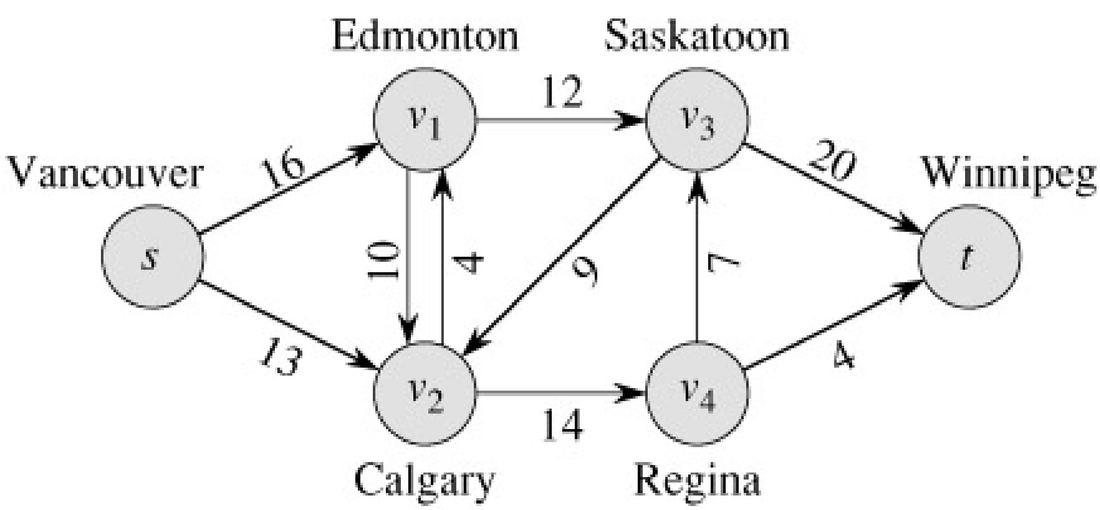
Flux maxim în rețele de transport

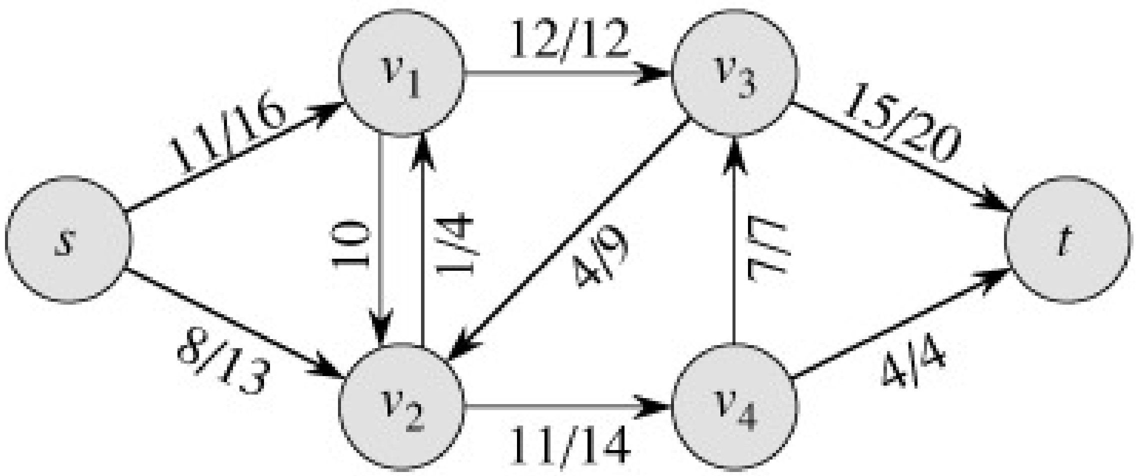

Edmonton
Saskatoon
Vancouver
Winnipeg
Calgary
Regina
s
t
v_1
v_2
v_3
v_4
16
13
12
14
10
4
9
7
20
4

2

Definiții și proprietăți

- Rețea de transport
  - Graf orientat
  - Capacitate
  - Sursă și scurgere
- Flux
- Proprietăți
  - Restricție de capacitate
  - Antisimetrie
  - Conservare flux
- Valoarea fluxului

