



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI



Instrumente Structurale
2007-2013



Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Logică

18. Sinteza circuitelor combinate II

SINTEZA CIRCUITELOR COMBINAȚIONALE II

Minimizarea exactă a funcțiilor scalare reprezentate prin diagramele Karnaugh va urma teorema Quine. Astfel, minimizarea are două etape:

- Calculul mulțimii tuturor implicanților primi, și
- Determinarea soluțiilor corespunzătoare mulțimii tuturor implicanților.

Stabilirea implicanților primi ai unei funcții reprezentate printr-o diagramă Karnaugh este mult facilitată de proprietățile de adiacență geometrică ale acestei diagrame.

Pentru o mai clară înțelegere a minimizării funcțiilor logice combinaționale scalare utilizând diagramele Karnaugh se consideră un exemplu simplu.

Exemplul 3.1. Se consideră funcția $h(u,v) = m_0 + m_2 + m_3$. Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcții cu două variabile este prezentată, pentru o simplă urmărire a procedurii, în figura 3.1 (a) iar reprezentarea funcției h este prezentată în figura 3.1(b).

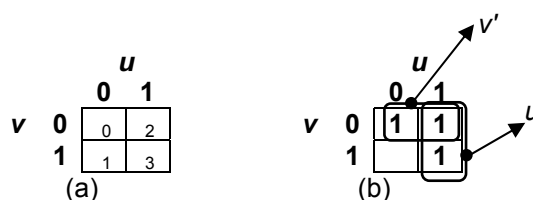


Figura 3.1.

- (a) Diagrama Karnaugh generică pentru funcții cu două variabile.
 (b) Reprezentarea funcției din exemplul 3.1 printr-o diagramă Karnaugh.

Diagrama generică are în fiecare din cele patru celule înscris un număr, corespunzător indexului mintermului asociat respectivei celule. Astfel, deoarece funcția h are trei mintermi, s-au înscris, corespunzător, trei unități pentru cei trei mintermi (figura 3.1(b)).

Cele două contururi din figura 3.1(b) vin să puncteze asocierile, în vederea minimizării funcției, dintre cei trei mintermi. Cei trei mintermi sunt $m_0 = u'v'$, $m_2 = uv'$ și $m_3 = uv$.

Conform primului contur, cel orizontal, se scrie expresia: $m_0 + m_2 = u'v' + uv' = (u' + u)v' = v'$. Similar, pentru cel de-al doilea contur, se scrie expresia: $m_3 + m_2 = uv + uv' = (v + v')u = u$.

De remarca faptul că unitatea corespunzătoare mintermului $m_2 = uv'$, a fost implicată în două contururi distincte datorită proprietății generale $a + a = a$.

Se poate concluziona asupra unei proprietăți esențiale a diagramelor Karnaugh:

- o pereche de unități adiacente cuprinse într-un contur produc un implicanț care are o variabilă mai puțin. Variabilele care s-au păstrat au paritate constantă în conturul respectiv (adică, sunt fie constant asertate, fie constant complementate).

Fiecare contur a determinat câte un implicanț, respectiv $p = v'$ și $q = u$. Se poate ușor constata faptul că ambii implicanți sunt primi (funcția are doar două variabile).

Tabelul incidenței implicanților primi, pentru această funcție, arată astfel:

Tabelul 3.1			
	m_0	m_2	m_3
p	*	*	e
q		*	e

Se remarcă, în tabelul 3.1, faptul că atât p cât și q sunt implicații primi esențiali (mintermul m_0 este acoperit în exclusivitate de implicantul prim p , iar mintermul m_3 este în aceeași relație cu implicantul prim q). S-au scris cu caractere îngroșate unitățile care desemnează respectivul implicant prim ca fiind esențial. Astfel, în dreptul intersecției dintre coloana m_0 și linia p , unitatea respectivă este îngroșată, spre exemplu.

În coloana din extremitatea dreaptă a tabelului implicațiilor primi s-a marcat prin caracterul e , această proprietate a implicațiilor primi.

Rezultă, în final, această expresie minimizată pentru funcția considerată: $h(u,v) = u + v'$.

◇

Așa cum s-a putut vedea în exemplul 3.1 toate contururile desenate peste două unități vecine, dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile, au produs doi implicații primi, în acest caz.

Obținerea mulțimii tuturor implicațiilor primi, dintr-o diagramă Karnaugh, se realizează prin determinarea tuturor contururilor maxime, în diagrama respectivă, care pot fi atașate fiecărei celule marcate (prin 1 ori prin 0, după cum s-a realizat reprezentarea). În exemplul 3.1 s-au putut trasa doar două contururi peste cele trei unități din diagramă.

După cum s-a putut remarca, din figura 3.1(b), atunci când două unități (învecinate) sunt prinse într-un contur rezultă, în general, un implicant care are o variabilă mai puțin. Variabila redusă corespunde variabilei care în respectivul contur, cu două unități, își schimbă paritatea (adică, apare atât asertată cât și complementată).

