

## Utilizarea diagramei Karnaugh în minimizarea funcțiilor logice

Diagramele Karnaugh sunt reprezentări grafice, simple ale funcțiilor și expresiilor logice. Aceste diagrame permit o reprezentare convenabilă a funcțiilor cu un număr relativ mic de variabile (5 - 6 variabile reprezintă o limită rezonabilă a metodei) și sunt mult utilizate în calculul manual al formelor minimize.

### 1. Introducere

Aceste diagrame sunt foarte utile pentru generarea manuală a setului complet de implicații de primii ai unei funcții scalare dar și pentru determinarea acoperirii optime, în cazurile mai simple. Diagramele Karnaugh sunt forme tabelare rectangulare, având  $2^k$  celule ( $k$  fiind numărul de variabile al diagramei), în care fiecare celulă a diagramei este prin identificată printr-o etichetă orizontală și una verticală. Etichetele sunt cuvinte ale codului binar reflectat Gray.

Codul Gray cel mai simplu este cel cu un singur rang. Pentru acest cod sunt doar două cuvinte: 0 și 1. Codul Gray cu două ranguri are patru cuvinte: 00, 01, 11 și 10.

Printre proprietățile generice ale codului Gray, invariante cu numărul de ranguri, sunt de reținut câteva remarcabile:

- Diferențierea unică între două cuvinte succesive. Două cuvinte succesive ale codului Gray se deosebesc prin cel mult un rang.
- Primul și ultimul cuvânt de cod satisfac, deasemenea, această proprietate. Acest fapt conferă ciclicitate codului Gray.
- Cuvintele codului Gray cu  $n$  ranguri se deduc din cuvintele codului Gray cu  $n-1$  ranguri printr-o generare pseudo-simetrică.

**Exemplul 1.1.** Se consideră codul Gray cu două ranguri : 00, 01, 11, 10.

Generarea codului Gray cu trei ranguri se poate face astfel:

Cuvintele codului Gray cu două ranguri sunt modificate prin adăugarea unui rang în stânga rangurilor existente iar valoarea acestui rang suplimentar este 0 pentru toate cuvintele de cod:

000, 001, 011, 010 |

În continuare, se generează în dreapta barei verticale, pseudo-simetric celelalte cuvinte de cod care vor avea valoarea 1 a rangului suplimentar introdus:

000, 001, 011, 010 | 110, 111, 101, 100.

În concluzie, codul Gray cu trei ranguri are cuvintele de cod:

000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

◇

Doi mintermi (maxtermi) se spune că sunt logic adiacenți atunci când aceștia diferă printr-o singură variabilă.

Aceasta revine la a spune, în fapt, că o variabilă ( $u$  spre exemplu) apare într-un minterm asertată ( $u$ ) iar în celălalt complementată ( $u'$ ).

În diagramele Karnaugh, datorită codului Gray, două celule învecinate (în mod imediat ori extins, prin exterior) atât pe verticală cât și pe orizontală diferă prin paritatea unei singure variabile.

Dacă vecinătatea este orizontală, atunci variabila care va avea paritate diferită (în sensul că, apare la o celulă asertată în timp ce la cealaltă celulă apare complementată) aparține codurilor orizontale ale celulelor.

Similar pentru vecinătatea verticală. Doi astfel de mintermi se pot combina și produc un implicant (având o variabilă mai puțin) în baza proprietăților algebrilor Boole-ene.

Cu alte cuvinte, diagramele Karnaugh transformă adiacența logică într-o adiacență sesizabilă vizual a mintermilor.

Această trăsătură fundamentală este observabilă atunci când se traversează diagrama, pe direcție verticală (în lungul unei coloane) ori pe direcție orizontală (de-a lungul unei linii).

Prin proprietatea aceasta se facilitează mult generarea implicantilor primi (maximali).

Generarea implicantilor primi, pentru un anumit minterm, are loc prin cuprinderea unui număr de celule într-o grupare materializată printr-un contur (închis ori prin extindere închis) care delimitează gruparea respectivă.

|          |   |          |   |
|----------|---|----------|---|
|          |   | <b>a</b> |   |
|          |   | 0        | 1 |
| <b>b</b> | 0 | 0        | 2 |
|          | 1 | 1        | 3 |

(a) Două variabile

|          |   |           |    |    |    |
|----------|---|-----------|----|----|----|
|          |   | <b>ab</b> |    |    |    |
|          |   | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>c</b> | 0 | 0         | 2  | 6  | 4  |
|          | 1 | 1         | 3  | 7  | 5  |

(b) Trei variabile

|           |    |           |    |    |    |
|-----------|----|-----------|----|----|----|
|           |    | <b>ab</b> |    |    |    |
|           |    | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>cd</b> | 00 | 0         | 4  | 12 | 8  |
|           | 01 | 1         | 5  | 13 | 9  |
|           | 11 | 3         | 7  | 15 | 11 |
|           | 10 | 2         | 6  | 14 | 10 |

(c) Patru variabile

|           |    |            |     |     |     |            |     |     |     |
|-----------|----|------------|-----|-----|-----|------------|-----|-----|-----|
|           |    | <b>abc</b> |     |     |     | <b>abc</b> |     |     |     |
|           |    | 000        | 001 | 011 | 010 | 100        | 101 | 111 | 110 |
| <b>de</b> | 00 | 0          | 4   | 12  | 8   | 16         | 20  | 28  | 24  |
|           | 01 | 1          | 5   | 13  | 9   | 17         | 21  | 29  | 25  |
|           | 11 | 3          | 7   | 15  | 12  | 19         | 23  | 31  | 27  |
|           | 10 | 2          | 6   | 14  | 10  | 18         | 22  | 30  | 26  |

(d) Cinci variabile

|            |     |            |     |     |     |            |     |     |     |
|------------|-----|------------|-----|-----|-----|------------|-----|-----|-----|
|            |     | <b>abc</b> |     |     |     | <b>abc</b> |     |     |     |
|            |     | 000        | 001 | 011 | 010 | 100        | 101 | 111 | 110 |
| <b>def</b> | 000 | 0          | 8   | 24  | 16  | 32         | 40  | 56  | 48  |
|            | 001 | 1          | 9   | 25  | 17  | 33         | 41  | 57  | 49  |
|            | 011 | 3          | 11  | 27  | 19  | 35         | 43  | 59  | 51  |
|            | 010 | 2          | 10  | 26  | 18  | 34         | 42  | 58  | 50  |
| <b>def</b> | 100 | 4          | 12  | 28  | 20  | 36         | 44  | 60  | 52  |
|            | 101 | 5          | 13  | 29  | 21  | 37         | 45  | 61  | 53  |
|            | 111 | 7          | 15  | 31  | 23  | 39         | 47  | 63  | 55  |
|            | 110 | 6          | 14  | 30  | 22  | 38         | 46  | 62  | 54  |

(e) Șase variabile

Figura 1.1. Diagramele Karnaugh cele mai utilizate.

Locația unui minterm, în diagrama Karnaugh, are în imediata vecinătate locațiile mintermilor potențiali adiacenți.

În figura 1.1 sunt prezentate diagramele Karnaugh utilizate curent. Așa cum se poate remarca din figura 1.1, celulele din diagramele Karnaugh sunt identificabile atât, prin indicii coloanelor și liniilor, cât și prin valorile zecimale unice înscrise în respectivele celule.

Celula din prima coloană (indice 0) și prima linie (indice 0) este etichetată în ordine 00 iar celula din prima coloană și a doua linie (indice 1) este, similar, etichetată 01, spre exemplu, în figura 1.1 (a).

Indicii liniilor și coloanelor sunt interpretați simbolic utilizând corespondența bijectivă care asociază, pozițional, variabila respectivă complementată unei valori zero și respectiv asociază variabila respectivă asertată unei valori unu.

Astfel, prima coloană are eticheta  $a'$  iar cea de-a doua coloană are eticheta literală, simbolică,  $a$ , spre exemplu, în figura 1.1 (a).

Similar, se poate remarca faptul că prima linie este etichetată simbolic prin literalul  $c'd'$ , în timp ce a doua linie are eticheta simbolică  $c'd$ , în figura 1.1 (c) corespunzătoare diagramei Karnaugh pentru patru variabile.

Valoarea zecimală din interiorul celulelor este determinată prin *vectorul ordonat al indicilor de coloană și respectiv linie*.

Astfel, celula din ultima coloană și prima linie este unic identificabilă numeric prin eticheta obținută din combinația 10 (simbolic  $ab'$ ), în figura 1.1 (a). Similar, celula din prima coloană și a doua linie, în figura 1.1 (a), este unic identificabilă numeric prin eticheta 01 (simbolic  $a'b$ ), etc.

Acest procedeu este corespunzător extensibil și pentru diagramele Karnaugh pentru trei sau mai multe variabile. Celula din a prima coloană și doua linie a diagramei Karnaugh cu patru variabile (figura 1.1 (c)) este identificabilă prin eticheta 0001 (simbolic  $a'bc'd$ ), spre exemplu.

Etichetelor celulelor li se atașează, în ordine ponderi. Aceste ponderi sunt, puteri în baza doi. În cazul diagramei Karnaugh pentru două variabile (din figura 1.1(a)), ponderile sunt  $2^1, 2^0$ , spre exemplu. Iar, în cazul diagramei pentru cinci variabile (figura 1.1 (d)) ponderile, sunt în ordine  $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ , asociate variabilelor  $abcde$ , respectiv.

Aceste ponderi fac posibilă asocierea unei valori zecimale unice fiecărei celule. Pentru fiecare diagramă, din figura 1.1, este înscrisă, în fiecare celulă, valoarea zecimală corespunzătoare. Valorile zecimale înscrise în celulele diagramelor sunt identice cu indicii mintermilor corespunzători respectivelor celule. Această asociere ușurează mult completarea corectă a diagramelor Karnaugh.

Celula cu valoarea zecimală 47, spre exemplu, din diagrama figurii 1.1 (e) corespunde mintermului  $m_{47}$  notat simbolic prin produsul variabilelor  $ab'cdef$ , având respectiv codul binar 101111.

Diagrama Karnaugh pentru funcțiile cu cinci variabile (figura 1.1(d)), a fost alcătuită din două diagrame de patru variabile fiecare, pentru simplitatea utilizării în acest caz.

Diagrama din partea dreaptă a figurii 1.1(d) corespunde atribuirii  $a = 0$  iar diagrama din partea stângă corespunde atribuirii  $a = 1$ . Cele două diagrame sunt într-o relație de adiacență. Acesta este motivul pentru care s-au utilizat două diagrame pentru patru variabile chiar dacă sunt specificate cinci variabile.

Similar, în cazul diagramei Karnaugh pentru șase variabile, privite atent cele patru diagrame pentru patru variabile fiecare sunt într-o relație de adiacență asemănătoare celei dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile ( $a$  și  $d$ ).

