UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Algoritmilor

23. Flux. Rețele de flux. Operații cu fluxuri. Rețele reziduale.

Bibliografie

[1] C. Giumale – Introducere in Analiza Algoritmilor - cap. 5.6

[2] Cormen – Introducere in algoritmi - cap. 27

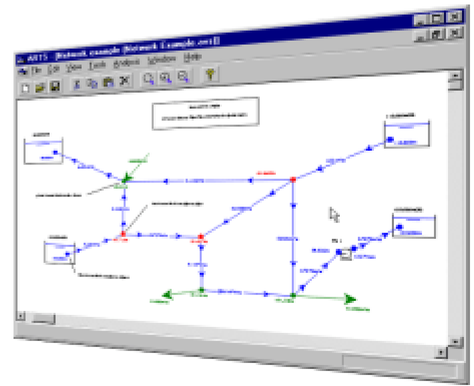
[3] Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/Ford-Fulkerson_algorithm

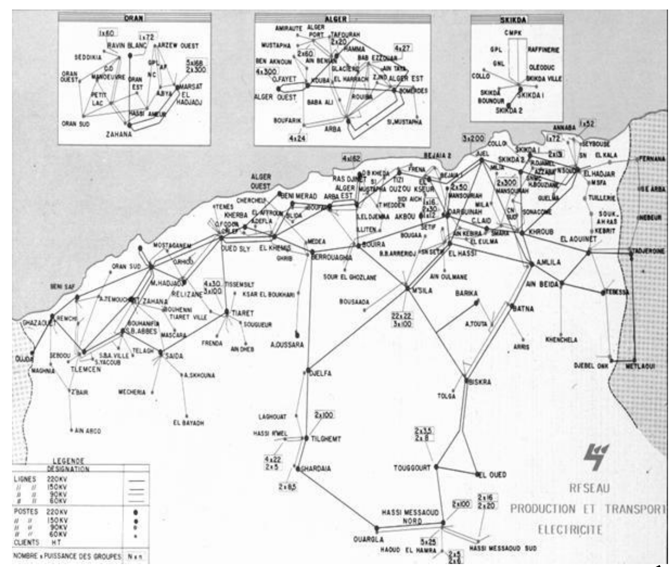
Obiective

- Definirea conceptului de rețea de flux (sau de transport).
- Identificarea principalilor algoritmi ce calculează fluxul maxim printr-o rețea.

Definirea problemei

- Rețea ce transportă diferite materiale între un producător și o destinație.
- Fiecare arc are o capacitate maximă de transport.
- Trebuie identificat fluxul maxim ce poate fi transportat prin rețea.
- Rețele:
  - Electrice;
  - Apă;
  - Informații;
  - Drumuri.

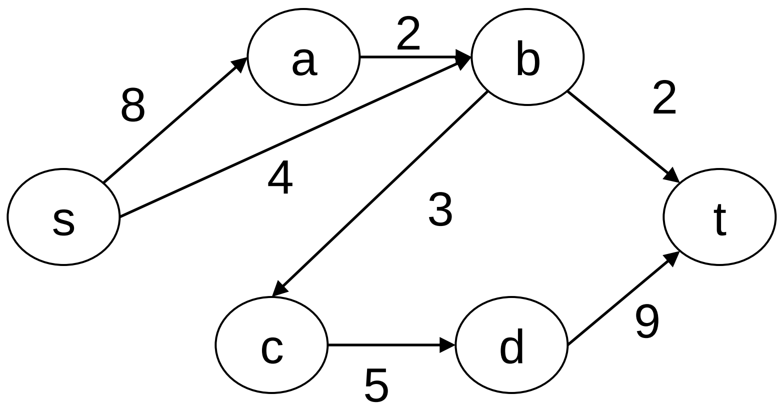




Rețea de flux – Definiție

- G(V,E) graf orientat;
- $c(u,v) \geq 0 \quad \forall(u,v)$ – c = capacitatea arcelor;
- Dacă $(u,v) \notin E \rightarrow c(u,v) = 0$;
- S – sursa traficului;
- T – destinația traficului (drena);
- Pp. $\forall u \in V \setminus \{s, t\} \; \exists$ s..u..t.