3

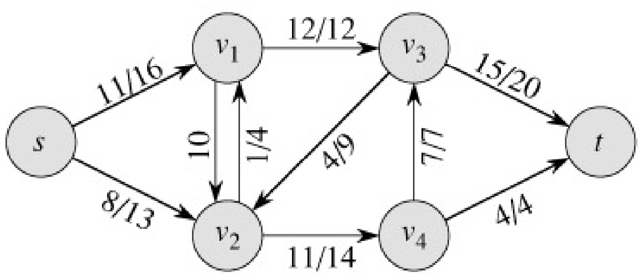


4

Fluxul în rețea

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) = \sum_{v \in V} f(v,t)$$

Exemplu |f|



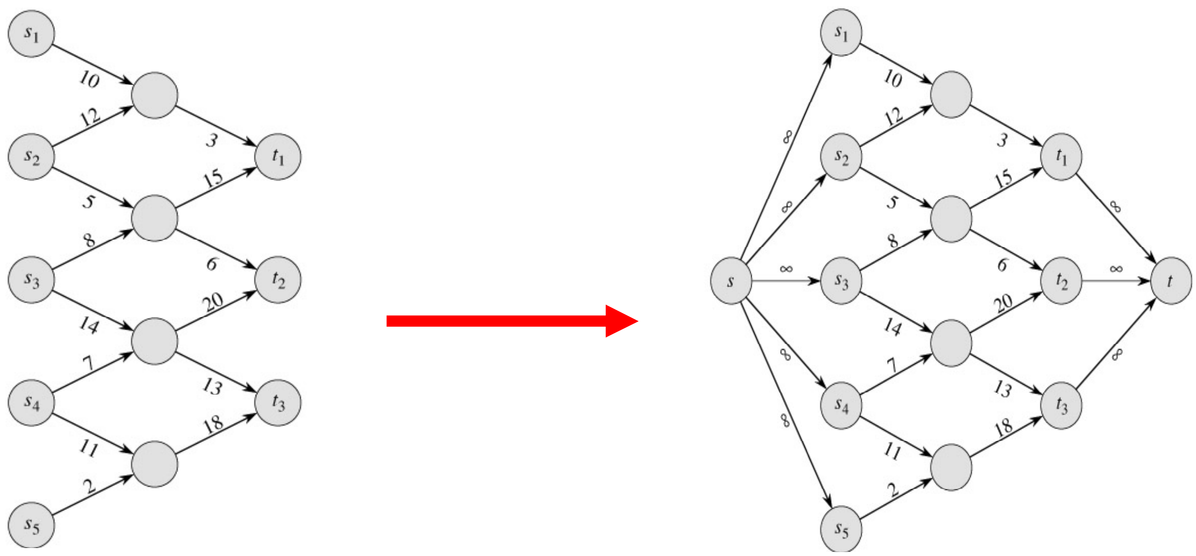
$|f| = f(s, v_1) + f(s, v_2) + f(s, v_3) + f(s, v_4) + f(s, t) =$