## 2. Reprezentarea funcțiilor scalare utilizând diagramele Karnaugh

|          |   |           |    |    |    |
|----------|---|-----------|----|----|----|
|          |   | <b>ab</b> |    |    |    |
|          |   | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>c</b> | 0 | 1         |    |    | 1  |
|          | 1 | 1         |    |    |    |

$$f(a, b, c) = m_0 + m_1 + m_4.$$

Figura 2.1. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcții specificate prin mintermi.

Celulelor digramelor Karnaugh le sunt atribuite valori 0 sau 1 după cum sunt definite funcțiile reprezentate.

**Exemplul 2.1.** Fie funcția  $f(a, b, c) = m_0 + m_1 + m_4$ .

O reprezentare utilizând o diagramă Karnaugh pentru trei variabile ( $a$ ,  $b$  și  $c$ ) va avea trei unități, corespunzătoare celor trei mintermi ai funcției, așa cum se poate vedea din figura 2.1. Celelalte celule se presupune, implicit, că au valoarea 0. Din rațiuni de simplitate se preferă doar evidențierea celulelor care au valoarea 1.

◇

În mod uzual nu sunt reprezentate explicit valorile zero ale funcțiilor în diagramele Karnaugh. Dar pentru o prezentare completă se arată, în continuare, un exemplu în care o funcție este reprezentată prin maxtermi (sunt semnificative, la această reprezentare, valorile zero ale respectivei funcții.)

|           |    |           |    |    |    |
|-----------|----|-----------|----|----|----|
|           |    | <b>ab</b> |    |    |    |
|           |    | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>cd</b> | 00 |           | 0  |    |    |
|           | 01 | 0         |    |    | 0  |
|           | 11 |           |    |    |    |
|           | 10 |           |    | 0  | 0  |

$$g(a, b, c, d) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$$

Figura 2.2. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcții specificată prin maxtermi.

**Exemplul 2.2.** Fie funcția  $g(a, b, c, d) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$ .

O reprezentare a acestei funcții utilizând o diagramă Karnaugh pentru patru variabile ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  și  $d$ ) va avea cinci celule inițializate cu valoarea 0, tot atâtea câți maxtermi sunt utilizați în specificarea funcției (figura 2.2).

Celelalte celule se presupune, implicit ca având valoarea 1. Tot din rațiuni de simplitate se face doar marcarea celulelor pentru care funcția are valoarea 0.

◇

Atunci când funcțiile sunt specificate prin sume de produse ne-canonice (implicanți oarecari) se poate proceda în două maniere:

(a) termenii necanonici sunt expandați în termeni canonici (mintermi) după care completarea diagramei se face ca în exemplul 2.1, sau

(b) diagrama Karnaugh este completată prin considerarea ariilor corespunzătoare termenilor produse necanonice, așa cum se arată în Exemplul 2.3.

|          |   |           |    |    |    |
|----------|---|-----------|----|----|----|
|          |   | <b>ab</b> |    |    |    |
|          |   | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>c</b> | 0 | 1         |    |    | 1  |
|          | 1 |           |    |    | 1  |

$$h(a, b, c) = ab' + b'c'$$

Figura 2.3. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcții specificate prin implicanți necanonici.

**Exemplul 2.3.** Se consideră funcția  $h(a, b, c) = ab' + b'c'$ .

În continuare se va utiliza indicele zecimal pentru identificarea fiecărei celule din diagrama Karnaugh (figura 1.1 (b)).

Variabila  $a$  corespunde mulțimii celulelor  $\{4, 5, 6 \text{ și } 7\}$ . Se poate afirma, cu alte cuvinte, toate celulele pentru care  $a = 1$ .

Pentru  $b'$  vor fi considerate celulele din mulțimea  $\{0, 1, 4 \text{ și } 5\}$  (toate celulele unde  $b' = 1$ ). Atunci, pentru produsul  $ab'$  va corespunde intersecției celor două mulțimi specificate anterior:  $\{4, 5, 6 \text{ și } 7\} \cap \{4, 5, 6 \text{ și } 7\} = \{4 \text{ și } 5\}$ .

Similar, pentru produsul  $b'c'$  se vor intersecta mulțimile de celule  $\{0, 1, 4 \text{ și } 5\}$  și  $\{0, 2, 6 \text{ și } 4\}$  (cea de-a doua mulțime corespunde celulelor pentru care  $c' = 1$ ). În consecință, pentru  $b'c'$  se va utiliza mulțimea  $\{0 \text{ și } 4\}$ . În final se reunesc (+) cele două mulțimi de celule determinate:  $\{4 \text{ și } 5\} \cup \{0 \text{ și } 4\} = \{0, 4 \text{ și } 5\}$ . Funcția va fi reprezentată prin doar trei unități, plasate în cele trei celule așa cum se poate vedea în figura 2.3.

◇

Ca o concluzie, față de exemplul 2.3, se poate afirma că pentru o funcție (cu  $n$  variabile) descrisă, între alți implicanți, printr-un implicant care are doar  $p$  variabile ( $p < n$ ) atunci, se vor inițializa prin 1, în total  $2^{n-p}$  celule din respectiva diagramă Karnaugh.

Următorul exemplu abordează o problemă similară dar în cazul unei funcții specificate prin implicați (termeni produs) necanonici.

|          |   |           |    |    |    |
|----------|---|-----------|----|----|----|
|          |   | <b>ab</b> |    |    |    |
|          |   | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <b>c</b> | 0 |           | 0  |    |    |
|          | 1 |           | 0  | 0  |    |

$$j(a, b, c) = (a + b')(b' + c')$$

Figura 2.4. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcții specificate prin implicați necanonici.

**Exemplul 2.4.** Se consideră funcția  $j(a, b, c) = (a + b')(b' + c')$ .

Procedeeul de reprezentare printr-o diagramă Karnaugh pentru produse de implicați necanonici stabilește, pentru început celulele din diagramă în care funcția are valori 0. Astfel, pentru ca primul produs să fie 0 trebuie ca atât  $a = 0$  cât și ca  $b' = 0$ , cu alte cuvinte  $a = 0$  și  $b = 1$ , ceea ce desemnează a doua coloană din stânga diagramei Karnaugh din figura 2.4.

Cel de-al doilea implicat  $b' + c' = 0$ , conduce la concluzia  $b = 1$  și  $c = 1$ , ceea ce indică intersecția dintre coloanele  $b = 1$  și linia  $c = 1$  rezultând încă o celulă inițializată prin zero (celula  $abc = 0$ ).

Reprezentarea acestei funcții printr-o diagrama Karnaugh corespunzătoare este înfățișată în figura 2.4.

◇

### 3. Minimizarea funcțiilor scalare reprezentate prin sume de produse

Minimizarea exactă a funcțiilor scalare reprezentate prin diagramele Karnaugh va urma teorema Quine. Astfel, minimizarea are două etape:

- Calculul mulțimii tuturor implicantilor primi, și
- Determinarea soluțiilor corespunzătoare mulțimii tuturor implicantilor.

Stabilirea implicantilor primi ai unei funcții reprezentate printr-o diagramă Karnaugh este mult facilitată de proprietățile de adiacență geometrică ale acestei diagrame.

Pentru o mai clară înțelegere a minimizării funcțiilor logice combinaționale scalare utilizând diagramele Karnaugh se consideră un exemplu simplu.

Exemplul 3.1. Se consideră funcția  $h(u,v) = m_0 + m_2 + m_3$ . Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcții cu două variabile este prezentată, pentru o simplă urmărire a procedurii, în figura 3.1 (a) iar reprezentarea funcției  $h$  este prezentată în figura 3.1(b).

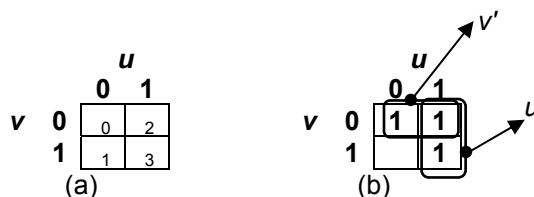


Figura 3.1.

(a) Diagrama Karnaugh generică pentru funcții cu două variabile.

(b) Reprezentarea funcției din exemplul 3.1 printr-o diagramă Karnaugh.

Diagrama generică are în fiecare din cele patru celule înscris un număr, corespunzător indexului mintermului asociat respectivei celule. Astfel, deoarece funcția  $h$  are trei mintermi, s-au înscris, corespunzător, trei unități pentru cei trei mintermi (figura 3.1(b)).

Cele două contururi din figura 3.1(b) vin să puncteze asocierile, în vederea minimizării funcției, dintre cei trei mintermi. Cei trei mintermi sunt  $m_0 = u'v'$ ,  $m_2 = uv'$  și  $m_3 = uv$ . Conform primului contur, cel orizontal, se scrie expresia:  $m_0 + m_2 = u'v' + uv' = (u' + u)v' = v'$ .

Similar, pentru cel de-al doilea contur, se scrie expresia:  $m_3 + m_2 = uv + uv' = (v' + v)u = u$ . De remarca faptul că unitatea corespunzătoare mintermului  $m_2 = uv'$ , a fost implicată în două contururi distincte datorită proprietății generale  $a + a = a$ .

Se poate concluziona asupra unei proprietăți esențiale a diagramelor Karnaugh:

- o pereche de unități adiacente cuprinse într-un contur produc un implicant care are o variabilă mai puțin. Variabilele care s-au păstrat au paritate constantă în conturul respectiv (adică, sunt fie constant asertate, fie constant complementate).

Fiecare contur a determinat câte un implicant, respectiv  $p = v'$  și  $q = u$ . Se poate ușor constata faptul că ambii implicantii sunt primi (funcția are doar două variabile).

Matricea incidenței implicantilor primi, pentru această funcție, arată astfel:

Tabelul 3.1  
Matricea incidenței funcției  
 $h(u,v) = m_0 + m_2 + m_3$ .

|     | $m_0$ | $m_2$ | $m_3$ |     |
|-----|-------|-------|-------|-----|
| $p$ | *     | *     |       | $e$ |
| $q$ |       | *     | *     | $e$ |

Se remarcă, în tabelul 3.1, faptul că atât  $p$  cât și  $q$  sunt implicați primi esențiali (mintermul  $m_0$  este acoperit în exclusivitate de implicantul prim  $p$ , iar mintermul  $m_3$  este în aceeași relație cu implicantul prim  $q$ ). S-au scris cu caractere îngroșate unitățile care desemnează respectivul implicant prim ca fiind esențial. Astfel, în dreptul intersecției dintre coloana  $m_0$  și linia  $p$ , unitatea respectivă este îngroșată, spre exemplu.

În coloana din extremitatea dreaptă a tabelului implicaților primi s-a marcat prin caracterul  $e$ , această proprietate a implicaților primi.

Rezultă, în final, această expresie minimizată pentru funcția considerată:  $h(u,v) = u + v'$ .

◇

Așa cum s-a putut vedea în exemplul 3.1 toate contururile desenate peste două unități vecine, dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile, au produs doi implicați primi, în acest caz.

Obținerea mulțimii tuturor implicaților primi, dintr-o diagramă Karnaugh, se realizează prin determinarea tuturor contururilor maxime, în diagrama respectivă, care pot fi atașate fiecărei celule marcate (prin 1 ori prin 0, după cum s-a realizat reprezentarea). În exemplul 3.1 s-au putut trasa doar două contururi peste cele trei unități din diagramă.

