

Algebre Boole-ene
Suport de laborator

- (01) O încuietoare este proiectată cu 10 comutatoare, notate $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$, ca linii de intrare. Încuietorea este deschisă numai când comutatoarele sunt alternativ acționate. Să se scrie o specificație booleană a deschiderii încuietorii.
- (02) Determinați tabele de adevăr pentru următoarele expresii:
- (i) $E = xy + z$;
 - (ii) $F = x'y' + zz'$;
 - (iii) $G = xyz + (x + y)'$;
 - (iv) $H = (xy)' + z$;
 - (v) $I = x'y' + zw$;
 - (vi) $J = xyz + (x + y)' + 1$.
- (03) Calculați dualele expresiilor:
- (i) $U = xy + z(w + x'y')$;
 - (ii) $V = x'y'(1 + x)$;
 - (iii) $W = xyz + (x + y)'$;
 - (iv) $X = g'(ab(c' + d) + e(d' + f)(a + b)')$.
- (04) Determinați o expresie care este egală cu duala sa.
- (05) Stabiliți expresiile complementare ale expresiilor următoare:
- (i) $A = xy + z(w + x'y')$;
 - (ii) $B = x'y'(1 + x)$;
 - (iii) $C = xyz + (x + y)'$.
- (06) Se consideră expresia $X = g'(ab(c' + d) + e(d' + f)(a + b)')$.
- (i) Să se calculeze complementul expresiei X utilizând duala acesteia;
 - (ii) Să se determine complementul expresiei X utilizând legea DeMorgan;
- (07) Verificați următoarele identități utilizând transformările algebrice Boole-ene:
- (i) $x'y' + x'y + xy = x' + y$;
 - (ii) $a'b + b'c' + ab + b'c = 1$;
 - (iii) $y + x'z + xy' = x + y + z$;
 - (iv) $x'y' + y'z + xz + xy + yz' = x'y' + xz + yz'$.
- (08) Verificați următoarele identități utilizând transformările algebrice Boole-ene:
- (i) $ab + bc'd' + a'bc + c'd = b + c'd$;
 - (ii) $wy + w'yz' + wxz + w'xy' = wy + w'xz' + x'yz' + xy'z$;
 - (iii) $AC' + A'B + B'C + D' = (A' + B' + C' + D')(A + B + C + D)$.
- (09) Scrieți sumele și produsele canonice pentru fiecare din funcțiile următoare:
- (i) $f(x,y,z) = \mathbf{m}\Sigma(0,3,6)$;
 - (ii) $g(x,y,z) = \mathbf{M}\Pi(1,2,7)$.

- (10) Știind că $ab = 0$ și $a + b = 1$, utilizați transformările algebrice booleene pentru ca să demonstrați că: $(a + c)(a' + b)(b + c) = bc$.
- (11) Transformați algebric următoarele expresii ca să ajungeți la expresii echivalente dar cu un număr minim de literali:
- (i) $a'c' + a'bc + b'c$;
 - (ii) $(a + b)'(a' + b')$;
 - (iii) $abc + a'c$;
 - (iv) $bc + b(ad + c'd)$;
 - (v) $(b + c' + bc')(bc + ab' + ac)$.
- (12) Utilizând transformările algebrice booleene simplificați expresiile:
- (i) $xy + x'$;
 - (ii) $x'y'(1 + x)$;
 - (iii) $x + y + (x + y)'$;
 - (iv) $xyz + x'yz + xy'z + xyz' + x'$;
 - (v) $xyz + x'yz + y'$;
 - (vi) $xyz + x'(w + z') + yz(w + z')$;
- (13) Reduceți următoarele expresii booleene astfel în cât să aibă numărul indicat de literali:
- (i) $x'y' + xyz + x'y$, (3 literali);
 - (ii) $x + y(z + (x + z)')$, (2 literali);
 - (iii) $w'x(z' + y'z) + x(w + w'yz)$, (1 literal);
 - (iv) $(ab + a'b')(c'd' + cd) + (ac)'$ (4 literali).
- (14) Utilizând teorema DeMorgan exprimați funcția $f = a'bc + b'c' + ab'$
- (i) numai prin SAU și operații de complementare;
 - (ii) numai prin ȘI și operații de complementare.
- (15) Calculați complementul următoarelor expresii:
- (i) $ab' + a'b$;
 - (ii) $(v'w + x)y + z'$;
 - (iii) $wx(y'z + yz') + w'x'(y' + z)(y + z')$;
 - (iv) $(a + b' + c)(a'b' + c)(a + b'c')$.
- (16) Determinați tabelul de adevăr al fiecărei funcții și exprimați fiecare funcție prin sume de mintermi și produse de maxtermi:
- (i) $(xy + z)(y + xz)$;
 - (ii) $(a' + b)(b' + c)$;
 - (iii) $wxy' + wxz' + wxz + yz'$.
- (17) Se consideră funcțiile E și F specificate prin următorul tabel de adevăr:

x	y	z	E	F
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

- (i) Stabiliți lista mintermilor și maxtermilor pentru fiecare funcție;
(ii) Calculați mintermii funcțiilor E' și F'
(iii) Determinați mintermii expresiilor $E + F$ și EF ;
(iv) Exprimați funcțiile E și F prin sume canonice;
(v) Găsiți expresiile pentru cele două funcții care au minimum de literalii.
- (18) Utilizați teoremele algebrei booleene pentru ca să rescrieți expresia următoare într-o nouă formă astfel încât să necesite cât mai puține inversiuni cu puțință (parantezele complementate sunt permise).
 $E = b'c + acd' + a'c + eb' + e(a + c)(a' + d')$.
- (19) Simplificați următoarele expresii prin formarea expresiilor complementare:
(i) $(x + y + z)(x' + y + z)(x + y' + z)$;
(ii) $y'z'(x + y + z)$;
(iii) $(x + y)(x' + y)(z + x)(z' + x)$;
- (20) Simplificați următoarele expresii prin simplificarea expresiilor complementare:
(i) $(x + y + z)(x' + y + z)(x + y' + z)$;
(ii) $y'z'(x + y + z)$;
(iii) $(x + y)(x' + y)(z + x)(z' + x)$;
- (21) Simplificați următoarele expresii prin complementarea expresiilor simplificate:
(i) $(x + y + z)(x' + y + z)(x + y' + z)$;
(ii) $y'z'(x + y + z)$;
(iii) $(x + y)(x' + y)(z + x)(z' + x)$;
- (22) Determinați tabelul de adevăr pentru fiecare dintre următoarele expresii Boole-ene:
(i) $xyz + xy'z'$;
(ii) $abc + ab'c' + a'b'c'$;
(iii) $a(bc' + b'c)$;
(iv) $(a + b)(a + c)(a' + b')$.
- (23) Utilizând proprietățile algebrilor Boole-ene, cercetați următoarele identități:
(i) $ab' + bc' + ca' = a'b + b'c + c'a$;
(ii) $ab + a'c + bcd = ab + a'c$.
- (24) Calculați complementele următoarelor funcții:
(i) $f(a, b, c) = a + bc$;
(ii) $f(a, b, c, d) = (a + b)(a'c + d)$;
(iii) $f(a, b, c, d) = ab + b'c + ca'd$.
Dovediți că rezultatele sunt corecte arătând că: $ff' = 0$ și $f + f' = 1$.
- (25) Verificați următoarele identități, utilizând proprietățile algebrilor Boole-ene:
(i) $ab + c'd' + a'bcd' + ab'c'd = (a + d)(b + c')$;
(ii) $(a + b')(b + c')(c + a) = (a' + b)(b' + c)(c' + a)$;
(iii) $(a + b)(b + c)(c + a) = (a' + b')(b' + c')(c' + a')$;
(iv) $ab + a'b'c = (c + a)(c + b)$.
- (26) (i) Dacă $f = x \oplus y$, exprimați f în termenii $x, x', y, y', +$ și \cdot ;
(ii) Dovediți că are loc identitatea $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

- (iii) Demonstrați că dacă $x \oplus y = z$, atunci $x \oplus z = y$ și $x \oplus y \oplus z = 0$;
- (iv) Dovediți că $x \oplus y = x + y$, dacă xy ;
- (v) Arătați că $(a + b) \oplus (a + c) = a'(b \oplus c)$;
- (vi) Demonstrați că au loc identitățile: $x + y = x \oplus y \oplus xy$ și $x + y = x \oplus x'y$.