$11 + 8 + 0 + 0 + 0 = 19$

$|f| = f(s, t) + f(v_1, t) + f(v_2, t) + f(v_3, t) + f(v_4, t) =$

$0 + 0 + 0 + 15 + 4 = 19$

Mai multe surse și destinații

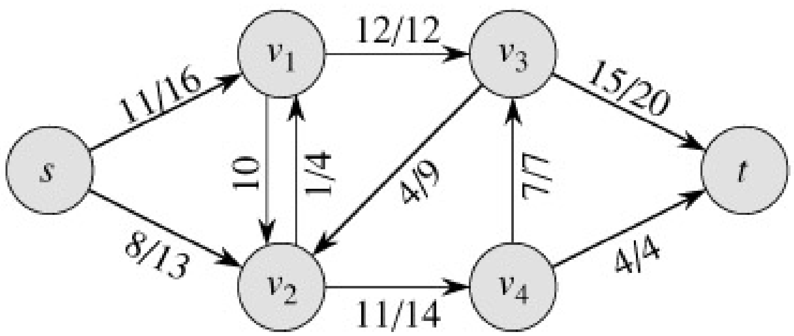


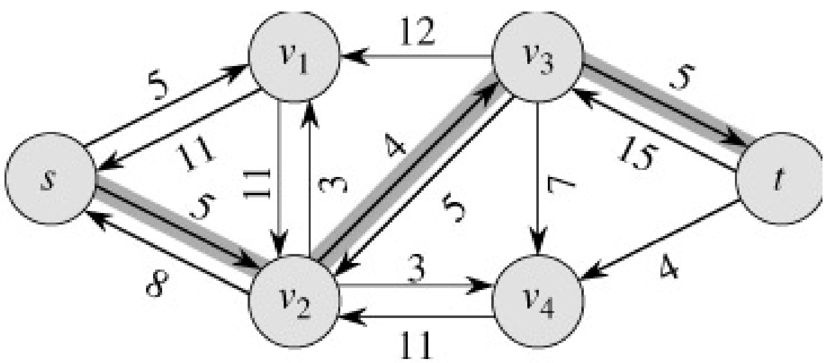
7

Rețeaua reziduală a lui G indusă de f conține arcele NxN pentru care valoarea de mai jos (capacitatea arcului respectiv) este pozitivă