După cum s-a putut remarca, din figura 3.1(b), atunci când două unități (învecinate) sunt prinse într-un contur rezultă, în general, un implicant care are o variabilă mai puțin. Variabila redusă corespunde variabilei care în respectivul contur, cu două unități, își schimbă paritatea (adică, apare atât asertată cât și complementată).

Un contur, în general, va genera un implicant care va păstra doar variabilele care au aceeași paritate de-alungul conturului respectiv.

Contururile, în general, pot include o unitate, două unități, patru unități, 16 unități, etc în general o expresie de forma  $2^p$ . Din rațiuni de natură pragmatică se recomandă să se utilizeze diagramele Karnaugh pentru funcții al căror număr de variabile  $n$  să fie relativ mic,  $n < 8$ .

Exemplul următor introduce utilizarea diagramei Karnaugh pentru minimizarea funcțiilor cu trei variabile.

Exemplul 3.2. Se consideră funcția  $f(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ .

În figura 3.2 (a) este prezentată diagrama Karnaugh generică, pentru funcțiile cu trei variabile.

Astfel, deoarece funcția  $f$  este reprezentată prin șase mintermi, s-au înscris, corespunzător, șase unități pentru cei șase mintermi (figura 3.2(b)).

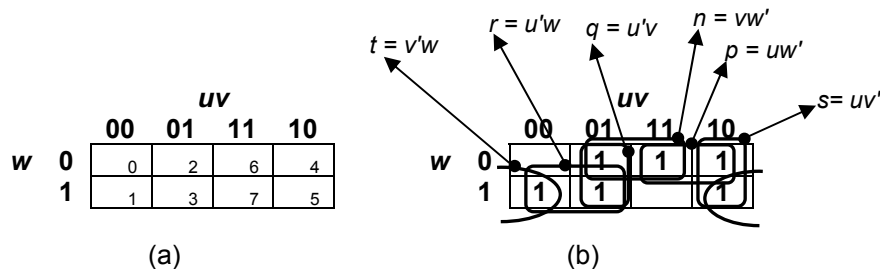


Figura 3.2.

- (a) Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcțiile cu trei variabile.
- (b) Diagrama Karnaugh pentru funcția din exemplul 3.2.

Contururile desenate în figura 3.2(b) epuizează toate posibilitățile de grupare de unități, două câte două, atașate fiecărei unități. Cu alte cuvinte, s-au trasat prin fiecare unitate din diagramă toate contururile maximale posibile.

Este introdus și un contur deosebit (pentru cele două unități aflate în extremitățile ultimei linii). Acesta sugerează cuprinderea celor două unități (corespunzătoare mintermilor  $m_1$  și  $m_5$ ) printr-un contur generalizat. Acest contur extins, generalizat (prin exteriorul diagramei) este trasat în baza vecinătății unităților respective (ciclicitatea codului Gray).

Implicanții generați prin aceste contururi sunt etichetați astfel:

$$n = m_2 + m_6, p = m_6 + m_4, q = m_2 + m_3, r = m_1 + m_3, s = m_4 + m_5, t = m_1 + m_5.$$

Acești implicanți au următoarele expresii algebrice:

$$n = vw', p = uw', q = u'v, r = u'w, s = uv', t = v'w.$$

Mulțimea implicanților generați este maximă. Nu mai există alți implicanți, pentru această funcție, în afară de aceștia (nu se mai pot genera alte contururi).

Toți implicanții generați sunt primi întrucât nu există alți implicanți ori reuniuni de implicanți care să-i conțină, așa cum se poate repede dovedi (contururile sunt fiecare, în parte, maxime).

Tabelul 3.2 al incidențelor dintre implicanții primi și mintermii acestei funcții arată astfel:

*Tabelul 3.2*

|     | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n$ |       | *     |       |       |       | *     |
| $p$ |       |       |       | *     |       | *     |
| $q$ |       | *     | *     |       |       |       |
| $r$ | *     |       | *     |       |       |       |
| $s$ |       | *     | *     |       |       |       |
| $t$ |       |       |       |       | *     | *     |

Implicantul  $r$  este esențial, deoarece acoperă în exclusivitate mintermul  $m_1$ , așa cum se poate remarca în tabelul 3.2.

Similar, implicantul  $p$  este esențial (acoperă în exclusivitate mintermul  $m_4$ ), după cum și implicantul  $t$  este esențial (acoperă în exclusivitate mintermul  $m_5$ ).

Acești trei implicanți primi esențiali vor face parte din orice acoperire minimală iredundantă a funcției  $f$ . În tabelul implicanților s-au marcat implicanții primi esențiali prin caracterul  $e$  plasat în stânga tabelului, în dreptul liniilor respective.

Se aplică metoda lui Petrick tabelului cu implicanți primi.

Clauza care stabilește acoperirea primului minterm  $m_1$ , este  $r$ .

În mod asemănător, se poate deduce clauza relativă la cel de-al doilea minterm  $m_2$ . Aceasta este  $n + q + s$ .

Similar, clauza care stabilește acoperirea mintermului  $m_3$ , este  $q + r + s$ , după cum clauza care determină acoperirea mintermului  $m_6$  este  $n + p + t$ .

Clauza mintermului  $m_5$ , este  $t$ , iar clauza mintermului  $m_4$ , este  $p$ .

Produsul lui Patrick, al clauzelor de acoperire ale fiecărui minterm, arată astfel:

$$r(n + q + s)(q + r + s)pt(n + p + t) = 1,$$

Se poate remarca:

$$r(q + r + s) = r$$

și

$$t(n + p + t) = t,$$



cea ce micșorează sensibil efortul de calcul Boole-an al produsului de sume, deoarece rămâne de calculat doar:

$$r(n + q + s)pt = 1,$$

rezultând în final:

$$nprt + pqrt + prst = 1.$$

În consecință, pentru această funcție, sunt posibile trei acoperiri prime iredundante având aceeași cardinalitate:

- (a)  $f(u, v, w) = vw' + uw' + u'w + v'w$ , (corespunzător termenului  $nprt$ );
- (b)  $f(u, v, w) = uw' + u'v + u'w + v'w$ , (corespunzător termenului  $pqrt$ );
- (c)  $f(u, v, w) = uw' + uv' + u'w + v'w$ , (corespunzător termenului  $prst$ ).

◇

Exemplul care urmează vizează utilizarea, în continuare, a diagramei Karnaugh pentru trei variabile și introduce alte contururi tipice pentru această diagramă.

Exemplul 3.3. Patru funcții Booleene  $f, g, h$  și  $j$  sunt definite după cum urmează:

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6, \\ g(u, v, w) &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7, \\ h(u, v, w) &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7, \\ j(u, v, w) &= m_1 + m_2 + m_4 + m_7. \end{aligned}$$

Cele patru funcții sunt reprezentate prin diagramele Karnaugh corespunzătoare din figura 3.3 (a), (b), (c) și respectiv (d).

Pentru funcția  $f$  sunt desenate două contururi, ambele cu câte patru unități, așa cum se poate remarca în figura 3.3 (a).

Primul contur, care cuprinde prima linie din diagramă, poate fi considerat ca fiind compus din reuniunea (suma) a două contururi vecine, adiacente logic, fiecare cu câte două unități, de forma:

$$(m_0 + m_2) + (m_6 + m_4) = (u'w') + (uw') = w'.$$

Se poate remarca faptul că expresiile anterioare,  $u'w'$  și  $uw'$ , sunt adiacente logic (diferă printr-o singură variabilă ( $u$ ) care în prima expresie este complementată, în timp ce în cea de-a doua este asertată).

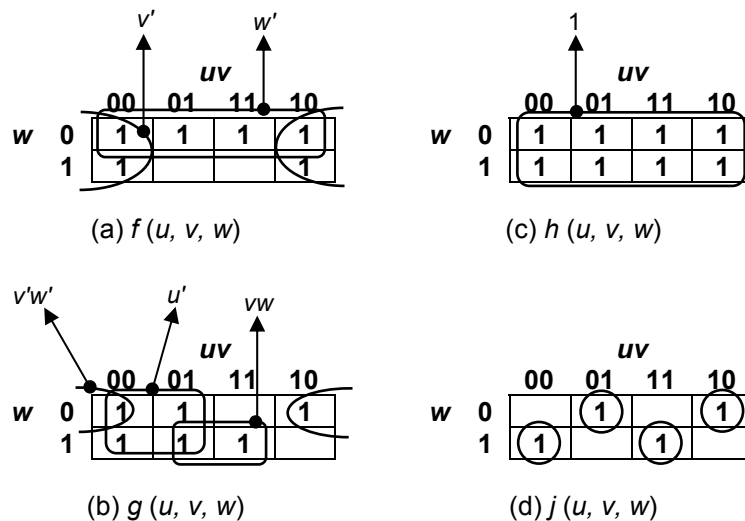


Figura 3.3. Diagramele Karnaugh pentru funcțiile  $f, g, h$  și  $j$  din exemplul 3.3.

Acest fapt conduce la concluzia că două contururi distincte adiacente, cu câte două unități fiecare se pot grupa sub un contur desenat peste cele patru unități respective. Conturul rezultat va produce un implicant care va avea două variabile mai puțin. Un astfel de contur este, adesea, numit contur linie (ori coloană).

Similar, conturul care cuprinde, de asemenea, patru unități format prin exteriorul diagramei (contur extins) peste cele două coloane din marginile diagramei, poate fi considerat ca fiind alcătuit din reunirea a două contururi adiacente care închid fiecare câte două unități:

$$(m_0 + m_1) + (m_4 + m_5) = (u'v') + (uv') = v'.$$

Contururile cu câte patru celule adiacente imediat ori prin extensie de forma celui descris se numesc adesea careuri.

În concluzie, se poate observa că un contur cu patru unități va crea un implicant care păstrează doar două variabile, acelea care au paritate constantă în conturul respectiv.

Se poate observa, pentru reprezentarea funcției  $f$  din figura 3.3.(a), că nu există alte contururi, mai mari care să includă (cuprindă) contururile existente și nici nu există contururi distincte de cele deja trasate.

Aceasta arată, pe de-o parte, că aceste contururi corespund unor *implicanți primi* (nu există alte contururi mai mari care să le includă pe acestea). Iar, pe de-altă parte, faptul că nu mai există alte contururi distincte, afară de cele deja trasate, arată *completitudinea mulțimii implicanților primi* desemnați de respectivele contururi.

În final, se poate realiza, cu ușurință, că funcția  $f$  (figura 3.3.(a)) are forma (sumă de produse) minimizată, unică:

$$f(u, v, w) = w' + v'.$$

Funcția  $g$  (figura 3.3.(b)) are un contur cu patru unități care poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi cuprinzând câte două unități, respectiv:

$$(m_0 + m_2) + (m_1 + m_3) = (u'w') + (u'w) = u'.$$

Celelalte două contururi sunt, fiecare, cu câte două unități:

$$(m_0 + m_4) = v'w'$$

și respectiv

$$(m_3 + m_7) = vw.$$

Privitor la calitatea acestor implicanți de a fi primi, se poate realiza imediat că nu se pot trasa contururi care să includă contururile existente. Iar, în ceea ce privește completitudinea mulțimii implicanților primi, este limpede că nu sunt posibile alte contururi distincte de cele deja trasate.

