii versiunii simple de backtracking și beneficiile fiecărei abordări în parte;
- Familiarizarea atât cu problema satisfacerii constrângerilor, cât și cu metode prospective și cu euristici.

## 2 Importanţă – aplicaţii practice

Probleme rezolvabile prin backtracking presupun la nivelul cel mai general o căutare în spațiul stărilor. În plus, pentru a crea o analogie și mai puternică, majoritatea problemelor din Inteligență Artificială pot fi reduse la problema satisfacerii constrângerilor, iar metodele prospective, respectiv euristicile pot fi aplicate într-o multitudine de probleme, fiind în general valabile.

# 3 Descrierea problemei şi a rezolvărilor

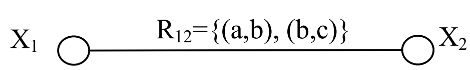
Pornind de la strategiile clasice de parcurgere a spațiului de stări, algoritmii de tip backtracking enumeră un set de candidați parțiali, care, după completarea definitivă, pot deveni soluții potențiale ale problemei inițiale. Exact ca strategiile de parcurgere în lățime/adâncime, backtracking-ul are la bază expandarea unui nod curent, iar determinarea soluției se face într-o manieră incrementală. Prin natura sa, BKT-ul este recursiv, iar în arborele expandat top-down se pot aplica operații de tipul prunning (tăiere) dacă soluția parțială nu este validă.

*Notațiile utilizate* sunt următoarele:

- $X_1, \ldots, X_N$ variabilele problemei, N fiind numărul de variabile ale problemei;
- $D_1, \ldots, D_N$ domeniile aferente fiecărei variabile;
- U - întreg care reprezintă indicele variabilei curent selectate pentru a i se atribui o valoare;
- F - vector indexat după indicii variabilelor, în care sunt memorate selecțiile de valori făcute de la prima variabila și până la variabila curentă

$$\text{Relatie}(U_1, \mathrm{F}[U_1], \mathrm{U}_2, \mathrm{F}[U_2]) = \begin{cases} true & daca\ exista\ R_{12}(F[U_1], F[U_2]] \\ false & altfel \end{cases}$$

*Reprezentarea grafică a unei relații* pentru două variabile $X_1$ și $X_2$ cu domeniul {a, b, c} este următoarea:




O versiune generică a algoritmului de backtracking recursiv poate fi următoarea:

```
BKT (U, F)
foreach V of XU
      F[U] ← V
      if Verifica (U,F) == true
      then
            if U < N
                  then BKT(U+1, F)
            else
                  Afişează valorile din vectorul F
                  break
Verifică (U,F)
      test = true
      I ← U - 1
      while I > 0
            test = Relaţie(I, F[I], U, F[U])
            I = I - 1
            if test == false
                  then break
      return test
```

**Complexitatea algoritmului: complexitatea temporală** este de **$O(B^d)$,** iar cea **spațială $O(d)$**, unde **B** este *factor de ramificare* (numărul mediu de stări posibil ulterioare în care nodul curent poate fi expandat) și **d** este *adâncimea soluției*.

Pornind de la versiunea inițială de BKT, putem aduce o **serie de îmbunătățiri** în următoarele direcții:

- **Algoritmi de îmbunătățire a consistenței reprezentării** care vizează consistența locală a arcelor sau a căilor în graful de restricții
- **Algoritmi hibrizi** care îmbunătățesc performanțele rezolvării prin reducerea numărului de teste; aici putem identifica următoarele subcategorii:
    - *Tehnici prospective:*
        - Căutare cu predicție completă
        - Căutare cu predicție parțială
        - Căutare cu verificare predictivă
    - *Tehnici retrospective:*
        - Backtracking cu salt
        - Backtracking cu marcare
- **Utilizarea euristicilor** în vederea optimizării numărului de teste prin luarea în considerare a următoarelor scenarii:
    - *Ordonarea variabilelor*
    - *Ordonarea valorilor*

Dintre metodele enumerate mai sus ne vom concentra asupra **CSP** (Constraint Satisfaction Problem) cu îmbunătățirea aferentă a consistenței reprezentării și asupra tehnicilor prospective, existând în cazul ambele cazuri o îmbunătățire sesizabilă la nivelul apelurilor recursive / al intrărilor în stivă.

## 3.1 *Problema satisfacerii constrângerilor*

Problema satisfacerii restricțiilor, în formularea cea mai generală, presupune existența unei mulțimi de variabile, unor domenii de valori potențiale pentru fiecare variabilă și o mulțime de restricții care specifică combinațiile de valori acceptabile ale variabilelor (exact conceptul de relații definite anterior, cu tot cu restricțiile aferente). ***Scopul final*** îl reprezintă determinarea unei atribuiri de valori pentru fiecare variabila astfel încât toate restricțiile să fie satisfăcute.