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Exemplu de rețea reziduală





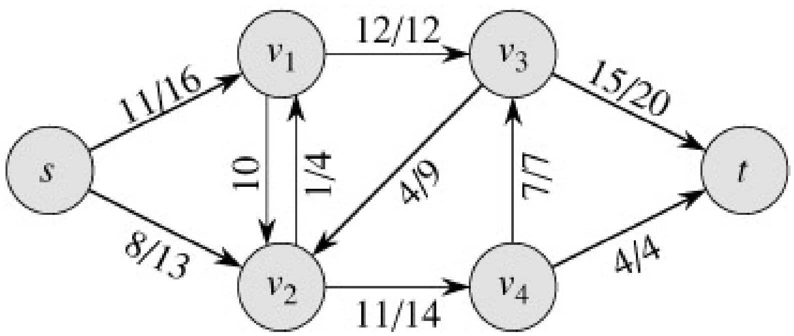
9

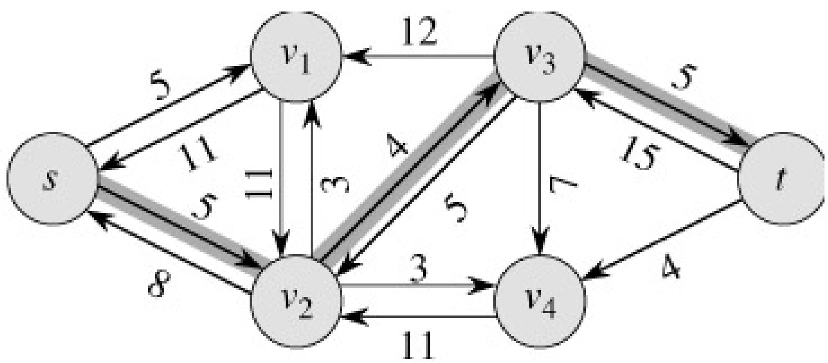
Drum de ameliorare

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ este în } p\}$$

10

Capacitatea drumului de ameliorare=4





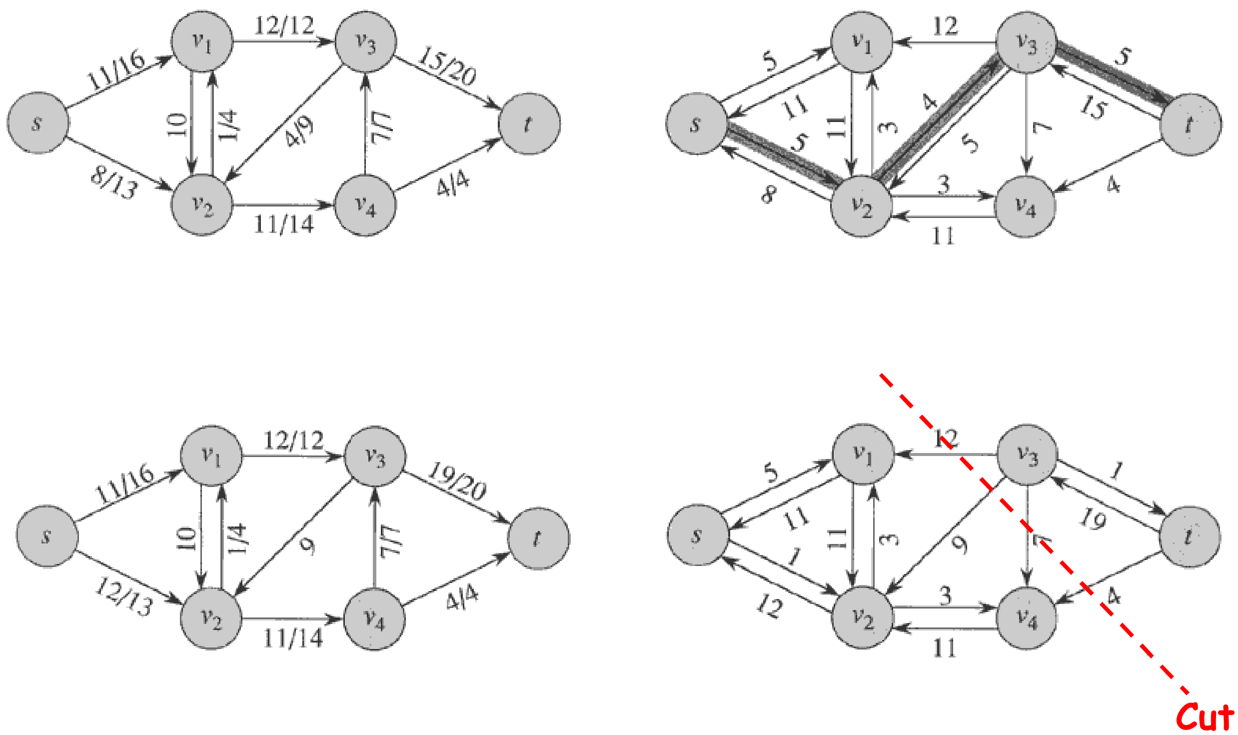
11

Metoda Ford-Fulkerson

Cât timp există un drum de ameliorare
repetă mărește fluxul de-a lungul lui

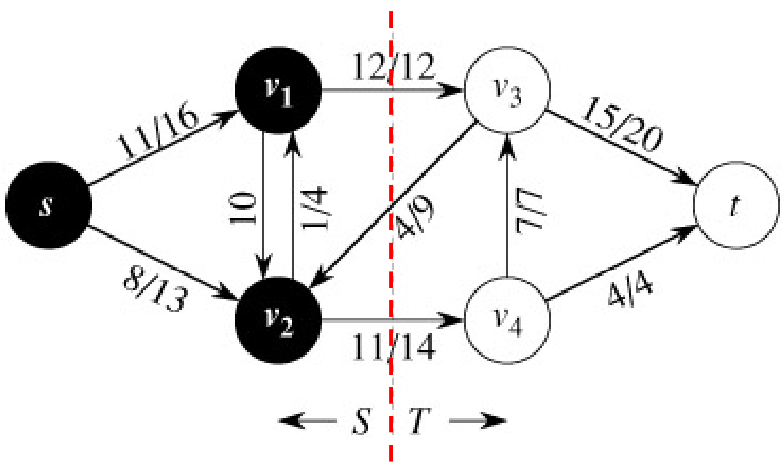
12

Exemplu


s
v1
v2
v3
v4
t
11/16
8/13
10
1/4
12/12
4/9
7/7
11/14
15/20
4/4
5
11
8
12
3
4
7
15
19/20
12/13
9
1
19
Cut

13

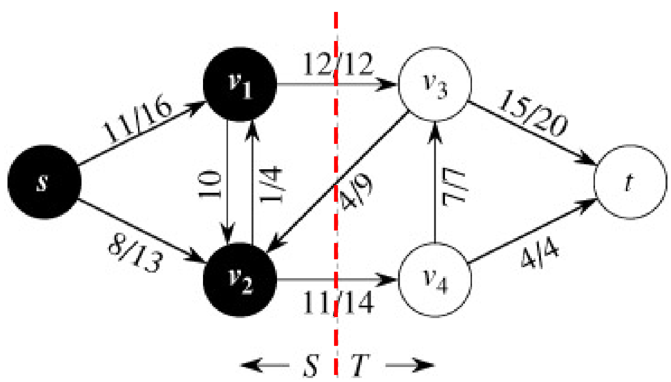
Tăietură



14

Fluxul prin tăietura (S,T)