Simplificarea funcției conduce la expresia algebrică (sumă de produse) minimizată, unică:

$$g(u, v, w) = u' + vw + v'w'.$$

Funcția  $h$  este reprezentată printr-o diagramă Karnaugh în figura 3.3.(c). Această funcție corespunde funcției constante:

$$h(u, v, w) = 1.$$

Dacă ar fi să se judece doar după definiția acesteia. În adevăr, această funcție este definită peste tot domeniul de definiție prin valoarea 1.

Pe diagrama Karnaugh corespunzătoare (figura 3.3.(c)) s-a desenat un contur care se așează peste toate cele opt unități ale acestei funcții. Acest contur poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi vecine, logic adiacente, fiecare cu câte patru unități.

Primul contur cu patru unități corespunde primei linii ( $w = 0$ ) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică  $w'$ ). Iar cel de-al doilea contur corespunde celei de-a doua linii ( $w = 1$ ) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică  $w$ ), așa cum s-a remarcat anterior. Corespunzător, acestor expresii logice asociate celor două contururi cuprinzând fiecare câte patru unități, rezultă:

$$h(u, v, w) = w' + w = 1.$$

Funcția  $j$  a cărei diagramă Karnaugh este prezentată în figura 3.3.(d), prezintă un caz particular: toți mintermii funcției  $j$  sunt implicații primi esențiali.

Mai exact, funcția aceasta nu are termeni adiacenți logic (nu există termeni vecini nici în diagramă). Se poate considera, în extremis, că fiecare minterm (respectiv fiecare unitate din diagrama Karnaugh) este adiacent doar cu sine (respectiv acoperit, în diagrama Karnaugh, printr-un contur care cuprinde doar o singură unitate).

Astfel, funcția  $j$  are expresia (sumă de produse canonice) unică:

$$j(u, v, w) = u'v'w + u'vw' + uvw + uv'w'.$$

Funcția  $j(u, v, w)$  este, adesea, denumită funcția *suma-modulo-2 ori*, SAU-EX (sau-exclusiv) cu trei variabile.

□

Uneori este mai convenabilă minimizarea anumitor funcții folosind valorile zero ale acestora comparativ cu minimizarea aceluiași funcții folosind valorile 1. Mai precis, de multe ori este mai simplă găsirea conturilor utilizând valorile 0, comparativ cu valorile 1, ale anumitor funcții.

Minimizarea funcției, astfel calculată, este obținută în final ca un produs de sume, reprezentând complementarea respectivei funcții.

Produsul de sume, este complementabil, eventual, prin aplicarea teoremei DeMorgan determinându-se o sumă de produse.

Acest procedeu este denumit *abordarea complementară*.

Exemplul 3.4.

Se consideră funcția cu trei variabile:

$$g(a, b, c) = m_0 + m_4 + m_6 + m_7.$$

Această funcție este reprezentată prin diagrama Karnaugh pentru trei variabile din figura 3.4.

Sunt trecute în diagrama din figura 3.4 atât valorile asertate cât și valorile complementate ale funcției  $g(a, b, c)$ .

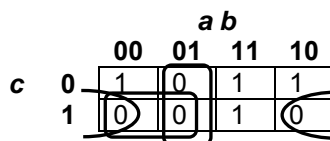


Figura 3.4.

Pentru funcția  $g'(a, b, c)$  sunt trei contururi generând mulțimea tuturor implicațiilor primi:

- coloana  $a'b$ , un contur cu două celule care generează implicanțul prim  $p_1 = a'b$ .

- conturul cu două celule format la baza coloanelor  $a'b'$  și  $a'b$ , linia  $c$ , producând implicantul prim  $p_2 = a'c$ .
- conturul extins cu două celule, colțurile inferioare stânga și dreapta ale diagramei, respectiv  $a'b'c$  și  $ab'c$ , reprezentând implicantul  $p_3 = b'c$ .

Tabelul incidenței implicantilor primi ai complementării funcției este prezentat în tabelul 3.4:

*Tabelul 3.4*

|       | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_5$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $p_1$ |       | *     | *     |       | $e$ |
| $p_2$ | *     |       | *     |       |     |
| $p_3$ | *     |       |       | *     | $e$ |

Implicantii primi  $p_1$  și  $p_3$  sunt esențiali și constituie o acoperire minimă a complementării funcției:

$$g'(a, b, c) = a'b + b'c.$$

Iar funcția va avea forma:

$$g(a, b, c) = (a'b + b'c)' = (a + b')(b + c').$$

Dacă asupra acestei forme se calculează produsele (desfacerea parantezelor) și se efectuează complet toate calculele se obține:

$$g(a, b, c) = ab + ac' + b'c'.$$

□

Exemplele următoare prezintă principalele tehnici de utilizarea a diagramei Karnaugh pentru minimizarea funcțiilor logice cu patru variabile. Corespunzător acestor funcții diagramele Karnaugh pentru patru variabile joacă un rol important în metodele manuale de minimizare a funcțiilor cu cinci și șase variabile.

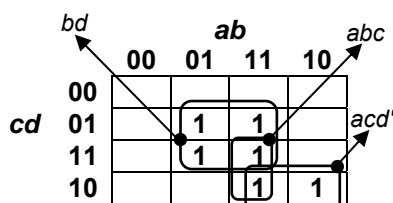


Figura 3.5.

Exemplul 3.5.

Fie funcția:  $f(a, b, c, d) = m_5 + m_7 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$ .

Acestei funcții îi corespunde expresia în sume de produse calculate în raport cu variabilele  $a, b, c$  și  $d$ :

$$f(a, b, c, d) = a'bc'd + a'bcd + ab'cd' + abc'd + abcd' + abcd.$$

În figura 3.5 se arată reprezentarea acestei funcții printr-o diagramă Karnaugh, corespunzător variabilelor  $a, b, c$  și  $d$ .

Ultima linie din diagramă are două celule adiacente (corespunzătoare mintermilor  $m_{10} + m_{14}$ ). Prin celula corespunzătoare mintermului  $m_{10}$  este unicul și cel mai larg contur care

se poate trasa. Aceasta revine la a spune că implicantul  $p_1 = acd' = m_{10} + m_{14}$ , este prim și esențial.

Prin celula corespunzătoare mintermului  $m_{14}$  este posibilă trasarea conturului care include și celula vecină a mintermului  $m_{15}$ . Acest contur conduce la implicantul  $p_2 = abc = m_{14} + m_{15}$ . Implicantul  $p_2$  este prim, deoarece conturul corespunzător este maximal.

Central în diagramă sunt dispuse patru celule, corespunzătoare mintermilor:

$$m_5 + m_{13} + m_7 + m_{15}.$$

Aceste patru celule se pot considera, într-o primă aproximare, ca fiind două contururi vecine, fiecare de câte două celule:  $(m_5 + m_{13}) + (m_7 + m_{15}) = bc'd + bcd = bd$ .

Se poate trage concluzia că un astfel de grup de patru celule învecinate sunt grupabile într-un contur care generează un implicant având două variabile reduse (acelea care n-au paritate constantă de-a lungul conturului, în cazul de față variabilele reduse sunt  $a$  și  $c$ ).

Implicantul generat,  $p_3 = bd$ , este prim deoarece nu există un alt contur care să includă acest contur. Implicantul prim  $p_3 = bd$  este, de asemenea, și esențial deoarece acoperă în exclusivitate mintermii  $m_5$ ,  $m_{13}$  și  $m_7$ .

Tabelul 3.5

|              | $m_5$ | $m_7$ | $m_{10}$ | $m_{13}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ |
|--------------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| $p_1 = acd'$ |       |       | *        |          | *        | e        |
| $p_2 = abc$  |       |       |          |          | *        | *        |
| $p_3 = bd$   | *     | *     |          | *        |          | *        |

Incidența dintre implicanții primi și mintermii, pentru această funcție, este arătată în tabelul 3.5.

Extragerea implicanților primi esențiali (împreună cu mintermii acoperiți) face ca tabelul incidenței implicanților primi să fie vid.

Rezultă că minimizarea exactă minimă este realizată prin acoperirea funcției doar cu implicanții primi esențiali  $p_1$  și  $p_3$ .

Aceasta conduce la expresia minimizată exactă a funcției:

$$f(a, b, c, d) = acd' + bd.$$

◇

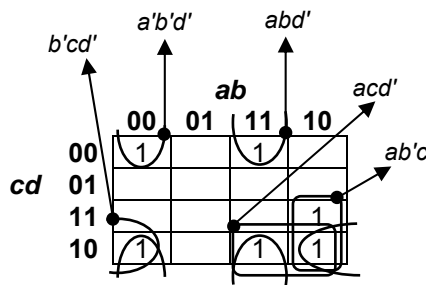


Figura 3.6.

Exemplul 3.6.

Se dorește calculul tuturor formelor minimizate exact ale funcției:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14},$$

Reprezentarea acestei funcții printr-o diagramă Karnaugh este înfățișată în figura 3.5.

Utilizând această reprezentare se determină, într-o primă etapă, mulțimea implicanților primi. În acest scop se stabilesc pentru fiecare din celulele funcției toate contururile maxime care sunt posibile față de respectiva celulă.

Astfel, pentru celula corespunzătoare mintermului  $m_0$  ( $ab = 00$  și  $cd = 00$ , colțul din stânga sus în diagramă) este posibil un singur contur, extins, între această celulă și celula corespunzătoare mintermului  $m_2$  ( $ab = 00$  și  $cd = 10$ , colțul din stânga jos în diagramă). Implicantul corespunzător acestui contur va avea o variabilă mai puțin. Aceasta este variabila  $c$  care schimbă paritatea în cadrul acestui contur. În adevăr:

$$p_1 = m_0 + m_2 = a'b'c'd' + a'b'cd' = a'b'd'(c' + c) = a'b'd'.$$

Implicantul  $p_1$  este prim deoarece nu există un alt implicant care să-l conțină (adică, să aibă mai puține variabile).

Celulei care reprezintă mintermul  $m_{12}$  ( $ab = 11$  și  $cd = 00$ , linia superioară din diagramă) i se poate atașa un singur contur, extins, între această celulă și celula reprezentând mintermul  $m_{14}$  ( $ab = 11$  și  $cd = 10$ , linia inferioară din diagramă).

Pentru acest contur, cu două celule, implicantul rezultat  $p_2$  se determină prin stabilirea variabile care nu are paritate constantă. Aceasta este variabila  $c$ .