Problema satisfacerii restricțiilor este, în cazul general, o problema grea, deci **NP-completă**, exponențială în raport cu numărul de variabile ale problemei. Din perspectiva strategiilor de căutare într-un spațiu de stări, traducerea problemei ar fi următoarea: pornind din starea inițială a procesului care conține restricțiile identificate în descrierea inițială a problemei, se dorește atingerea unei stări finale care a fost restricționată "suficient" pentru a rezolva problema.

Pornind de la premisa că CSP este o problema de căutare din clasa problemelor NP, aspectul de interes al optimizării curente devine reducerea cât mai puternică a timpului / spațiului de căutare.

Fiind o problemă de căutare, rezolvarea problemei satisfacerii restricțiilor poate fi facută aplicând una din tehnicile de căutare a soluției în spațiul stărilor. Astfel, cea mai utilizată strategie de rezolvare a problemei CSP este backtracking-ul, variantă simplificată a căutării neinformate în adâncime. Aceasta strategie este preferată datorită economiei de spațiu atinse raportat la strategia de căutare în adâncime - $O(B*d)$ sau pe nivel – $O(B^d)$.

În fucție de particularizare și anume în funcție de necesitatea determinării unei soluții sau a tuturor soluțiilor, satisfacerea tuturor constrângerilor sau relaxarea unora, putem avea următoarele categorii:

- CSP totală
- CSP parțială
- CSP binară – graf de restricții

Pentru noi, în cazul studiului de față, problemele de tipul CSP binare care pot fi reprezentate printr-un graf de restricții sunt de interes.

Un **arc ($X_i$, $X_j$)** într-un graf de restricții orientat se numește ***arc-consistent*** dacă și numai dacă pentru orice valoare $x \in D_i$, domeniul variabilei $X_i$, există o valoare $y \in D_j$, domeniul variabilei $X_j$, astfel încât $R_{i,j}(x,y)$. **Graful de restricții orientat** rezultat se numește ***arc-consistent***.

O cale de lungime *m* prin nodurile $i_0,\ldots,i_m$ ale unui graf de restricții orientat se numește ***m-cale-consistentă*** dacă și numai dacă pentru orice valoare $x \in D_{i0}$, domeniul variabilei $i_0$ și o valoare $y \in D_{jm}$, domeniul variabilei $i_m$, pentru care $R_{i0,im}(x,y)$, există o secvență de valori $z_1 \in D_{i1} \ldots z_{m-1} \in D_{im-1}$ astfel încât $R_{i0,i1}(x,z_1), \ldots, R_{im-1,im}(z_{m-1},y)$. **Graful de restricții orientat** rezultat se numește ***m-arc-consistent***.

**Arc-consistența unui graf de restricții** se verifica folosind următorii algoritmi:

```
Verifică (Xk, Xm)
      delete = false
      foreach x ∈ Dk
            if nu există nici o valoare y ∈ Dm astfel încât Rk, m(x,y)
            then
            elimină x din Dk
            delete = true
      return delete
AC-1:
      Crează Q ← { (Xi, Xj) | (Xi, Xj) ∈ Mulţime arce, i≠j}
      repeat
            modificat = false
            foreach (Xi, Xj) ∈ Q
                  modificat = modificat or Verifică(Xk, Xm)
      until modificat==false
```

**AC-3:**

```
      Crează Q ← { (Xi, Xj) | (Xi, Xj) ∈ Multime arce, i≠j}
      while Q nu este vida
            Elimină din Q un arc (Xk, Xm)
            if Verifică(Xk, Xm)then
                  Q ← Q ∪ { (Xi, Xk) | (Xi, Xk)∈Multime arce, i≠k,m}
```

Pornind de la următoarele notații:

- N - numărul de variabile;
- a - cardinalitatea maximă a domeniilor de valori ale variabilelor;
- e - numărul de restricții.

complexitățile algoritmilor precedenți sunt următoarele:

- Algoritmului de realizare a arc-consistentei - *AC-1* are în cazul cel mai defavorabil complexitatea **O($a^2$*N*e)**
- Algoritmului de realizare a arc-consistentei - *AC-3*: complexitate timp este **O(e*$a^3$)**; complexitate spațiu: **O(e+N*a)**
- Algoritmului de realizare a arc-consistentei - *AC-4* care presupune o îmbunătățire a complexității în timp: **O(e*$a^2$)**
- Algoritmul de realizare a 2-cale-consistentei - *PC-4*: complexitate timp **O($N^3$*$a^3$)**

## 3.2 *Tehnici prospective*

Principiul este simplu: fiecare pas spre soluție nu trebuie să ducă la blocare. Astfel, la fiecare atribuire a variabilei curente cu o valoare corespunzătoare, toate variabilele sunt verificate pentru a depista eventuale condiții de blocare. Anumite valori ale variabilelor ne-instanțiate pot fi eliminate deoarece nu vor putea să facă parte din soluție niciodată.

Următorii algoritmi analizați implementează strategia de căutare neinformată cu realizarea unor grade diferite de k-consistență.