Exemplu de rețea de flux

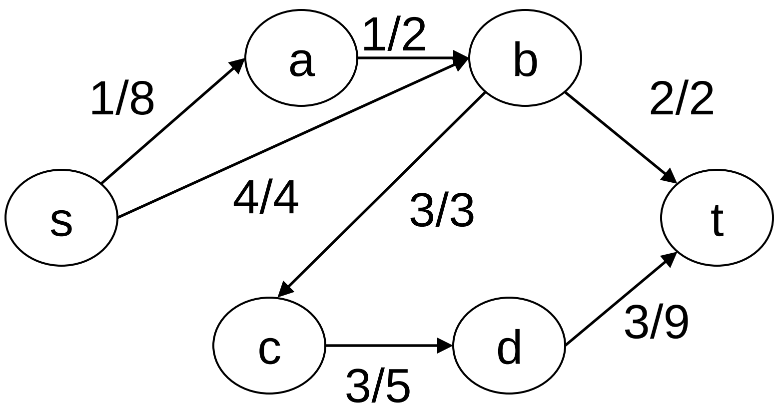


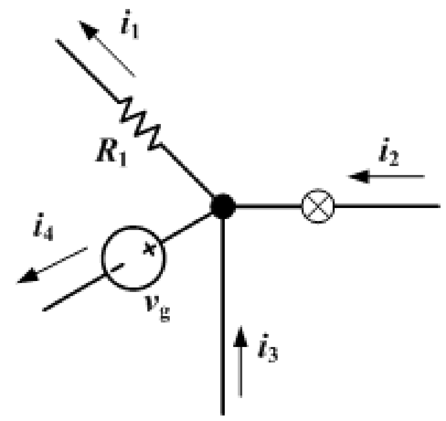
- s – sursa, t – destinația.
- Pe arce este reprezentată capacitatea arcului.

Flux. Definiție. Proprietăți.

- $G = (V,E)$ – rețea de flux;
- $c: V \times V \rightarrow \Re$ - capacitatea rețelei;
- $f: V \times V \rightarrow \Re$ - fluxul prin rețeaua G;
- Proprietăți:
  - $\forall u, v \in V, f(u,v) \leq c(u,v)$ (fluxul printr-un arc este mai mic sau egal cu capacitatea arcului) – respectarea capacității arcelor;
  - $\forall u, v \in V, f(u,v) = -f(v,u)$ – simetria fluxului;
  - $\Sigma f(u,v) = 0$ pentru $\forall u \in V \setminus \{s,t\}$ – conservarea fluxului.

Exemplu de fluxuri





i2+i3-i4-i1=0 (P3)

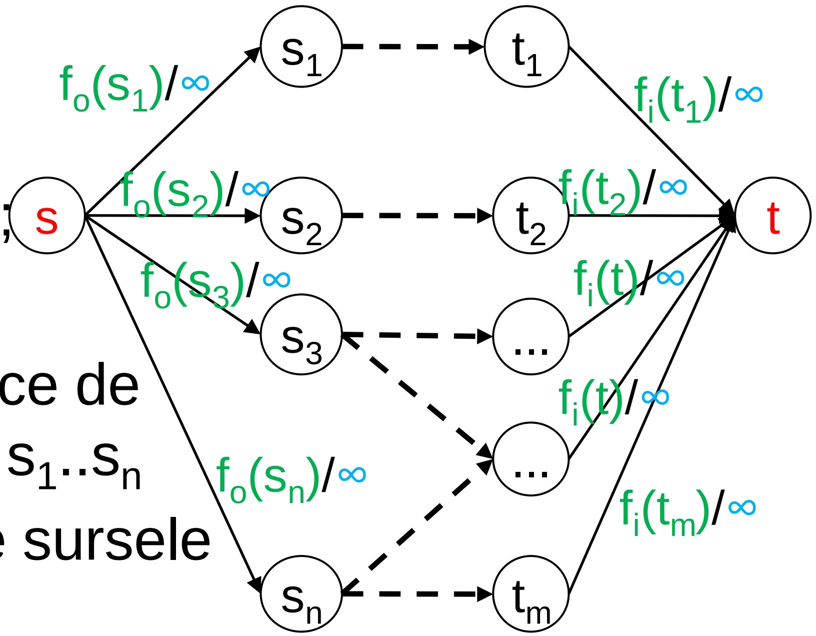
- Σf(u,v) = 0 pentru ∀u ∈ V \ {s,t} – fluxul se conservă;
- Proprietatea 3 = legea curentului (Kirchoff) ☺ - suma I. curenților ce intră intr-un nod = suma I. curenților ce ies din nodul respectiv.

