UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI 1818

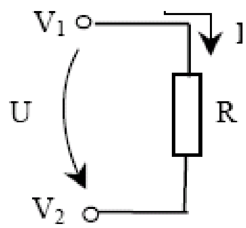
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Elemente de Electronică Analogică

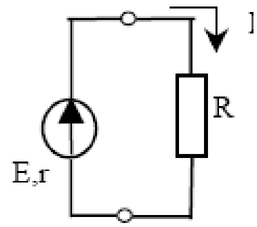
45. Elemente recapitulative de metode de analiză a circuitelor electrice

Elemente de ELTH

- **Legea lui Ohm**



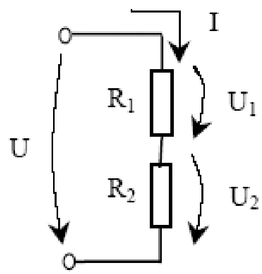
$$U = V_1 - V_2$$
$$I = \frac{U}{R}$$



$$I = \frac{E}{R + r}$$

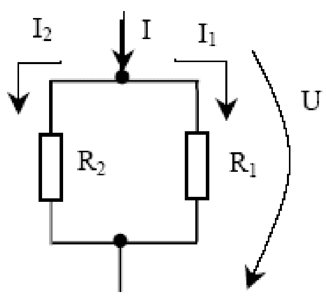
pentru o portiune de circuit   pentru un circuit

- **Teorema divizorului de tensiune**



$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{U}{R_1 + R_2} \\ U_1 + U_2 = U \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} U_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U \\ U_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \end{array}$$

- **Teorema divizorului de curent**



$$\left.\begin{array}{l} U = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \\ I_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \end{array}$$

- **Teoremele lui Kirchhoff**

Terminologie. Se considera o retea electrica completa cu N noduri (puncte de ramificatie) , cu L laturi (portiuni neramificate marginite de noduri) si cu O ochiuri fundamentale (ochiurile fundamentale ale unui sistem sunt *independente* in sensul ca *orice integrala de contur scrisa pentru unul din ochiurile fundamentale este liniar independenta fata de integralele de contur scrise pentru celelalte ochiuri fundamentale ale sistemului considerat*).

Prima teorema a lui Kirchhoff. Cu ajutorul legii de conservare a sarcinii electrice, in regim stationar, s-a demonstrat ca *suma algebrica a intensitatilor curentilor, care concura in nodul (n), este nula.*

$$\sum_{(n)} I = 0$$

Observatie. De obicei sensul de referinta pozitiv al curentilor se alege dinspre nod spre exterior.

A doua teorema a lui Kirchhoff. *Suma algebrica a t.e.m. ale surselor in lungul unui ochi* (o) *este egala cu suma algebrica a caderilor de tensiune din laturile ochiului.*

$$\sum_{k\in(o)} E_k = \sum_{k\in(o)} I_k R_k$$

- **Teorema lui Millman**

Ipoteza. Consideram un multipol pasiv in stea cu **n** ramuri (cu bornele de acces **1, 2, ... , n**), prin care circula curentii $I_1,\ I_2, ...\ I_n$ avand potentialele $\mathrm{V}_1,\ \mathrm{V}_2, ...\ \mathrm{V}_n$ fata de un punct de referinta arbitrar (punct de masa). Ramurile multipolului nu sunt cuplate inductiv intre ele sau cu alte ramuri exterioare si au impedantele proprii $Z_1,\ \mathrm{Z}_2, ...\ \mathrm{Z}_n$.

Potentialul nodului N este egal cu media aritmetica a potentialelor bornelor de acces, ponderate cu admitantele laturilor corespunzatoare.

$$V_N = \frac{V_1 Y_1 + V_2 Y_2 + ... + V_n Y_n}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}$$

Observatie. Teorema lui Millman se demonsreaza foarte simplu, prin reducere ajungandu-se la teorema lui Kirchhoff I.