Se poate ușor verifica rațiunea acestei afirmații:

$$p_2 = m_{12} + m_{14} = abc'd' + abcd' = a'b'd'(c' + c) = abd'.$$

Pentru celula mintermului  $m_{10}$  ( $ab'cd'$ ) este posibil să se traseze trei contururi distincte, maxime, pentru care se vor determina implicantii primi  $p_3$ ,  $p_4$  și  $p_5$ .

Implicantul  $p_3$  este asociat conturului dintre celule mintermilor  $m_{10}$  și  $m_{14}$ .

În cadrul acestui contur, cu două celule, va fi o singură variabilă care are schimbare de paritate. Aceasta este variabila  $b$ , celelalte variabile având paritate constantă.

Un calcul simplu poate să susțină această concluzie:

$$p_3 = m_{10} + m_{14} = ab'cd' + abcd' = acd'(b' + b) = acd'.$$

Implicantul  $p_3$  este prim deoarece conturul respectiv este maximal, neexistând un altul care să-l conțină.

Cel de-al doilea contur asociat celulei mintermului  $m_{10}$  este conturul care reunește această celulă și celula mintermului  $m_{11}$ .

Implicantul  $p_4$ , generat de acest contur, va fi de forma  $ab'c$ , deoarece variabila  $d$  nu are paritate constantă în cadrul conturului considerat.

Ultimul contur asociat acestei celule reunește celula mintermului  $m_{10}$  cu celula mintermului  $m_2$ . În cadrul acestui contur implicantul prima care se va genera va avea variabila  $a$  redusă, deoarece aceasta schimbă paritatea în acest contur.

Implicantul produs prin acest contur,  $p_5$ , este prim, fiind generat dintr-un contur maximal. Formula algebrică a implicantului prim  $p_5$ , este  $b'cd'$ .

Tabelul 3.6 prezintă incidența implicanților primi în raport cu mintermii funcției din acest exemplu.

Tabelul 3.6

|       | $m_0$ | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{14}$ |     |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $p_1$ | *     | *     |          |          |          |          | $e$ |
| $p_2$ |       |       |          |          | *        | *        | $e$ |
| $p_3$ |       |       | *        |          |          | *        |     |
| $p_4$ |       |       | *        | *        |          |          | $e$ |
| $p_5$ |       | *     | *        |          |          |          |     |

În tabelul 3.6, asteriscurile scrise îngroșat reprezintă, succint, cauza pentru care respectivul implicanț prim este declarat esențial.

Astfel, deoarece mintermul  $m_0$  este acoperit doar de implicanțul prim  $p_1$ , acest fapt conduce la declararea implicanțului prim  $p_1$  ca fiind esențial.

Din acest motiv, unitatea aflată la intersecția coloanei  $m_0$  cu linia  $p_1$  este scrisă îngroșat. Considerații similare au condus la scrierea îngroșată a celorlalte unități din tabelul implicanților primi.

Toți implicanții primi, din tabelul implicanților, sunt esențiali în afară de implicanții primi  $p_3$  și  $p_5$ .

Implicanții primi esențiali vor face parte din orice acoperire minimă exactă a acestei funcții.

Din tabelul implicanților se calculează clauzele formulei lui Petrick, astfel:

- (a) mintermul  $m_0$  este acoperit de implicanțul prim esențial  $p_1$ ;
- (b) mintermul  $m_2$  este acoperit de implicanții primi  $p_1$  (esențial) și  $p_5$ ;
- (c) mintermul  $m_{10}$  este acoperit de implicanții primi  $p_4$  (esențial),  $p_5$  și  $p_3$ ;
- (d) mintermul  $m_{11}$  este acoperit de implicanțul prim esențial  $p_4$ ;
- (e) mintermul  $m_{12}$  este acoperit de implicanțul prim esențial  $p_2$ ;
- (f) mintermul  $m_{14}$  este acoperit de implicanțul prim esențial  $p_2$ , dar și de implicanțul prim  $p_3$ .

Formula lui Petrick pentru această funcție arată astfel:

$$p_1 \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 \cdot p_2 \cdot (p_2 + p_3) = 1.$$

Aplicând identitatea  $a(a + b) = a$ , formula lui Petrick se simplifică sesizabil, deoarece:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot (p_1 + p_5) &= p_1, \\ (p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 &= p_4 \text{ și} \\ p_2 \cdot (p_2 + p_3) &= p_2. \end{aligned}$$

Formula lui Petrick, pentru această funcție, ajunge să fie exprimată prin produsul celor trei implicanți primi esențiali:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 1.$$

În conformitate cu ultima expresie a formulei lui Petrick, rezultă că pentru funcția considerată există o acoperire primă unică iredundantă, exactă și minimă, exprimată prin reuniunea celor trei implicanți primi esențiali:

$$f(a, b, c, d) = a'b'd' + abd' + ab'c.$$

Privitor la simplificarea anterioară a formulei lui Petrick se cuvin făcute câteva considerații, utile, pe marginea tabelului implicanților.

Deîndată ce s-au declarat implicanții primi, respectiv  $p_1$ ,  $p_2$  și  $p_4$ , aceștia urmează să aparțină oricărei minimizări exacte, determinate prin acoperirea (mintermilor) funcției cu implicanți primi, în conformitate cu teorema lui Quine.

Privitor la implicanții primi,  $p_1$ ,  $p_2$  și  $p_4$ , este clar că aceștia acoperă, în exclusivitate, respectiv mintermii  $m_0$ ,  $m_{12}$ , și  $m_{11}$ .

Dar, odată cu includerea (obligatorie) a implicanților primi esențiali în orice soluție de acoperire a funcției, sunt acoperiți și alți mintermi decât acei care au determinat calificarea acestor implicanți primi ca fiind esențiali.

Astfel, se poate remarca faptul că prin includerea implicanțului prim esențial  $p_1$ , în soluția minimizării exacte a funcției, odată cu mintermul  $m_0$ , este acoperit și mintermul  $m_2$ .

Prin această remarcă se micșorează complexitatea problemei alegerii unui set de implicanți primi (s-a redus numărul de mintermi care trebuie acoperiți).

Tabelul implicanților primi a fost modificat (tabelul 3.6a) în intenția marcării mintermilor acoperiți de implicantul prim esențial  $p_1$ .

Astfel, s-au barat cei doi mintermi acoperiți de implicantul prim esențial  $p_1$ .

*Tabelul 3.6a*  
*Influența implicantului prim esențial  $p_1$*

|       | $m_0$ | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{14}$ |   |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---|
| $p_1$ | *     | *     |          |          |          |          | e |
| $p_2$ |       |       |          |          | *        | *        | e |
| $p_3$ |       |       | *        |          |          | *        |   |
| $p_4$ |       |       | *        | *        |          |          | e |
| $p_5$ |       | *     | *        |          |          |          |   |

Analog, se poate observa că implicantul prim esențial  $p_2$ , acoperă (în afară de mintermul  $m_{12}$ ) și mintermul  $m_{14}$ .

Tabelul implicanților a fost din nou modificat, așa cum se poate vedea în tabelul 3.6b, prin bararea celor doi mintermi acoperiți de implicantul prim esențial  $p_2$ .

*Tabelul 3.6b*  
*Influența implicanților primi esențiali  $p_1$  și  $p_2$*

|       | $m_0$ | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{14}$ |   |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---|
| $p_1$ | *     | *     |          |          |          |          | e |
| $p_2$ |       |       |          |          | *        | *        | e |
| $p_3$ |       |       | *        |          |          | *        |   |
| $p_4$ |       |       | *        | *        |          |          | e |
| $p_5$ |       | *     | *        |          |          |          |   |

Similar, implicantul prim esențial  $p_4$ , acoperă (în afară de mintermul  $m_{11}$ ) și mintermul  $m_{10}$ . Tabelul implicanților a fost, încă odată, modificat prin bararea celor doi mintermi acoperiți de implicantul prim esențial  $p_4$ .

*Tabelul 3.6c*  
*Influența celor trei implicanți primi esențiali*

|       | $m_0$ | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{14}$ |   |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---|
| $p_1$ | *     | *     |          |          |          |          | e |
| $p_2$ |       |       |          |          | *        | *        | e |
| $p_3$ |       |       | *        |          |          | *        |   |
| $p_4$ |       |       | *        | *        |          |          | e |
| $p_5$ |       | *     | *        |          |          |          |   |

Acum, este evident că implicanții primi esențiali ai acestei funcții sunt, și prin aceste considerente, soluția unică a minimizării exacte a funcției:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14}.$$

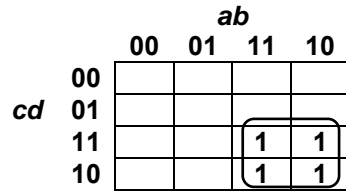
◇

În figura 3.7 sunt prezentate alte contururi posibile, care grupează câte patru celule într-o diagramă Karnaugh, pentru funcții cu patru variabile.

Pentru fiecare funcție reprezentată în figura 3.7 este menționată formula minimizată corespunzătoare conturului respectiv.

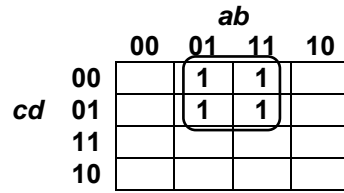


Figurile 3.7 (a) și (b) înfățișează contururi cu câte patru unități grupate în contururi ce formează *careuri*.



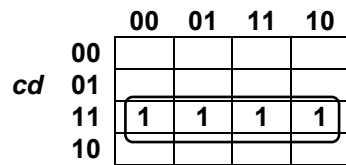
$$f(a, b, c, d) = ac$$

Figura 3.7 (a).



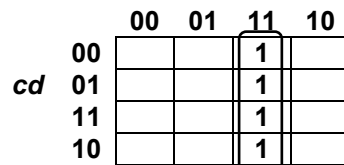
$$g(a, b, c, d) = bc'$$

Figura 3.7 (b).



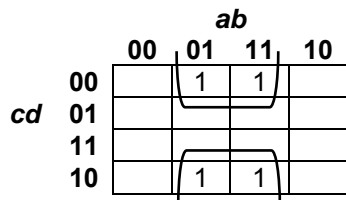
$$h(a, b, c, d) = cd$$

Figura 3.7 (c).



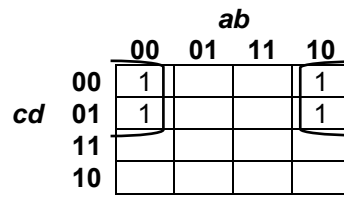
$$j(a, b, c, d) = ab$$

Figura 3.7 (d).



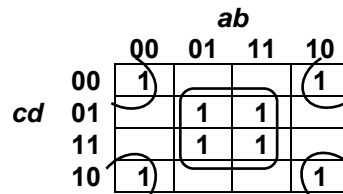
$$k(a, b, c, d) = bd'$$

Figura 3.7 (e).



$$m(a, b, c, d) = b'c'$$

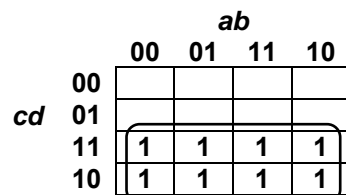
Figura 3.7 (f).



$$n(a, b, c, d) = b'd' + bd$$

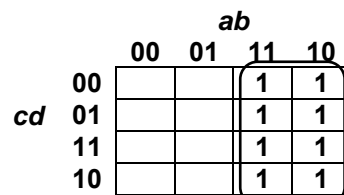
Figura 3.7 (g).