Flux. Notații.

- $f(u,v)$ – fluxul din u spre v;
- $f_i(u) = \Sigma f(v,u)$ – fluxul total care intra în nodul u;
- $f_o(u) = \Sigma f(u,v)$ – fluxul total care iese din nodul u;
- Valoarea totală a fluxului:
  - $|f| = \Sigma f(s,v) = f_o(s)$;
  - $|f|$ = fluxul ce părăsește sursa;
  - Cf. proprietăților P1-P3: $|f| = \Sigma f(s,v) = \Sigma f(v,t) = f_i(t)$.

Surse multiple, destinații multiple

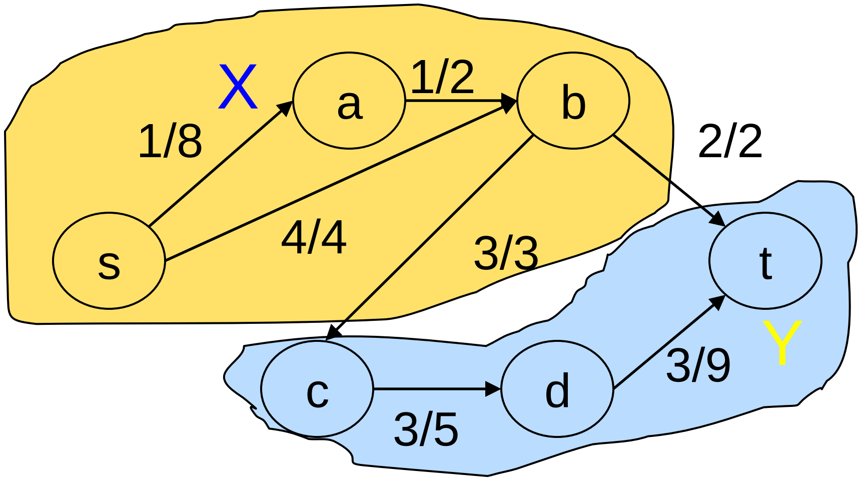
- Surse multiple $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$;
- Destinații multiple $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$;
- Se adaugă o sursă unică cu arce de capacitate infinită spre sursele $s_1..s_n$ și flux egal cu fluxul generat de sursele respective;
- Se adaugă o destinație unică t și arce de capacitate infinită între $t_1..t_m$ și t și flux egal cu fluxul ce intră în destinațiile respective.



Operații cu fluxuri

- X,Y – mulțimi de noduri;
- $f(X,Y) = \Sigma_{x\in X}\Sigma_{y\in Y} f(x,y)$ = fluxul între X și Y;
- Operații:
  - $\forall X\in V$: $f(X,X) = 0$;
  - $\forall X,Y\in V$: $f(X,Y) = -f(Y,X)$;
  - $\forall X,Y,Z\in V$ și $Y\subseteq X$:
    - $f(X \setminus Y, Z) = f(X,Z) - f(Y,Z)$;
    - $f(Z, X \setminus Y) = f(Z,X) - f(Z,Y)$;
  - $\forall X,Y,Z\in V$ și $X\cap Y=\emptyset$:
    - $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$;
    - $f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$
  - $f(s,V) = f(V,t)$

Exemplu operații fluxuri (1)