$$f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v)$$

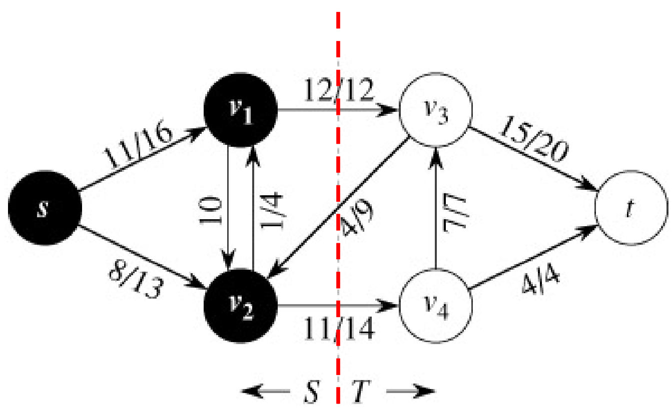


f(S,T) = 12 – 4 + 11 = 19

15

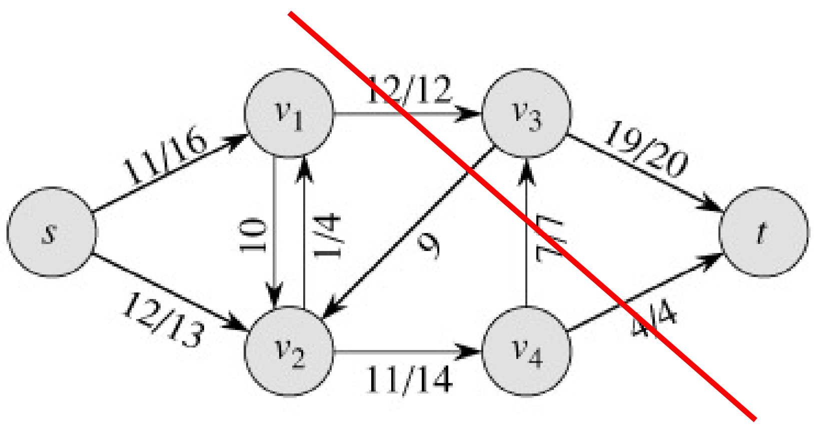
Capacitatea unei tăieturi (S,T)

$$c(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$$



c(S,T)= 12+ 0 + 14 = 26

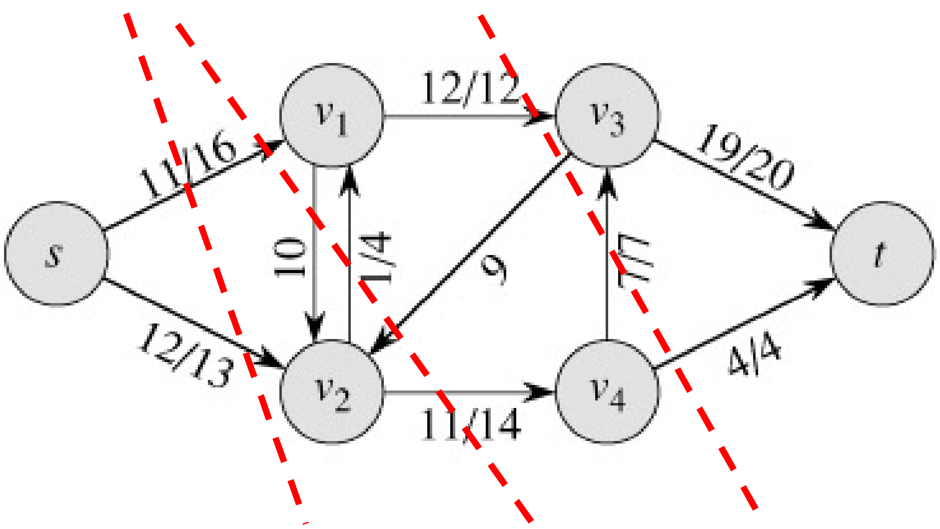
16



Capacitatea maximă a rețelei este de cel mult 12 + 7 + 4 = 23 (tăietura minimă)