În figura 3.7 sunt înfățișate contururi care includ opt celule, în diagramele Karnaugh pentru funcții cu patru variabile.



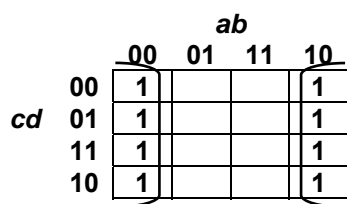
$$m(a, b, c, d) = c$$

Figura 3.7 (a).



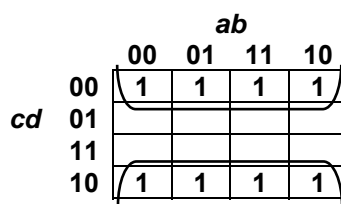
$$n(a, b, c, d) = a$$

Figura 3.7 (b).



$$p(a, b, c, d) = b'$$

Figura 3.7 (c).



$$q(a, b, c, d) = d'$$

Figura 3.7 (d).

Sunt, de multe ori, situații în care complementarea unei funcții poate oferi, ocazional, soluții mai bune. Exemplul care urmează prezintă un astfel de caz.

**Exemplul 3.7.**

Se consideră funcția cu patru variabile:

$$h(a, b, c, d) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10}.$$

În figura 3.8. (a), este prezentată diagrama Karnaugh a funcției  $h(a, b, c, d)$ , iar în figura 3.8.(b), este prezentată diagrama Karnaugh a complementării acesteia,  $h'(a, b, c, d)$ .

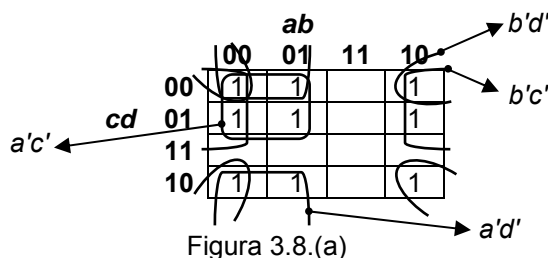


Figura 3.8.(a)

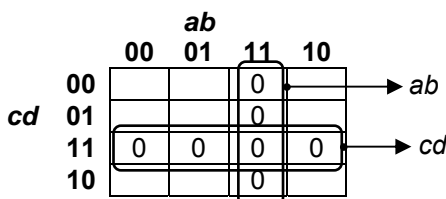


Figura 3.8.(b)

Pentru funcția  $h(a, b, c, d)$ , din figura 3.8.(a) se determină patru implicați primi constituind mulțimea tuturor implicațiilor primi ai acestei funcții. Acești patru implicați sunt generați astfel:

- (1) conturul cu patru celule delimitat între coloanele  $ab = 00$  și  $ab = 01$  și liniile  $cd = 00$  și  $cd = 01$ , va genera implicanțul prim  $p_1 = a'c'$ ;
- (2) conturul, în extensie, cu patru unități delimitat între aceleași coloane ca și precedentul contur, dar cuprinzând liniile  $cd = 00$  și  $cd = 10$ , va genera implicanțul prim  $p_2 = a'd'$ ;
- (3) conturul, în extensie, cu patru unități cuprinzând coloanele  $ab = 00$  și  $ab = 10$  și liniile  $cd = 00$  și  $cd = 01$ , va genera implicanțul prim  $p_3 = b'c'$ ;
- (4) conturul, în extensie, cu patru unități cuprinzând cele patru celule din colțurile diagramei ( $abcd = 0000, 1000, 1010$  și  $0010$ ), va genera implicanțul prim  $p_4 = b'd'$ .

Se poate dovedi ușor că toți implicații primi sunt esențiali.

Minimizarea exactă a funcției  $h(a, b, c, d)$  arată astfel:

$$h(a, b, c, d) = a'c' + a'd' + b'c' + b'd'.$$

Utilizând diagrama Karnaugh a complementării funcției (figura 3.9.(b)) se obține expresia:

$$h'(a, b, c, d) = ab + cd.$$

Această expresie (pentru  $h'(a, b, c, d)$ ) are doar doi termeni produs, în timp ce expresia minimizată a funcției  $h(a, b, c, d)$  are patru termeni produs.

Este evident că minimizarea funcției complementare are jumătate din numărul termenilor produs corespunzători minimizării funcției considerate și introduce doar o inversare a ieșirii porții finale (sunt disponibile curent porți SAU-NU fără costuri suplimentare).

Complementând expresia funcției  $h'(a, b, c, d)$  rezultă următoarea formă a funcției  $h$ :

$$h(a, b, c, d) = (a' + b')(c' + d').$$

Efectuând calculele se regăsește prima expresie determinată, anterior, pentru funcția  $h(a, b, c, d)$ .

□

#### 4. Minimizarea funcțiilor scalare specificate prin produse de sume

Anumite implementări ale funcțiilor logice impun exprimarea acestora prin produse de sume (termenul în engleză este *product of sums* cu abrevierea POS).

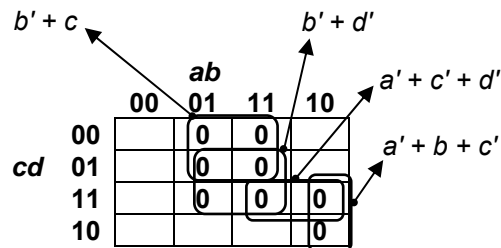
Atunci când sunt utilizate diagramele Karnaugh pentru minimizarea acestor expresii se poate obține o minimizarea a produselor de sume prin utilizarea valorilor zero ale funcției respective.

##### Exemplul 4.1.

Se consideră funcția reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.1.(a).

Funcția este specificată prin valorile 0.

Procedeul de minimizare în cazul produselor de sume este similar celui în care sunt utilizate sumele de produse, cu câteva excepții care vizează în special modul de citire al sumelor minimizate, în acest caz. Astfel, pentru determinarea sumelor corespunzătoare conturilor (trasate peste celule conținând zerouri) o variabilă este complementată dacă valoarea sa de-a lungul conturului este constant unu. Altfel, dacă valoarea sa este asertată dacă peste conturul considerat este constant zero.



$g(a, b, c, d)$

Figura 4.1.(a)

Se poate remarca, din figura 4.1.(a), că sunt posibile în total patru contururi atașate celor opt celule, conținând zerourile corespunzătoare expresiei funcției. Corespunzător fiecărui contur sunt atașate, în figura 4.1.(a), expresiile logice în sume, minimizate. Expresiile logice atașate fiecărui contur sunt calculate în maniera specificată anterior.

Într-o primă formă funcția  $g(a, b, c, d)$  este exprimată prin produse de sume și arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d)(a' + c' + d')(a' + b + c)$$

Conturul corespunzător sumei (implicatului)  $a' + c' + d'$ , nu este esențial, se poate realiza fără dificultate. Astfel, se poate remarca faptul că implicatul neesențial este conținut în produsul celorlalți implicați.

Toate celelalte contururi produc implicați esențiali.

În final formula minimizată exact printr-un produs de sume arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d)(a' + b + c).$$

□

O posibilă metodă alternativă poate fi formulată astfel:

- (1) În reprezentarea funcției complementate, celule vor fi inițializate prin valori unu;
- (2) Se calculează minimizarea cunoscută, utilizând diagramele Karnaugh, rezultatul fiind exprimat printr-o sumă de produse;
- (3) Se complementează expresia rezultată prin legea DeMorgan, obținând produse de sume.

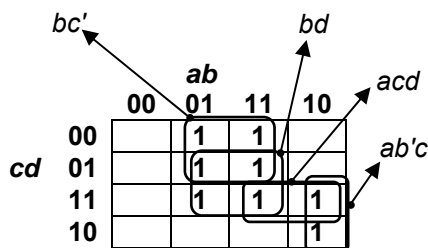
Se poate demonstra, în fapt, că procedeul prezentat anterior este echivalent acestei metode, alternative.

Această metodă, alternativă, este prezentată în exemplul următor.

Pentru o mai bună înțelegere și o facilă comparație s-a utilizat aceeași funcție ca și în exemplul 4.1.

Exemplul 4.2.

Se consideră funcția reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.2.



$g'(a, b, c, d)$

Figura 4.2.

Sunt patru contururi în figura 4.2, din care unul nu este esențial, cel corespunzător implicatului  $acd$ .

Acest implicat este conținut în reuniunea altor doi implicați primi:

$$acd \subset bd + ab'c.$$

Pentru că,  $acd = m_{15} + m_{11}$ , iar  $bd + ab'c = (m_{15} + m_{13} + m_7 + m_5) + (m_{11} + m_{10})$ .

Forma minimizată exact în sume de produse a funcției  $g'(a, b, c, d)$ , arată astfel:

$$g'(a, b, c, d) = bc' + bd + ab'c.$$

Aplicând legea DeMorgan rezultă următoarea formă minimizată în sume de produse pentru funcția considerată:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d)(a' + b + c).$$

□

## 5. Minimizarea funcțiilor scalare având mai mult de 4 variabile

Numărul de variabile reprezentabile prin sistemele de diagrame Karnaugh poate fi într-o oarecare măsură mărit, nefiind limitat strict la cel mult patru variabile.

Există posibilitatea alcătuirii unor diagrame pentru funcții având mai mult de 4 variabile dar sesizarea grupărilor celor mai eficiente poate fi ceva mai delicată și poate compromite eficiența utilizării acestor diagrame Karnaugh de rang superior. Sesizarea grupărilor celor mai potrivite în diagramele cu mai mult de patru variabile necesită, în general, o experiență peste medie.

Există numeroase abordări ale acestei probleme în literatura de specialitate. Ideea care a fost mult utilizată și încercată practic s-a focalizat pe utilizarea unor diagrame Karnaugh, bine cunoscute și ușor de reținut, care să fie, la rândul lor, în așa fel grupate încât să sugereze modalități cât mai simple de minimizare. În exemplele care urmează sunt considerate funcții cu mai mult decât patru variabile pentru ilustrarea metodei.

### Exemplul 5.1.

Se consideră funcția cu cinci argumente:  $u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}$ .

Diagrama completă, pentru cinci variabile (așa cum este prezentată în figura 5.1) se poate descompune în două diagrame de patru variabile fiecare.