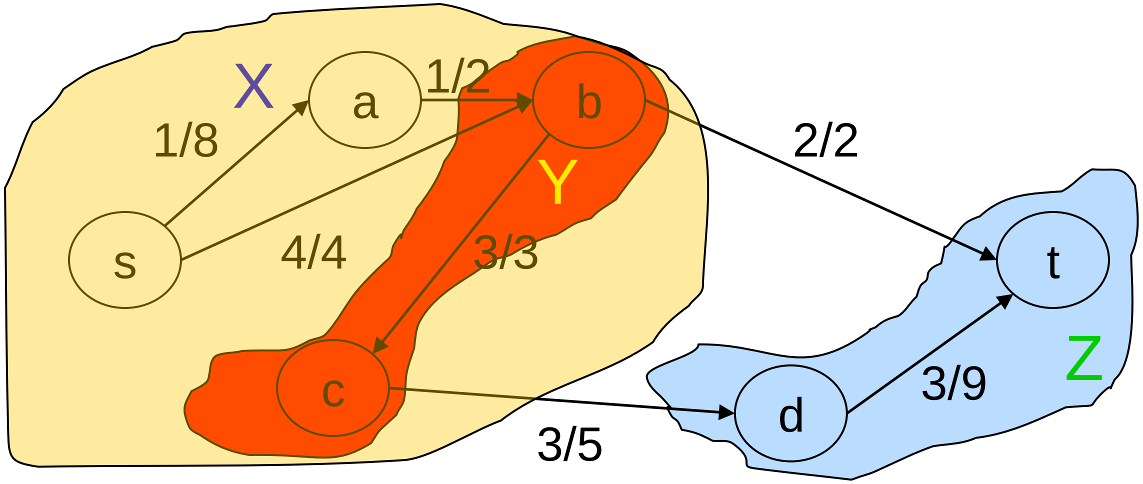


$$f(X,Y) = \Sigma_{x\in X}\Sigma_{y\in Y}\ f(x,y)$$

$f(X,X) = f(s,a) + f(a,s) + f(s,b) + f(b,s) + f(a,b) + f(b,a) = 0$

$f(X,Y) = f(b,c) + f(b,t) = -f(c,b) - f(t,b) = -f(Y,X)$

Exemplu operații fluxuri (2)



∀X, Y, Z ∈ V si Y ⊆ X

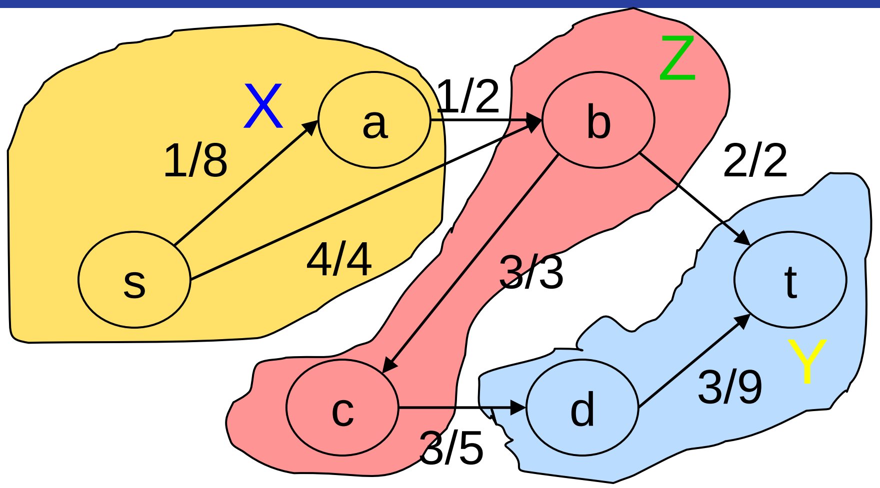
$f(X \setminus Y, Z) = f(X, Z) - f(Y, Z)$

$f(Z, X \setminus Y) = f(Z, X) - f(Z, Y)$

$f(X \setminus Y, Z) = 0 = f(b,t) + f(c,d) - f(b,t) - f(c,d) = f(X,Z) - f(Y,Z)$

$f(Z, X \setminus Y) = 0 = f(t,b) + f(d,c) - f(t,b) - f(d,c) = f(Z,X) - f(Z,Y)$

Exemplu operații fluxuri (3)