**Backtracking cu predicție completă**

```
Predicție(U, F, D)
      foreach L of D[U]
            F[U] ← L
            if U < N then
                  DNEW ← Verifică_Inainte (U, D[U], D)
                  if DNEW != null
                        then DNEW  ← Verifica _Viitoare (U, DNEW)
                  if DNEW != null
                        then Predictie (U+1, D, DNEW)
```

```
Verifica_Înainte (U, L, D)
      inițializează DNEW
      for U2 = U+1..N
            foreach L2 of D[U2]
                  if Relatie(U, L, U2, L2) == true
                        then introduce L2 in DNEW[U2]
            daca DNEW[U2] vidă
                  atunci return null
      return DNEW
```

```
Verifica_Viitoare (U, DNEW)
if U+1 < N then
      for U1 = U+1..N
            foreach L1 of DNEW[U1]
                  for U2 = U+1..N
                        foreach L2 of DNEW[U2]
                              if Relatie (U1, L1, U2, L2) == true
                              then break L2
                        if nu s-a gasit o valoare consistenta pentru U2
      then
                              elimina L1 din DNEW[U1]
                              break U2
            if DNEW[U1] vidă then return null
return DNEW
```

**Backtracking-ul cu predicție parțială** presupune modificarea doar a funcției Verifică_Viitoare din prisma domeniului de vizibilitate a variabilei $U_2$ care acum variază exclusiv de la $U_1$+1, nu direct de la U+1. Rezultatul imediat este înjumătățirea numărului de operații efectuate la nivelul funcției.

```
Verifica_Viitoare (U, DNEW)
      …
      for U1 = U+1..N
            foreach L1 of DNEW[U1]
                  for U2 = U1+1..N
                        foreach L2 of DNEW[U2]
                              …
```

**Backtracking-ul cu verificare predictivă** elimină apelul Verifica_Viitoare(U, DNEW) complet din funcția de Predicție

```
Predicție(U, F, D)
      …
            DNEW ← Verifică_Inainte (U, D[U], D)
            if DNEW != null
                  then DNEW  ← Verifica _Viitoare (U, DNEW)
            if DNEW != null
                  …
```

Discuția care se ridică imediat este *care dintre cele 3 metode este mai eficientă*? Părerile sunt împărțite în sensul că uneori costul rafinărilor ulterioare poate fi mai mare decât costul expandării efective a nodului curent, dar totodată se poate obține o reducere semnificativă a numărului de apeluri recursive prin eliminarea unor soluții neviabile. Certitudinea este că oricare dintre aceste metode reduce corespunzător numărul de intrări în stivă, dar trebuie luat în considerare în funcție de specificul problemei și costul operației de Verifica_Viitoare.

Un aspect important este că toate cele trei variante de tehnici prospective pot fi îmbunătățite prin introducerea de euristicii, lucru echivalent cu o reordonare dinamică a variabilelor la fiecare avans în căutare. Experimental, s-a dovedit că introducerea acestor euristici (ex. selecția următoarei variabile urmărind ca aceasta să aibă cele mai puține valori rămase în domeniul propriu) furnizează rezultate foarte bune.

### 3.3 Euristici

***Ordonarea variabilelor*** urmărește reordonarea variabilelor legate prin restricții explicite (specificate de mulțimea de restricții definită în problemă) astfel încât numărul de operații ulterioare să fie minim. Astfel sunt *preferate mai întâi variabilele care apar într-un număr mare de restricții și au domenii de valori cu cardinalitate mică*.

***Ordonarea valorilor*** pleacă de la premisa că nu toate valorile din domeniul variabilelor apar în toate restricțiile. Și în acest caz sunt preferate mai întâi variabilele cele mai restricționate, cu cele mai puține atribuiri posibile.

## 4 Concluzii și observații

Metodele descrise pot fi aplicate pe o plajă largă de probleme, iar optimizările prezentate pot duce la scăderi drastice ai timpilor de execuție. Combinarea anumitor metode, precum tehnici prospective cu euristici duce la rezultate și mai bune, demonstrate în practică. Astfel, majoritatea problemelor care presupun parcurgeri în spațiul stărilor pot fi abordate pornind de la unul dintre algoritmii descriși.

## 5 Referințe

[1] Curs BLIA, Prof. Ing. Adina Magda Florea

[2] Introducere in Algoritmi, Thomas H. Cormen; Charles E. Leiserson, Ronald R. Rivest, Cliff Stein (1990)

[3] The Art of Computer Programming, Donald E. Knuth (1968)

[4] CSP Tutorial http://4c.ucc.ie/web/outreach/tutorial.html

[5] The Complexity of Some Polynomial Network Consitency Algorithms for Constraint Satisfaction Problems disponibil la http://cse.unl.edu/~choueiry/Documents/AC-MackworthFreuder.pdf

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Backtracking

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Constraint_satisfaction_problem