17

Fluxul



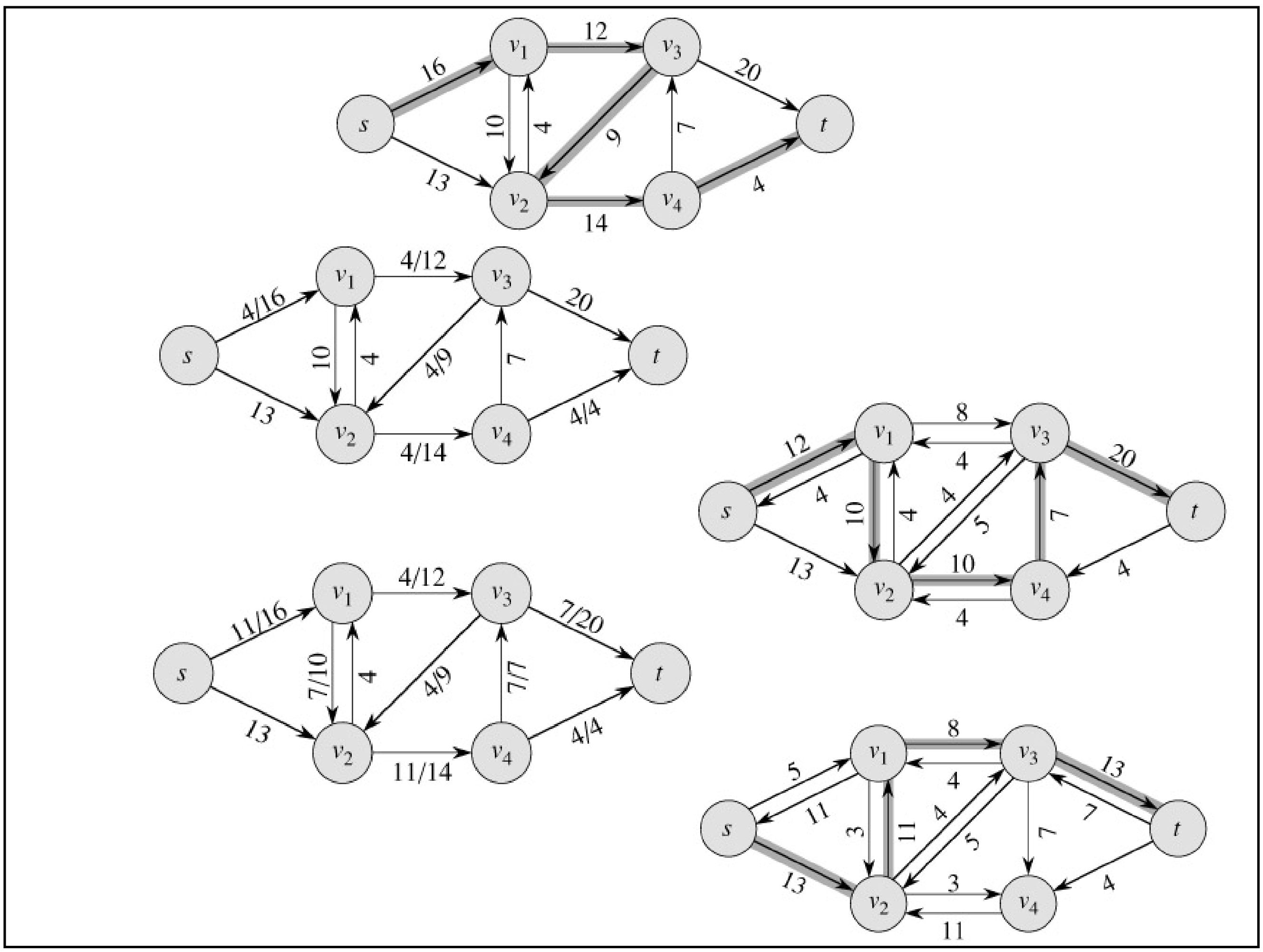
18

Teorema de flux maxim, tăietură minimă

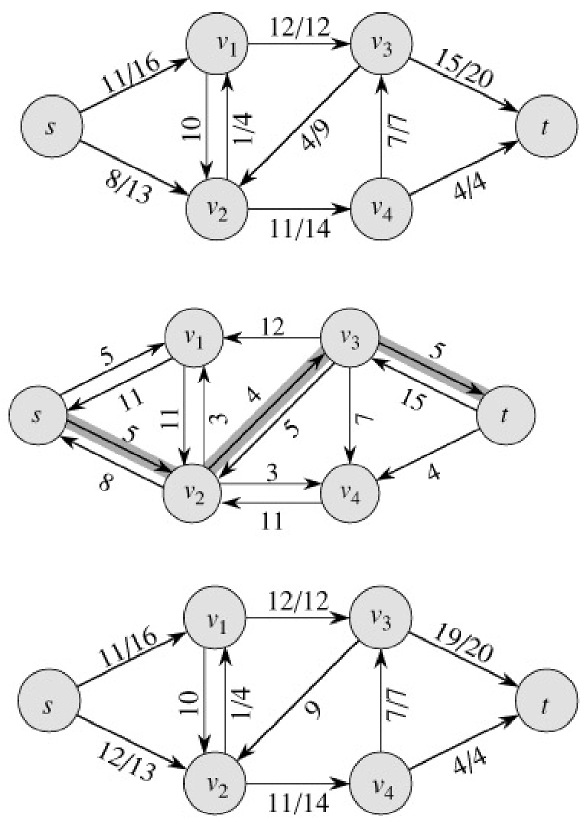
- Dacă *f* este un flux în *G=(N,A)*, cu sursă *s* și scurgere *t*, atunci condițiile sunt echivalente:
  1. *f* este un flux maxim în *G*.
  2. Rețeaua reziduală nu conține căi de ameliorare.
  3. *|f| = c(S,T)* pentru o tăietură *(S,T)* (minimă).

Algoritmul Ford-Fulkerson

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
for each edge (u, v) ∈ E[G]
      do f[u, v] ← 0
         f[v, u] ← 0
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
      do c_f(p) ← min {c_f(u, v) : (u, v) is in p}
         for each edge (u, v) in p
               do f[u, v] ← f[u, v] + c_f(p)
