

## Reduceri polinomiale

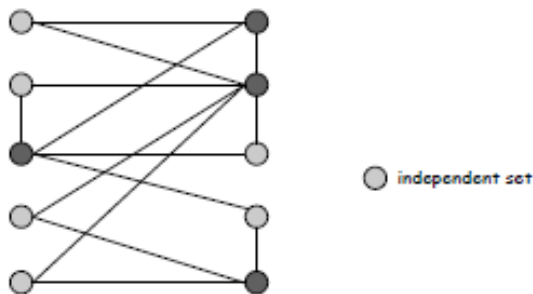
### Echivalenta polinomiala:

Daca  $A \leq_p B \wedge B \leq_p A$ , atunci  $A \equiv_p B$

### Reduceri prin simpla echivalenta (Independent Set $\equiv_p$ Vertex Cover)

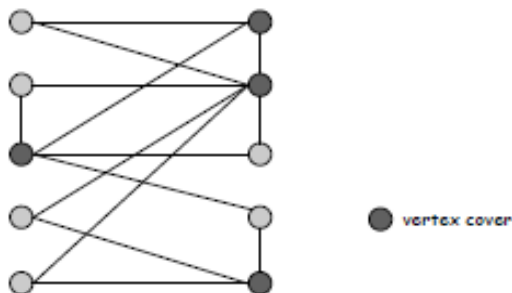
**Independent Set:** Dandu-se un graf  $G = (V, E)$  si un intreg  $k$ , exista un subset  $S$  de noduri a.i.  $|S| \geq k$ , iar fiecare muchie are **cel mult** un capat in  $S$ ?

**Ex:** Pt  $k=6$  – da, exista. Pt  $k=7$  – nu, nu exista.



**Vertex Cover:** Dandu-se un graf  $G = (V, E)$  si un intreg  $k$ , exista un subset  $S$  de noduri a.i.  $|S| \leq k$ , iar fiecare muchie are **cel putin** un capat in  $S$ ?

**Ex:** Pt  $k=4$  – da, exista. Pt  $k=3$  – nu, nu exista.



Aratam ca Independent Set  $\equiv_p$  Vertex Cover aratand ca, pt un  $k$  fixat,  $S$  este independent set  $\Leftrightarrow V-S$  este vertex cover de dimensiune  $\leq |V|-k$ .

Transformarea in timp polinomial a datelor de intrare:

Independent Set	Vertex Cover
$(V,E)$	$(V,E)$
$k$	$ V -k$

$\Rightarrow$  (S independent set  $\Rightarrow V-S$  vertex cover)

- Fie  $S$  independent set si  $(u,v)$  o muchie arbitrara din  $G$
- $S$  independent set  $\Rightarrow u \notin S$  sau  $v \notin S \Rightarrow u \in V-S$  sau  $v \in V-S \Rightarrow V-S$  vertex cover

$\Leftarrow$  (V-S vertex cover  $\Rightarrow S$  independent set)

- Fie  $V-S$  vertex cover si  $(u,v)$  o muchie arbitrara din  $G$

- V-S vertex cover  $\Rightarrow u \in V-S$  sau  $v \in V-S \Rightarrow u \notin S$  sau  $v \notin S \Rightarrow S$  independent set

**Reduceri de la o problema mai “usoara” la una mai “greă” (Vertex Cover  $\leq_p$  Set Cover)**

**Set cover:** Dandu-se o multime U, o colectie  $S_1, S_2 \dots S_m$  de submultimi ale lui U si un intreg k, exista o colectie de cel mult k astfel de submultimi care reunite sa dea U?

Aratam ca Vertex Cover  $\leq_p$  Set Cover construind dintr-o instanta oarecare a problemei Vertex Cover o instanta specifica pt Set Cover, dupa modelul urmator:

Transformarea in timp polinomial a datelor de intrare:

<b>Vertex Cover</b>	<b>Set Cover</b>
$(V,E), k$	$k = k$
	$U = E$
	$S_v = \{ e \in E \mid \exists u \in V \text{ a.i. } e=(u,v) \}$

$\Rightarrow$  (S vertex cover de dimensiune  $\leq k \Rightarrow C = \{ S_v \mid v \in S \}$  set cover de dimensiune  $\leq k$ )

- Fie S vertex cover de dimensiune  $\leq k$  si  $(u,v)$  o muchie arbitrara din G
- S vertex cover  $\Rightarrow u \in S$  sau  $v \in S \Rightarrow S_u \in C$  sau  $S_v \in C$
- Din definitia lui  $S_i$ :  $(u,v) \in S_u, (u,v) \in S_v \Rightarrow C$  set cover

$\Leftarrow$  ( $C = \{ S_v \}$  set cover de dimensiune  $\leq k \Rightarrow S = \{ v \mid S_v \in C \}$  vertex cover de dimensiune  $\leq k$ )

- Fie C set cover de dimensiune  $\leq k$  si  $(u,v)$  o muchie arbitrara din G
- C set cover  $\Rightarrow \exists S_i \in C$  a.i.  $(u,v) \in S_i \Rightarrow i=u$  sau  $i=v \Rightarrow u \in S$  sau  $v \in S \Rightarrow S$  vertex cover