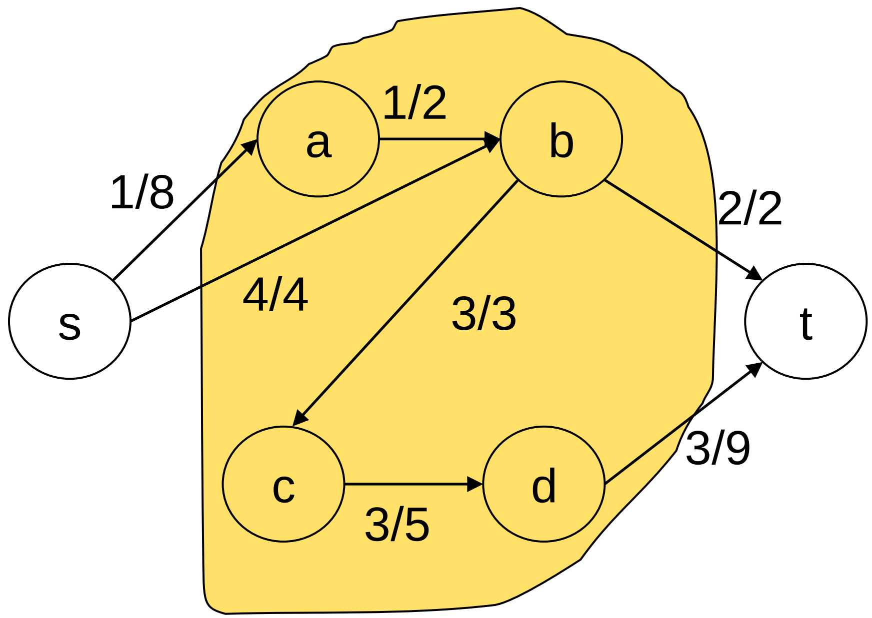
$\forall X, Y, Z \in V$ si $X \cap Y = \varnothing$

$$f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$
$$f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$

$f(X \cup Y, Z) = f(s,b) + f(a,b) + f(t,b) + f(d,c) = f(X,Z) + f(Y,Z)$

$f(Z, X \cup Y) = f(b,a) + f(b,s) + f(b,t) + f(c,d) = f(Z,X) + f(Z,Y)$

Exemplu operații fluxuri (4)



$f(s, V) = f(V, t)$

$f(s, V) = f(s,a) + f(s,b) = 5 = f(d,t) + f(b,t) = f(V, t)$

Arc rezidual. Capacitate reziduală.

- Definiție: Un arc (u,v) pentru care $f(u,v) < c(u,v)$ se numește arc rezidual.
- Fluxul pe acest arc se poate mări.
- Definiție: Cantitatea cu care se poate mări fluxul pe arcul (u,v) se numește capacitatea reziduală a arcului (u,v) ($c_f(u,v)$).
- $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$.

Rețea reziduală. Cale reziduală.

- G = (V,E) rețea de flux cu funcția de capacitate c.

- Definiție: Rețeaua reziduală (G_f = (V,E_f)) este o rețea de flux formată din arcele ce admit creșterea fluxului:

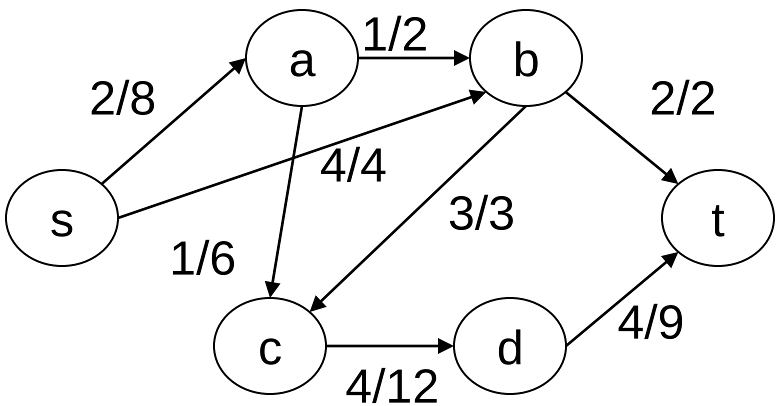
$$E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}.$$