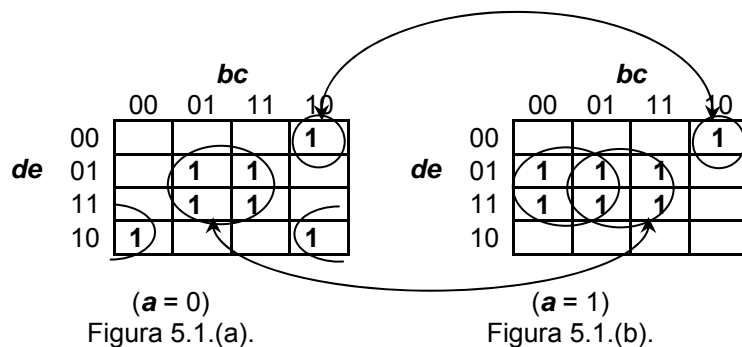
Prima din cele două diagrame Karnaugh de patru variabile corespunde valorilor 0 ale variabilei  $a$  (figura 5.1.(a)) iar cealaltă pentru valorile 1 ale aceleiași variabile (figura 5.1.(b)).

|           |    | <i>abc</i> |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------|----|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|           |    | 000        | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
| <i>de</i> | 00 |            |     |     | 1   | 1   |     |     |     |
|           | 01 |            | 1   | 1   |     |     | 1   | 1   | 1   |
|           | 11 |            | 1   | 1   |     |     | 1   | 1   | 1   |
|           | 10 | 1          |     |     | 1   |     |     |     |     |

$$u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}.$$

Figura 5.1. Diagrama Karnaugh cu cinci variabile pentru funcția exemplului 5.1.

Prezența unor grupări simetrice, în cele două diagrame Karnaugh cu patru variabile, conduce la concluzia că respectivele grupări, fiind reprezentabile prin aceleași expresii doar în variabilele  $c$ ,  $b$ ,  $d$ , și  $e$ , oferă factorizarea respectivelor expresii și reducerea, implicită a variabilei  $a$ .



În continuare este prezentată și transcrierea algebrică a grupărilor din cele două diagrame, precum și grupările dintre diagrame:

$$u(a, b, c, d, e) = a'(c'd'e') + (a' + a)ce + (a' + a)bc'd'e' + ab'e = a'c'd'e' + ce + bc'd'e' + ab'e.$$

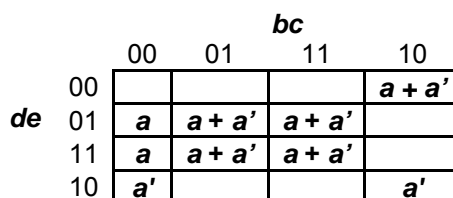
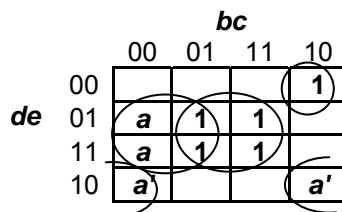


Figura 5.1.(c). Diagrama Karnaugh corespunzătoare funcției  $u$  din exemplul 4 conținând expresii în variabila  $a$ .

O altă abordare a acestei metode este substituirea unităților din diagramele Karnaugh prin expresii algebrice alcătuite cu variabilele care etichetează diagramele (în cazul de față este o singură variabilă și anume variabila  $a$ ). Așa cum se poate remarca din figura 5.1.(c) grupările omoloage din figurile 5.1.(a) și 5.1.(b) au condus la expresiile  $a + a'$ , care se reduc ( $a + a' = 1$ ).



$$u(a, b, c, d, e) = bc'd'e' + ce + ab'e + a'c'd'e'$$

Figura 5.1.(d). Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcției  $u$  din exemplul 4 conținând expresii simplificate în variabila  $a$ .

Pe de altă parte, grupările care n-au avut corespondenți între cele două diagrame Karnaugh din figurile 4b și 4c, au păstrat expresii în  $a$  ( $a$  și respectiv  $a'$ ) așa cum se poate vedea din diagrama Karnaugh prezentată în figura 5.1.(c).

Expresia, simplificată, a funcției  $u(a, b, c, d, e)$  prin utilizarea diagramei Karnaugh cu expresii în variabila  $a$ , este prezentată în figura 5.1.(d).

Metoda utilizării expresiilor algebrice, în locul unităților, în diagramele Karnaugh se poate face pornind direct de la forma algebrică în sumă de termeni canonici prin factorizarea cuburilor care nu conțin variabilele de etichetare. Pentru ușurința calculelor se poate observa că variabila  $a$  va apare doar în mintermii având indicele mai mare sau egal cu 16, în timp ce variabila  $a'$  va apare în mintermii cu indicele strict mai mic sau egal cu 15. Astfel, funcția  $u(a, b, c, d, e)$  se poate scrie astfel:

$$u(a, b, c, d, e) = (b'cd'e + bcd'e + b'cde + bcde + bc'd'e')(a + a') + (b'c'de' + bc'de')a' + (b'c'd'e + b'cd'e + b'c'de + b'cde)a.$$

Alcătuirea unei diagrame Karnaugh utilizând variabilele  $b, c, d,$  și  $e$  cu expresii în variabila  $a$  va arăta ca în figura 5.1.(d). Implicanții primi astfel obținuți sunt esențiali.

□

Exemplul care urmează abordează o funcție cu șase variabile schițând o metoda mai generală de tratare a funcțiilor cu șase variabile utilizând un cadran cu patru diagrame Karnaugh, fiecare cu câte patru variabile. Metoda vizează utilizarea șabloanelor diagramelor Karnaugh cu patru variabile pentru funcții cu șase variabile.

Ca și în cazul exemplului precedent se utilizează introducerea unor expresii algebrice în locul unităților, procedeul uzat în mod curent. În maniera acesta se deschide o abordare care poate permite, în continuare, extinderea diagramelor Karnaugh pentru funcții cu un număr mai mare decât se utilizează tradițional.

**Exemplul 5.2.**

Se consideră funcția cu șase variabile:

$$v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}.$$

Diagrama Karnaugh cu șase variabile a acestei funcții este prezentată în figura 5.2.(a). O reprezentare a acestei funcții, divizată în patru diagrame Karnaugh cu patru variabile fiecare, este prezentată în figura 5.2.(b).

|            |     |            |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|            |     | <b>acd</b> |     |     |     |     |     |     |     |
|            |     | 000        | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
| <b>bef</b> | 000 |            |     | 1   |     |     |     |     |     |
|            | 001 |            |     |     |     | 1   | 1   |     |     |
|            | 011 |            |     |     |     |     |     |     |     |
|            | 010 | 1          |     |     | 1   | 1   |     | 1   |     |
|            | 110 | 1          |     |     | 1   | 1   |     | 1   |     |
|            | 111 |            |     |     |     |     |     |     |     |
|            | 101 |            |     |     |     |     | 1   | 1   |     |
|            | 100 |            |     |     | 1   |     |     |     |     |

Figura 5.2.(a). Diagrama Karnaugh pentru funcția  $v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}$ .

Grupările pentru această funcție, în figura 5.2.(b), au fost desenate astfel încât prin grosimea și forma liniei unei grupări sunt sugerate modul în care acestea sunt conectate.

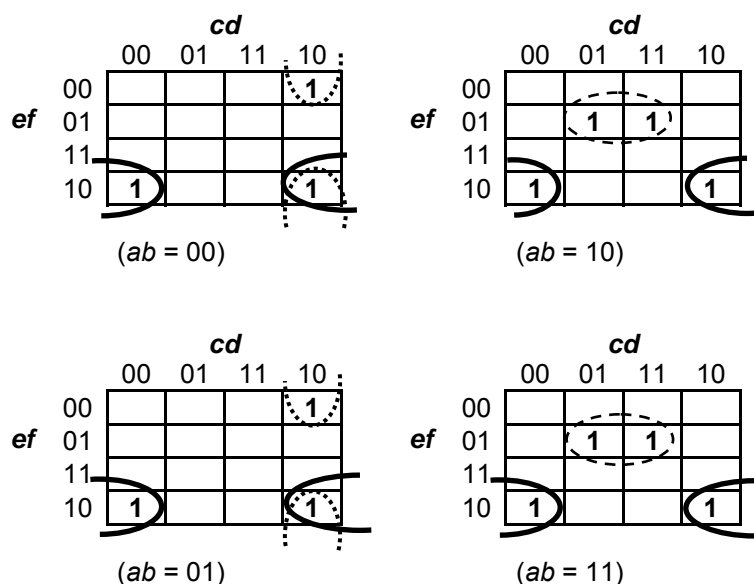
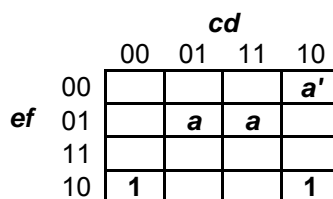


Figura 5.2.(b). Minimizarea funcției  $v(a, b, c, d, e, f)$  din exemplul 5.2 prin divizarea acesteia în patru diagrame Karnaugh cu câte patru variabile fiecare.

Astfel, cu linie punctată marunt sunt marcate două grupări similare din diagramele corespunzătoare ( $ab = 00$ ) și ( $ab = 01$ ),  $a'cd'f(b' + b) = a'cd'f$ .  
 Tot cu linie punctată, dar mai mare, sunt desemnate două grupări din diagramele ( $ab = 10$ ) și respectiv ( $ab = 11$ ),  $ade'f(b' + b) = ade'f$ .  
 Cu linie plină îngroșată este marcat un grup de 8 unități, câte două din fiecare diagramă și situate la baza diagramelor respective  $d'ef(a'b' + ab' + a'b + ab) = d'ef$ . Rezultă că forma minimizată a acestei funcții este:

$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f + ade'f + d'ef.$$

Aplicând substituirea unităților din diagramele Karnaugh din figura 5.2.(b) prin expresii construite cu etichetele diagramelor respective se obține diagrama Karnaugh din figura 5.2.(c).



$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f + ade'f + d'ef.$$

Figura 5.2.(c). Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcției  $v$  din exemplul 5.2 conținând expresii simplificate în variabilele  $a$  și  $b$ .



Se poate remarca, în final, faptul că:

- grupul celor două unități din diagramele etichetate  $ab = 10$  și  $ab = 11$  ( $c'd'e'f$  și  $cde'f$  în figura 5b), apar în figura 5c prin variabila  $a$ ,
- grupul celor opt unități sunt reprezentate în diagrama din figura 5c prin constanta 1 (cele două variabile ale etichetelor s-au redus), iar
- cele două unități ( $cd'e'f$ ) din diagramele etichetate prin  $ab = 00$  și  $ab = 01$  (figura 5b) sunt reprezentate prin expresia  $a'$  în diagrama Karnaugh din figura 5c;
- Implicanții primi, astfel obținuți, sunt esențiali.

◇

## 6. Minimizarea funcțiilor scalare care conțin termeni nespecificați

În practica proiectării logice pot apare situații când, pentru anumite combinații ale variabilelor unei funcții, valorile funcției să nu fie definite. Acest fapt poate avea loc dacă, spre exemplu, respectivele combinații ale variabilelor nu prezintă interes pentru că nu au cum să apară în contextul pentru care se face proiectarea, ori pur și simplu respectivele combinații ale liniilor de intrare nu au cum să apară.

Se presupune că se proiectează un dispozitiv digital care urmează să afișeze durate de timp măsurate, spre exemplu, în secunde. Atunci, valori ale rangului zecilor de secunde, mai mari decât cinci nu sunt posibile.