(27) Demonstrați:

- (i) $x' \oplus y = x \oplus y'$;
- (ii) $x \oplus y = x' \oplus y'$;
- (iii) $xy' + x'y = (xy + x'y')$.

- (28) (i) Se consideră funcția $f(w, x, y, z) = w + (x + yz)(y' + xz)$. Stabiliți o exprimare în sumă de produse pentru această funcție prin desfacerea parantezelor.
- (ii) Scrieți expresia duală pentru funcția $f(w, x, y, z)$, notată $D[f(w, x, y, z)]$, utilizând exprimarea în sumă de produse determinată anterior.
- (iii) Calculați o expresie în produse de sume pentru $f(w, x, y, z)$ prin desfacerea parantezelor expresiei găsite la punctul (ii) și determinând duala.

- (29) (i) Demonstrați că $D[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dacă și numai dacă $f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1', x_2', \dots, x_n')$;
- (ii) Determinați o funcție care satisface condițiile de la punctul (i) având numărul cel mai mic de variabile (n minim, $n \geq 2$).
- (iii) Demonstrați că $D[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = f'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dacă și numai dacă $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1', x_2', \dots, x_n')$;
- (iv) Determinați o funcție care satisface condițiile de la punctul (iii) având numărul cel mai mic de variabile (n minim, $n \geq 2$).

(30) Converteți următoarele expresii în sume de produse și produse de sume:

- (i) $(ab + c)(b + c'd)$;
- (ii) $x' + x(x + y')(y + z')$;
- (iii) $(a + bc' + cd)(b' + ef)$;

(31) Utilizați teorema DeMorgan pentru complementarea următoarelor expresii logice:

- (i) $Z = x \cdot (y + w \cdot v)$;
- (ii) $Z = x \cdot y \cdot w + y \cdot (w' + v')$;
- (iii) $Z = x' + y \cdot Y$;
- (iv) $F = (AB + CD)'$;
- (v) $G = ((A + B)'(C' + D))'$;
- (vi) $H = ((A + B)'(C' + D))'$;
- (vii) $J = (((abc)' \cdot (uvw)')' + ((pqr)' \cdot (stu)'))'$;

(32) O încăpere are trei uși A, B și C . Fiecare dintre cele trei uși are câte un comutator notat respectiv prin a, b și c , care poate să aprindă ori să stingă lumina în încăpere. Acționarea oricărui comutator va schimba lumina în încăpere. Presupunând că lumina este stinsă în încăpere atunci când $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ determinați un tabel de adevăr pentru funcția *Lumină* și stabiliți o ecuație logică pentru această funcție.

(33) Utilizând proprietățile algebrelor Boole-ene, verificați următoarele identități:

- (1) $(X + Y)(X + Y') = X$;
- (2) $XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$;

- (3) $(X + Y') = X \cdot Y$;
(4) $(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y + Z$;
(5) $(X + Y + Z) (X + Y + Z') = X + Y$.

(34) Utilizați DeMorgan pentru complementarea următoarelor expresii logice:

$$\begin{aligned}K &= x \cdot (y + w \cdot v); \\P &= x \cdot y \cdot w + y \cdot (w' + v'); \\Q &= x' + y \cdot z; \\R &= (uv + wz)'; \\S &= ((a + b)(c' + d'))'; \\T &= ((a + b)(c' + d))'; \\Z &= (((abc)' \cdot (uvw)')' + ((pqr)' \cdot (stu)'))';\end{aligned}$$