Algebre booleene

(01) Se consideră funcţia $\phi(a, b)$ de două variabile definită prin tabelul 1:

Tabelul 1

a	*b*	ϕ(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(i) Să se stabilească formele canonice disjunctive şi conjunctive ale acestei funcţii.
(ii) Determinaţi o formă algebrică mai simplă pentru $\phi(a, b)$.

<u>Soluţie</u>
(i)
Funcţia $\phi(a, b)$ are doi mintermi $m_1 = a'b$ şi $m_3 = ab$.

Forma canonică disjunctivă a funcţiei $\phi(a, b)$ arată astfel:

$$\phi(a, b) = a'b + ab.$$

Maxtermii acestei funcţii sunt $M_0 = a + b$ şi $M_2 = a' + b$.

Forma canonică conjunctivă a funcţiei $\phi(a, b)$ arată astfel:

$$\phi(a, b) = (a + b)(a' + b).$$

(ii)
Se poate observa că forma canonică disjunctivă se poate rescrie astfel:

$$\phi(a, b) = a'b + ab = (a' + a)b = b.$$

◊

(02) Se consideră funcţia $f: B^3 \to B$, definită prin tabelul 2:

Tabelul 2

a	*b*	*c*	*f(a, b, c)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Se cere:
(i) Determinarea formei canonice disjunctive pentru această funcţie;
(ii) Determinarea formei canonice conjunctive pentru această funcţie;

(iii) Stabilrea unor forme mai simple utilizând proprietăţile algebrelor booleene.

Soluţie

(i) Forma canonică disjunctivă arată astfel:
$f(a, b, c) = a'b'c' + ab'c' + ab'c.$
Această expresie se poate transforma convenabil astfel:
$f(a, b, c) = (a' + a)b'c' + ab'(c' + c) = ab' + b'c'.$

(ii) $f(a, b, c) = (a + b + c')(a + b' + c)(a + b' + c')(a' + b' + c)(a' + b' + c')$

Se poate arăta că pornind de expresia canonica conjunctivă se poate ajunge la aceaşi expresie a funcţiei $f(a, b, c)$.

Dacă în (ii) se desfac parantezele, efectuând calculul algebric boolean, se obţine:
$f(a, b, c) =$
$(a + ab' + ac + ab + bc + ac' + b'c')(ab' + ac + a'b' + b' + b'c + a'c' + b'c')(a' + b' + c').$

Pentru o micşorare a complexităţii calculelor se observă că printr-o gupare convenabilă, în prima paranteză, se obţine:

$(a(1 + b' + c + b + c') + b'c') = (a + b'c')$, deoarece $1 + t = 1$.

În a doua paranteză, în mod similar dar prin factorizarea variabilei b' se obţine:

$(ab' + ac + a'b' + b' + b'c + a'c' + b'c') = (b'(a + a' + 1 + c + c') + ac + a'c') = (b' + ac + a'c').$

Rezultă:

$f(a, b, c) = (a + b'c')(b' + ac + a'c')(a' + b' + c').$

Efectuând produsul dintre primele două paranteze se va obţine:

$f(a, b, c) = (ab' + ac + b'c' + a'b'c')(a' + b' + c').$

În prima paranetză se observă că: $b'c' + a'b'c' = b'c'(1 + a') = b'c'.$

Acum se poate scrie:

$$f(a, b, c) = (ab' + ac + b'c')(a' + b' + c')$$

iar această formă devine prin desfacerea parantezelor şi gruparea convenabilă a termenilor produs:

$f(a, b, c) = ab' + ab'c' + ab'c + a'b'c' + b'c' = ab' + b'c'.$

◊

(03) Se consideră funcţia f: $B^2 \rightarrow B$, definită prin tabelul 3:

Tabelul 3

a	*b*	*f*	*f'*
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Utilizând teorema DeMorgan, se cere determinarea expresiei canonice în produse de sume a funcţiei $f(a, b)$ pornind de la expresia canonică în sume de produse a funcţiei $f'(a, b)$.

<u>Soluţie</u>

Expresia canonică în sume de produse a funcţiei $f'(a, b)$ arată astfel:

$$f'(a, b) = a'b' + a'b.$$

Teorema DeMorgan:

$$(x + y)' = x'y',$$

$$(xy)' = x' + y'.$$

Iar:

$$f(a, b) = (f'(a, b))',$$

Prin aplicarea teoremei DeMorgan expresiei canonice în sume de produse rezultă:

$$f(a, b) = (a'b' + a'b)' ,$$

$$f(a, b) = (a'b')' (a'b)' ,$$

aplicând încă odată teorema DeMorgan expresiei $(a'b')' (a'b)'$, se obţine:

$$f(a, b) = (a + b)(a + b').$$

◊

(04) Să se arate că are loc identitatea:

$$bc + b'd + cd = bc + b'd \text{ (teorema consensului).}$$

<u>Soluţie</u>

Identitatea se poate demonstra simplu prin determinarea valorilor celor două expresii pentru toate cele opt combinaţii de valori ale variabilelor a, b şi c:

$$E_1 = bc + b'd + cd,$$

iar

$$E_2 = bc + b'd.$$

Un calcul corespunzător utilizează un tabel de forma celui de mai jos (tabelul 4):