Modul de abordare al minimizării funcțiilor logice care cuprind termeni neprecizați este ilustrat printr-un prim exemplu practic.

### Exemplul 6.1.

Se consideră funcția  $h(a,b,c,d) = m \sum(1, 5, 7, 8, 10, 14) + x \sum(0, 6, 9, 11, 13, 15)$ .

Diagrama Karnaugh pentru funcția  $h(a,b,c,d)$  este ilustrată în figura 6.1.

|           |    | <b>ab</b> |          |          |          |
|-----------|----|-----------|----------|----------|----------|
|           |    | 00        | 01       | 11       | 10       |
| <b>cd</b> | 00 | <b>X</b>  |          |          | <b>1</b> |
|           | 01 | <b>1</b>  | <b>1</b> | <b>X</b> | <b>X</b> |
|           | 11 |           | <b>1</b> | <b>X</b> | <b>X</b> |
|           | 10 |           | <b>X</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |

**Figura 6.1.(a)** Diagrama Karnaugh și implicanții primi corespunzători mintermilor funcției  $h(a, b, c, d)$  din exemplul 6.1.

Termenii neprecizați, simbolizați prin  $X$  reprezintă acele combinații ale variabilelor funcției  $h(a, b, c, d)$  pentru care această funcție nu are valoarea precizată.

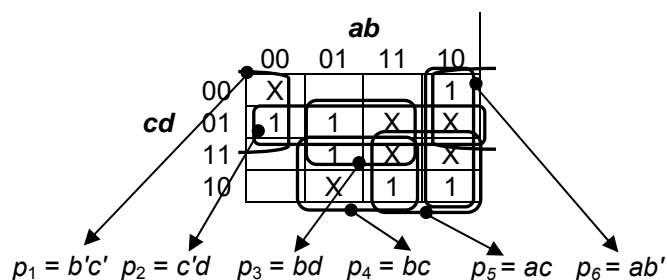
Pe parcursul procesului de minimizare anumite valori  $X$  pot fi definite, precizate, după cum impune soluția de minimizare aleasă.

Astfel, pentru constituirea unor contururi mai largi se pot include în respectivele contururi simboluri  $X$  alături de valori 1. Corespunzător, acelor combinații ale liniilor de intrare li se vor atribui valori 1.

Simbolurile  $X$  care nu sunt cuprinse, alături de valori 1, în contururile de minimizare ale funcției, li se va atribui valoarea 0.

În acest mod, după încheierea procesului de minimizare, toate simbolurile  $X$  vor fi 1 ori 0.

Contururile asociate diagramei Karnaugh corespunzătoare figurii 6.1.(a) sunt prezentate în figura 6.1.(b).



**Figura 6.1.(a).** Diagrama Karnaugh și implicanții primi corespunzători mintermilor funcției  $h(a, b, c, d)$  din exemplul 6.1.

Mulțimea implicanților primi ai funcției  $h(a, b, c, d)$  este:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\},$$

respectiv:

$$P = \{b'c', c'd, bd, bc, ac, ab'\}.$$

Matricea de incidență a implicanților primi în raport cu termenii canonici, pentru această funcție, este prezentată ca în tabelul 6.1.(a).

Tabelul 6.1.(a).

|                    | Matricea de incidență |                     |                    |                      |                        |                       |
|--------------------|-----------------------|---------------------|--------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|
|                    | $m_1 =$<br>$a'b'c'd$  | $m_5 =$<br>$a'bc'd$ | $m_7 =$<br>$a'bcd$ | $m_8 =$<br>$ab'c'd'$ | $m_{10} =$<br>$ab'cd'$ | $m_{14} =$<br>$abcd'$ |
| $p_1 = b'c' (1,8)$ | *                     |                     |                    | *                    |                        |                       |
| $p_2 = c'd (1,5)$  | *                     | *                   |                    |                      |                        |                       |
| $p_3 = bd (5,7)$   |                       | *                   | *                  |                      |                        |                       |
| $p_4 = bc (7,14)$  |                       |                     | *                  |                      |                        | *                     |
| $p_5 = ac (10,14)$ |                       |                     |                    |                      | *                      | *                     |
| $p_6 = ab' (8,10)$ |                       |                     |                    | *                    | *                      |                       |

Se remarcă, în matricea de incidență, prezența exclusiv a mintermilor corespunzători valorilor precizate, în timp ce termenii corespunzători valorilor neprecizate nu sunt utilizați. De asemenea se poate observa absența termenilor esențiali. Matricea de incidență prezintă ceea ce se numește, tradițional, un nucleu ciclic.

Produsul lui Petrik pentru matricea de incidență prezentată în tabelul 6.1.(a) este calculat astfel:

$$F = s_1 s_5 s_7 s_8 s_{10} s_{14}, \text{ unde clauzele de acoperire sunt calculate astfel:}$$

$$s_1 = (p_1 + p_2), s_5 = (p_2 + p_4), s_7 = (p_4 + p_5), s_8 = (p_1 + p_3), s_{10} = (p_3 + p_6) \text{ și } s_{14} = (p_5 + p_6);$$

Efectuând produsele în expresia  $F = s_1 s_5 s_7 s_8 s_{10} s_{14}$ , se obține formula:

$$F = p_2 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_5 p_6 + p_2 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_4 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_6 .$$

Din suma de produse anterioară se poate remarca faptul că funcția acceptă două forme minime respectiv  $\{p_2, p_3, p_5\}$  și  $\{p_1, p_4, p_6\}$ , amândouă cu cardinalitatea trei, precum și alte șase forme minimale (cu cardinalitatea patru).

◇

Exemplul care urmează introduce o funcție cu termeni neprecizați pentru care matricea incidenței implicanților primi este reductibilă.

Exemplul 6.2

Se consideră funcția  $g(a,b,c,d) = m \Sigma(0, 1, 3, 5, 13, 15) + X \Sigma(2, 6, 10, 11, 12)$ .

Mulțimea implicanților primi ai funcției  $g(a, b, c, d)$  a fost determinată astfel:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ , iar matricea de incidență a implicanților primi cu termenii canonici, pentru această funcție arată ca în tabelul 6.2.

Tabelul 6.2

| Implicanții<br>primi | Termenii canonici |       |       |       |          |          | Obs |
|----------------------|-------------------|-------|-------|-------|----------|----------|-----|
|                      | $m_0$             | $m_1$ | $m_3$ | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ |     |
| (0-01) $p_1$         |                   | *     |       | *     |          |          |     |
| (-101) $p_2$         |                   |       |       | *     | *        |          |     |
| (110-) $p_3$         |                   |       |       |       | *        |          |     |
| (1-11) $p_4$         |                   |       |       |       |          | *        |     |
| (11-1) $p_5$         |                   |       |       |       | *        | *        |     |
| (00- -) $p_6$        | *                 | *     | *     |       |          |          | e   |
| (-01-) $p_7$         |                   |       | *     |       |          |          |     |

Matricea de incidență prezintă un singur implicant prim esențial,  $p_6$ . Acesta va face parte din orice soluție minimă a funcției  $g$

Se observă faptul că implicantul prim  $p_4$  acoperă doar  $m_{15}$  în timp ce implicantul prim  $p_5$  acoperă atât mintermul  $m_{15}$  cât și mintermul  $m_{13}$ .

Este un caz de dominanță între liniile unei matrice de incidență. Linia dominată este exclusă din procesul de alegere, cu atât mai mult cu cât numărul de literalii al implicantului prim  $p_4$  nu este mai mic decât cel al implicantului prim  $p_5$ .

De notat că, în urma îndepărtării implicantului prim esențial și a mintermilor acoperiți de acesta, implicantul prim  $p_1$  ajunge să fie dominat de implicantul prim  $p_2$ .

Se poate remarca, din nou, că ambii implicanți primi au același număr de literalii.

Linia dominată este eliminată, împreună cu implicantul prim asociat, din procesul de alegere a soluției minime.

După aceste două dominanțe de linii matricea de incidență arată ca în tabelul 6.2(a).

Tabelul 6.2(a)

| Implicanții<br>primi | Mintermii |          |          | Obs. |
|----------------------|-----------|----------|----------|------|
|                      | $m_5$     | $m_{13}$ | $m_{15}$ |      |
| (-101) $p_2$         | *         | *        |          | e    |
| (11-1) $p_5$         |           | *        | *        | e    |

Ambii implicanți primi sunt esențiali (secundari) și sunt adăugați soluției minime.

În concluzie, forma minimă a funcției:

$$g(a,b,c,d) = m \Sigma(0, 1, 3, 5, 13, 15) + d \Sigma(2, 6, 10, 11, 12),$$

arată astfel:

$$g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd.$$

Această formă nu este, însă, unica formă minimă.

Dacă se va considera matricea de incidență (tabelul 6.2.(c)) așa cum rămâne aceasta după extragerea implicantului prim esențial  $p_6$  se poate calcula un produs al lui Petrik coresponzător acestei matrice, ținând seama și de implicantul prim esențial  $p_6$ .

Tabelul 6.2(c)

| Implicanții<br>primi | Mintermii |          |          | Obs. |
|----------------------|-----------|----------|----------|------|
|                      | $m_5$     | $m_{13}$ | $m_{15}$ |      |
| (0-01) $p_1$         | *         |          |          |      |
| (-101) $p_2$         | *         | *        |          |      |
| (110-) $p_3$         |           | *        |          |      |
| (1-11) $p_4$         |           |          | *        |      |
| (11-1) $p_5$         |           | *        | *        |      |

$$F = p_6(p_1 + p_2)(p_2 + p_3 + p_5)(p_4 + p_5) = p_1 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_5 p_6 + p_2 p_4 p_6 + p_2 p_5 p_6.$$

Soluțiile date de acest produs demonstrează că sunt în total trei soluții minime de acoperire a acestei funcții:

$$p_1 p_5 p_6 + p_2 p_4 p_6 + p_2 p_5 p_6,$$

una dintre acestea fiind și cea calculată mai înainte.

Sunt listate în continuare toate soluțiile minime (cardinalitate 3) de acoperire ale funcției  $g(a,b,c,d)$ :

- 1)  $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd,$
- 2)  $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + acd,$
- 3)  $g(a,b,c,d) = a'b' + a'c'd + abd.$

Produsul lui Petrick oferă, teoretic, întotdeauna ansamblul tuturor soluțiilor de acoperire a unei funcții scalare Booleene în raport cu mulțimea implicanților primi ai acesteia. Funcțiile cu complexitate ridicată pot ridica dificultăți chiar și pentru obținerea mulțimii implicanților primi (pot fi foarte numeroși și, din acest motiv, dificil de determinat în totalitate).

Produsul lui Petrick poate fi foarte dificil de calculat pentru cazuri complicate (funcții cu un număr important de implicanți primi) și atunci procedeul de micșorare al matricei de incidență prin dominanța liniilor și - sau coloanelor precum și prin implicanții primi esențiali secundari, terțiari etc., poate să ofere, într-un timp acceptabil, o soluție minimă ori chiar *minimală* dacă nu sunt alte posibilități de calcul în timp rezonabil.

◇