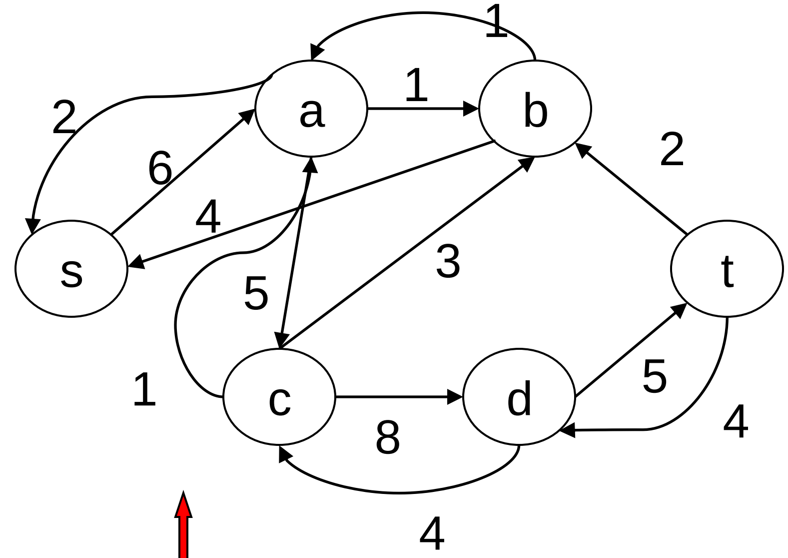
- Observație: $E_f \not\subseteq E$!!!

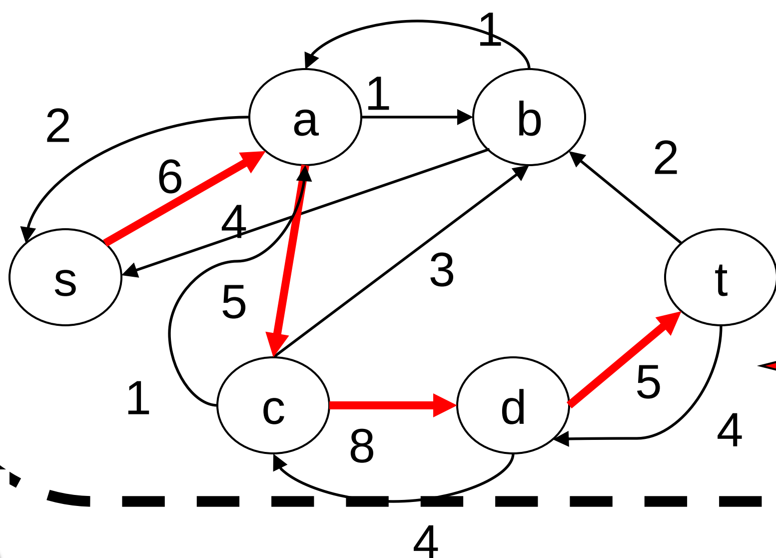
- Definiție: Cale reziduală e un drum s..t ⊆ G_f, unde $c_f(u,v)$ este capacitatea reziduală a arcului (u,v).

- Definiție: Capacitatea reziduală a căii = capacitatea reziduală minimă de pe calea s..t descoperită.

Exemplu rețea reziduală







Rețeaua reziduală $G_f = (V,E_f)$ unde

$E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$

Calea reziduală: s → a → c → d → t

Capacitatea reziduală a căii:

$c_f(p) = \min\{6, 5, 8, 5\} = 5$

Rețea reziduală

- Lemă 5.16: Fie $G = (V,E)$ rețea de flux, f fluxul în G, G_f rețeaua reziduală a lui G. Fie f' un flux prin G_f și $f+f'$ o funcție definită astfel:

$$f+f'(u,v) = f(u,v) + f'(u,v).$$

- Atunci $f+f'$ reprezintă un flux în G și

$$|f+f'| = |f| + |f'|$$

- Această Lemă ne spune cum putem mări fluxul printr-o rețea de flux.