- **Teorema superpozitiei (suprapunerii efectelor)**

Conform acestei teoreme, *curentul electric din orice latura a unei retele de curent alternativ, in care exista mai multe generatoare, este suma algebrica a curentilor produsi de fiecare generator in parte, daca ar actiona singur in retea(celelalte generatoare fiind pasivizate).*

Daca se aplica teorema superpozitiei, retelei considerata in ipoteza teoremei lui Millman, putem calcula potentialul nodului N cu urmatoarea relatie:

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{Z_{ei}}{Z_i + Z_{ei}} \quad \text{unde:} \quad \frac{1}{Z_{ei}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{Z_j}$$

- **Teorema generatorului de tensiune echivalent (Thevenin-Helmboltz)**

O retea liniara si activa, cu doua borne A, B de iesire si fara cuplaje inductive cu exteriorul este echivalenta cu un generator ideal de tensiune, avand t.e.m. E_g egala cu tensiunea labornele retelei la mersul in gol (E_{AB0}), conectata in serie cu o impedanta Z_g , egala cu impedanta echivalenta a retelei pasivizate (Z_{AB0}).

$$E_g = E_{AB0}, \quad Z_g = Z_{AB0}$$

Tensiunea debitata pe sarcina Y=1/ Z are expresia (teorema lui Norton):

$$V_{AB} = \frac{I_g}{Y + Y_g}$$

- **Teorema generatorului de curent echivalent (Norton)**

O retea liniara si activa, cu doua borne A, B de iesire si fara cuplaje inductive cu exteriorul este echivalenta cu un generator ideal de curent, avand curentul injectat I_g egal cu curentul debitat de retea la mersul in scurtcircuit (I_{AB0}), conectata inparalel cu o admitanta Y_g, egala cu admitanta echivalenta a retelei pasivizate (Y_{AB0}).

$$I_g = I_{AB0}, \quad Y_g = Y_{AB0}$$

Curentul debitat pe sarcina Z are expresia (teorema lui Thevenin):

$$I_{AB} = \frac{E_g}{Z + Z_g}$$

- **Teoremele de transformare triunghi <-> stea**

Orice triunghi de impedante Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} admite o schema echivalenta unica in stea, ale carei laturi au impedantele:

$$Z_i = \frac{Z_{ij} Z_{ki}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad \text{unde: } i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k.$$

Orice stea de admitante $Y_1 = 1/Z_1, Y_2 = 1/Z_2, Y_3 = 1/Z_3$ admite oschema echivalenta unica in triunghi, ale carei laturi au admitantele:

$$Y_{ij} = \frac{Y_i Y_j}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad \text{unde: } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

- **Teorema lui Miller**

Se considera un cuadripol avand conectata o admitanta Y, intre intreare si iesire. De asemenea se considera ca tensiunea de iesire a cuadripolului (prin structura sa, interna, topologica), are valoarea: $U_2 = kU_1, k - scalar$. Teorema lui Miller pune in evidenta influenta admitantei Y asupra admitantelor de intrare si iesire Y_1, Y_2.

Penru primul cuadripol se pot exprima curentii de intrare si iesire:

$$I_1 = Y\left(U_1 - U_2\right) = YU_1\left(1-k\right)$$
$$I_2 = Y\left(U_2 - U_1\right) = YU_2\left(1-1/k\right)$$

Respectiv pentru al doilea cuadripol:

$$I_1 = U_1 Y_1$$
$$I_2 = U_2 Y_2$$

Prin identificare relatiilor intrare-iesire pentru cale doua structuri de cuadripol se obtine (teorema lui Miller):

$$Y_1 = Y\left(1-k\right)$$
$$Y_2 = Y\left(1-1/k\right)$$

Cuadripoli

Un multipol electric cu patru borne de acces(fig. 1) si fara cuplaje inductive cu exteriorul se numeste *cuadripol general* sau *tetrapol.*

Interactiunea tetrapolului cu exteriorul este complet caracterizata de cele patru potentiale ale bornelor de acces si de cei patru curenti primiti din exterior.

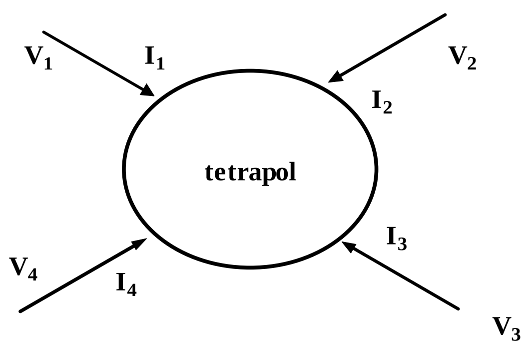


Figura1

$$\underline{I_1} = -\underline{I_2} - \underline{I_3} - \underline{I_4}$$

Alegerea originii potentialelor fiind arbitrara, se poate alege egal cu zero potentialul unei borne care devine *punct de masa*. Suma curentilor care intra intr-o suprafata inchisa este nula (conform teoremei continuitatii curentului electric de inductie valabila in regim cvasistationar), putem exprima un curent in functie de ceilalti curenti.