Tabelul 4

b	c	d	E_1	E_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

◊

(05) Să se minimizeze expresia:

$$E(u, v, w) = u'v'w' + uv'w' + uv'w.$$

<u>Soluţie</u>

Se observă următoarea factorizare:

$$E(u, v, w) = (u'+ u)v'w' + uv'w.$$

În factorizare anterioară se poate remarca faptul că paranteza are valoarea 1.
În general are loc identitatea $1 \cdot x = x$. Prin aceasta expresia se poate rescrie după cum urmează:

$$E(u, v, w) = v'w' + uv'w.$$

O teoremă utilă în acest caz este aceasta:

$$z + z = z, \forall z \in B$$

(Idempotenţa).
Cu aceasta identitatea iniţială se poate rescrie astfel:

$$E(u, v, w) = u'v'w' + uv'w' + uv'w' + uv'w.$$

Acum se poate remarca că se poate face o dublă factorizare din care una este deja ilustrată:

$$E(u, v, w) = (u'+ u)v'w' + uv'(w' + w).$$

Aplicând identităţile:

$$u' + u = 1 \text{ şi } w' + w = 1,$$

rezultă:

$$E(u, v, w) = v'w' + uv'.$$

◊

(06) Se consideră funcţia:

$$f = \sum(0,3,4,6,7).$$

Se cere:

(a) forma canonică conjunctivă a acestei funcţii;
(b) forma canonică disjunctivă a acestei funcţii.
(c) O formă minimizată a funcţiei *f*.

<u>Soluţie</u>

(a) prin modul de specificare al funcţiei (sumă de mintermi) sunt precizate:

- numărul minim de variabile ale acestei funcţii,
- punctele din domeniul de definiţie în care funcţia ia valoarea 1.

Tabelul 5.

z	*n*	*p*	*q*	*f*	*mintermii*	*maxtermii*
0	0	0	0	1	$n'p'q'$	$n + p + q$
1	0	0	1	0	$n'p'q$	$n + p + q'$
2	0	1	0	0	$n'pq'$	$n + p' + q$
3	0	1	1	1	$n'pq$	$n + p' + q'$
4	1	0	0	1	$np'q'$	$n' + p + q$
5	1	0	1	0	$np'q$	$n' + p + q'$
6	1	1	0	1	npq'	$n' + p' + q$
7	1	1	1	1	npq	$n' + p' + q'$

Funcţia are trei variabile care vor fi notate prin *n, p* şi *q*.
Se deduce uşor că punctele în care funcţia *f* are valoari 0 sunt (exprimate în zecimal) 1, 2 şi 5.

Tabelul 5 prezintă sintetic valorile funcţiei, mintermii şi maxtermii pentru fiecare punct din domeniul de definiţie al funcţiei considerate.

Astfel, funcţia mai poate fi scrisă în forma canonică conjunctivă:

$$f\,(n, p, q) = \prod(1, 2, 5),$$

respectiv

$$f(n, p, q) = (n + p + q')(n + p' + q)(n' + p + q').$$

(b) forma canonică disjunctivă a acestei funcţii, corespunzător $f = \sum(0, 3, 4, 6, 7)$, arată astfel:

$$f(n, p, q) = n'p'q' + n'pq + np'q' + npq' + npq.$$

(c) funcţia $f(m, n, p)$ minimizată se va deduce utilizând iniţial suma canonică a acesteia:

$$f(m, n, p) = n'p'q' + n'pq + np'q' + npq' + npq,$$

expresia echivalentă în notaţia cu mintermi fiind aceasta:

$$f(m, n, p) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7.$$

Expresia canonică se grupează astfel:

$$f(n, p, q) = (m_0 + m_4) + (m_4 + m_6) + (m_3 + m_7).$$

$$f(n, p, q) = (n'p'q' + np'q') + (np'q' + npq') +(n'pq + npq),$$

printr-o factorizare convenabilă se obţine expresia:

$$f(n, p, q) = (n'+ n)p'q' + (p + p')nq' + (n' + n)pq.$$

Expresia minimizată, în sumă de produse, a funcţiei $f(n, p, q)$ arată astfel:

$$f(n, p, q) = p'q' + nq' + pq,$$

◊