Flux în rețeaua reziduală

- Lemă 5.17: G – rețea de flux, f flux în G, p = s..t – cale reziduală în G_f, f_p:V x V->$\Re$ se definește ca fiind:

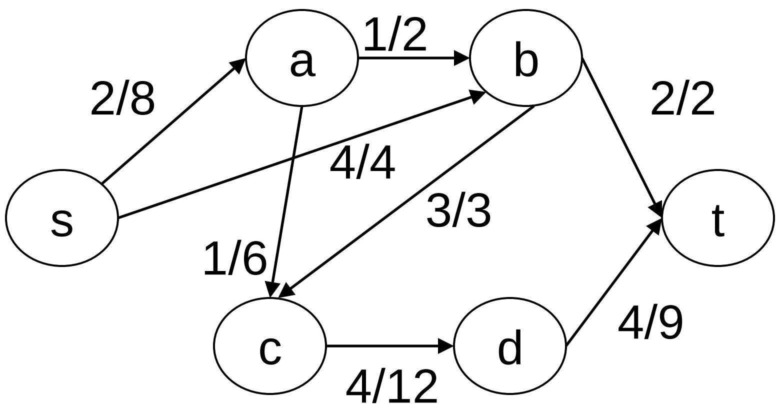
$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p), \text{ dacă } (u,v) \in p \\ -c_f(p), \text{ dacă } (v,u) \in p \\ 0, \text{ dacă } (u,v) \text{ și } (v,u) \notin p \end{cases}$$

f_p = flux în G_f; $|f_p| = c_f(p)$

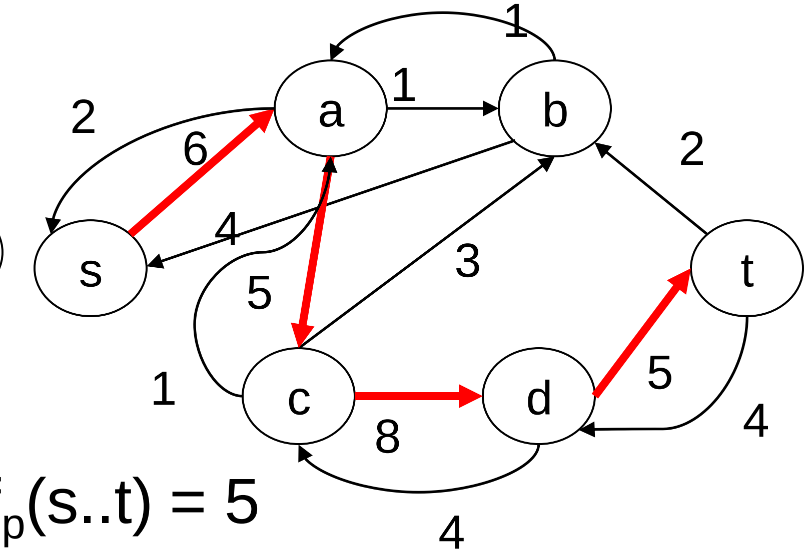
- Corolar 5.4: f' = f + f_p = flux în G, astfel încât $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.

- Această Lemă ne spune cum se definește fluxul printr-o rețea reziduală.

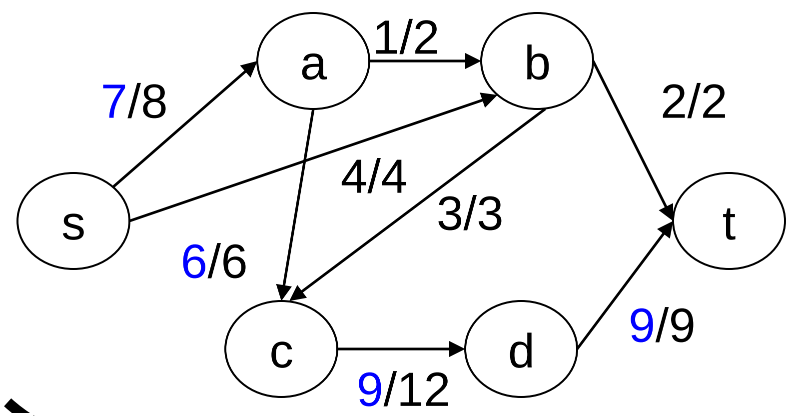
Exemplu maximizare flux



$f(s..t) = 2 + 4 = 6$



$f_p(s..t) = 5$



$f' = f + f_p = 6 + 5 = 11$