Se defineste notiunea de *poarta de acces* a unui multipol o grupare de doua borne de acces pentru care suma algebrica a curentilor este nula indiferent de potentialele bornelor. O astfel de situatie poate fi impusa de structura topologica a multipolului sau a retelei externe la care este conectat.

Multipolii pot fi *liniari*, *parametrici* sau *neliniari*, dupa cum parametrii elementelor de circuit ale schemelor echivalente sunt invariabili, sunt functii date de timp sau depind de valorile curentilor si tensiunilor.

La multipolii liniari se aplica teorema superpozitiei iar ecuatiile caracteristici sunt ecuatii liniare.

Se numeste *cuadripol diport* sau numai *cuadripol* un cuadripol general ale carui borne sunt grupate in doua porti de acces (fig 2).

Figura 2

Functionarea unui cuadripol poate fi descrisa prin mai multe seturi de parametri. Dintre acestea mentionam:

Parametrii hibrizi(h)

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

Din aceste ecuatii se defineste semnificatia parametrilor hibrizi:

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2 = 0}$$

-impedanta de intrare cand iesirea este scurtcircuitata

$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1 = 0}$$

-transferul invers de tensiune cand intrarea este in gol.

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2 = 0}$$

-amplificarea in curent cand iesirea este scurtcircuitata

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}$$

-admitanta de iesire cu intrarea in gol

Pe baza setului de ecuatii functionale se poate construi circuitul echivaland cu parametri h al cuadripolului.(fig3)

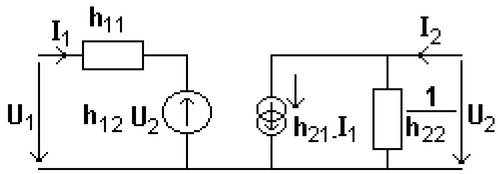


Figura 3

Parametrii impedanta (Z)

Prin intermediul parametrilor impedanta marimile U_1 si U_2 se definesc in functie de curentii I_1 si I_2

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Parametrii impedanta se defiesc prin relatiile

$$Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Marimea se masoara in Ω si se numeste impedanta de intrare cu iesirea in gol

$$Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Marimea se masoara in Ω si se numeste impedanta de iesire cu intrarea in gol

$$Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Marimea se masoara in Ω si se numeste transimpedanta de la intrare

$$Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Marimea se masoara in Ω si se numeste transimpedanta de la iesire la intrare cu iesirea in gol.

Parametrii admitanta(Y)

Prin intermediul parametrilor admitanta marimile I_1 si I_2 sunt definite in functie de marimile U_1 si U_2

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases}$$

Cu semnificatiile:

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}$$

Marimea se masoara in Ω^{-1} si se numeste admitanta de intrare cu iesirea scurtcircuitata.

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

Marimea se masoara in Ω^{-1} si se numeste admitanta de iesire cu intrarea scurtcircuitata.

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

Marimea se masoara in Ω^{-1} si se numeste admitanta de transfer intre intrare si iesire cu intrarea scurtcircuitata.

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$$

Marimea se masoara in Ω^{-1} si se numeste admitanta de transfer intre iesire si intrare cu iesirea scurtcircuitata.

Sistemele de ecuatii functionale pot fi scrise si matriceal. Pentru cele trei descrieri prezentate obtinem:

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \|h\| \cdot \begin{Vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} (1)$$

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \|Z\| \cdot \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} (2)$$

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \|Y\| \cdot \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} (3)$$

Cu observatia ca din (2) si (3) rezulta:

$$\|Z\| \cdot \|Y\| = \|I\|$$

De unde rezulta identitatile

$$\|Z\| = \|Y\|^{-1} \ (4)$$

$$\|Y\| = \|Z\|^{-1} \ (5)$$

Relatiile (4) si (5) ne furnizeaza relatiile de echivalare a parametrilor Y$\rightarrow$ Z si Z$\rightarrow$Y