                  f[v, u] ← −f[u, v]
```



s
v1
v2
v3
v4
t
16
12
20
13
10
4
9
7
14
4
4/16
4/12
4/9
4/14
4/4
11/16
7/10
7/20
7/7
11/14
8
5
11
3


s
v1
v2
v3
v4
t
11/16
8/13
12/12
10
1/4
4/9
7/7
15/20
4/4
11/14
5
11
5
8
12
11
3
4
5
7
3
11
5
15
4
11/16
12/13
12/12
10
1/4
9
7/7
19/20
4/4
11/14

22

Analiză

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
for each edge (u, v) ∈ E[G]
     do f[u, v] ← 0
        f[v, u] ← 0
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
     do c_f(p) ← min{c_f(u, v) : (u, v) is in p}
        for each edge (u, v) in p
             do f[u, v] ← f[u, v] + c_f(p)
                f[v, u] ← −f[u, v]
```

O(E) (lines 1–3)

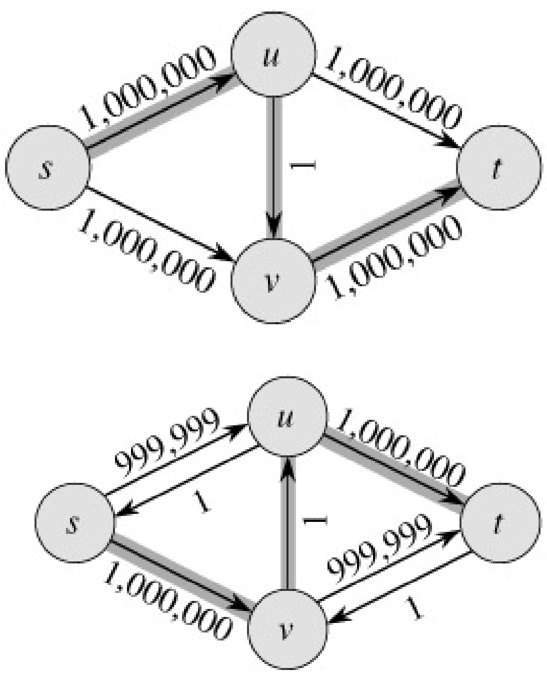
? (line 4)

O(E) (lines 5–8)

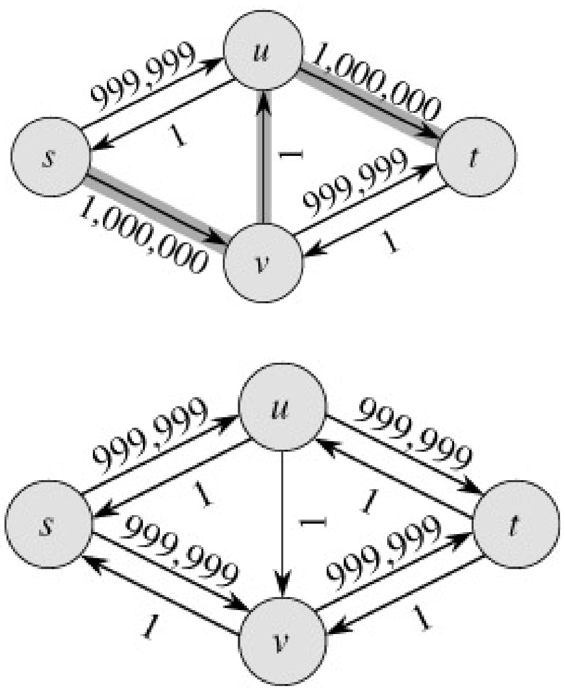
23

Analiza

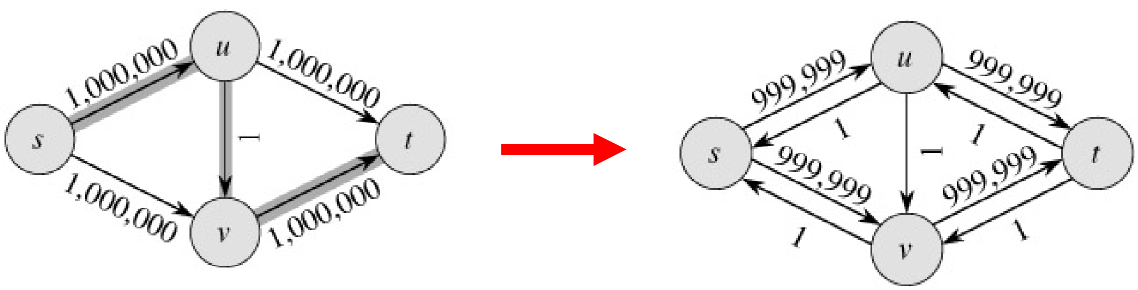
- Capacitati intregi – marire a |f| cu ≥ 1.
- Daca fluxul max e f*, atunci ≤ |f*| iterations → time is O(E|f*|).
- Note that this running time is **not polynomial** in input size. It depends on |f*|, which is not a function of |V| or |E|.
- If capacities are rational, can scale them to integers.
- If irrational, FORD-FULKERSON might never terminate!


u
1,000,000
1,000,000
s
1
t
1,000,000
v
1,000,000
999,999
u
1,000,000
s
1
1
t
999,999
1,000,000
v
1

26


u
s
t
v
999,999
1,000,000
1
1
999,999
1,000,000
1
u
s
t
v
999,999
999,999
1
1
1
999,999
999,999
1
1

27



- Repetă de 999,999 ori

28

Edmonds-Karp

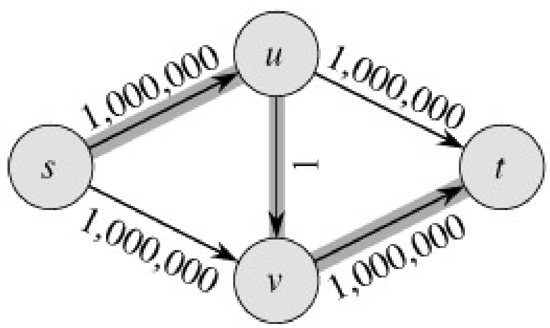
- Căutare în lățime pe rețeaua reziduală →Calea de ameliorare este cea mai scurtă cale în rețeaua reziduală
- $O(na^2)$

FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each edge $(u, v) \in E[G]$
    do $f[u, v] \leftarrow 0$
        $f[v, u] \leftarrow 0$
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
    do $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$
        for each edge (u, v) in p
            do $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$
                $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$

29

Edmonds-Karp



- 2 iterații