Un contur, în general, va genera un implicant care va păstra doar variabilele care au aceeași paritate de-alungul conturului respectiv.

Contururile, în general, pot include o unitate, două unități, patru unități, 16 unități, etc în general o expresie de forma 2^p . Din rațiuni de natură pragmatică se recomandă să se utilizeze diagramele Karnaugh pentru funcții al căror număr de variabile n să fie relativ mic, $n < 8$.

Exemplul următor introduce utilizarea diagramei Karnaugh pentru minimizarea funcțiilor cu trei variabile.

Exemplul 3.2. Se consideră funcția $f(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$.

În figura 3.2 (a) este prezentată diagrama Karnaugh generică, pentru funcțiile cu trei variabile.

Astfel, deoarece funcția f este reprezentată prin șase mintermi, s-au înscris, corespunzător, șase unități pentru cei șase mintermi (figura 3.2(b)).

Contururile desenate în figura 3.2(b) epuizează toate posibilitățile de grupare de unități, două câte două, atașate fiecărei unități. Cu alte cuvinte, s-au trasat prin fiecare unitate din diagramă toate contururile maxime posibile.

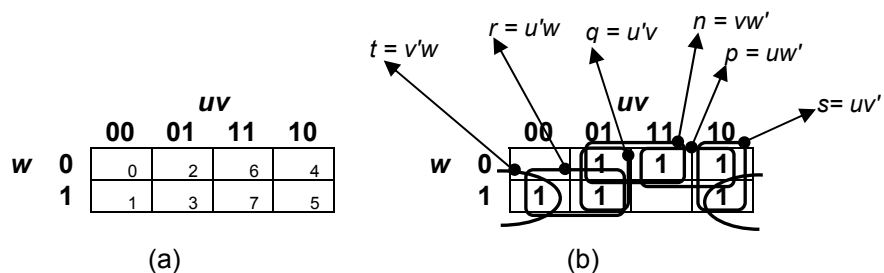


Figura 3.2.

(a) Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcțiile cu trei variabile.

(b) Diagrama Karnaugh pentru funcția din exemplul 3.2.

Este introdus și un contur deosebit (pentru cele două unități aflate în extremitățile ultimei linii). Acesta sugerează cuprinderea celor două unități (corespunzătoare mintermilor m_1 și m_5) printr-un contur generalizat. Acest contur extins, generalizat (prin exteriorul diagramei) este trasat în baza vecinătății unităților respective (ciclicitatea codului Gray).

Implicanții generați prin aceste contururi sunt etichetați astfel:

$$n = m_2 + m_6, p = m_6 + m_4, q = m_2 + m_3, r = m_1 + m_3, s = m_4 + m_5, t = m_1 + m_5.$$

Acești implicanți au următoarele expresii algebrice:

$$n = vw', p = uw', q = u'v, r = u'w, s = uv', t = v'w.$$

Mulțimea implicanților generați este maximă. Nu mai există alți implicanți, pentru această funcție, în afară de aceștia (nu se mai pot genera alte contururi).

Toți implicanții generați sunt primi întrucât nu există alți implicanți ori reuniuni de implicanți care să-i conțină, așa cum se poate repede dovedi (contururile sunt fiecare, în parte, maxime).

Tabelul 3.2 al incidențelor dintre implicanții primi și mintermii acestei funcții arată astfel:

Tabelul 3.2

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
n		*				*
p				*		* e
q		*	*			
r	*		*			e
s		*	*			
t					*	* e

Implicantul r este esențial, deoarece acoperă în exclusivitate mintermul m_1 , așa cum se poate remarca în tabelul 3.2.

Similar, implicantul p este esențial (acoperă în exclusivitate mintermul m_4), după cum și implicantul t este esențial (acoperă în exclusivitate mintermul m_5).

Acești trei implicanți primi esențiali vor face parte din orice acoperire minimală iredundantă a funcției f . În tabelul implicanților s-au marcat implicanții primi esențiali prin caracterul e plasat în stânga tabelului, în dreptul liniilor respective.

Se aplică metoda lui Petrick tabelului cu implicanți primi.

Clauza care stabilește acoperirea primului minterm m_1 , este r .

În mod asemănător, se poate deduce clauza relativă la cel de-al doilea minterm m_2 . Aceasta este $n + q + s$.

Similar, clauza care stabilește acoperirea mintermului m_3 , este $q + r + s$, după cum clauza care determină acoperirea mintermului m_6 este $n + p + t$.

Clauza mintermului m_5 , este t , iar clauza mintermului m_4 , este p .

Produsul lui Patrick, al clauzelor de acoperire ale fiecărui minterm, arată astfel:

$$r(n + q + s)(q + r + s)pt(n + p + t) = 1,$$

Se poate remarca:

$$r(q + r + s) = r$$

și

$$t(n+p+t) = t,$$

ceea ce micșorează sensibil efortul de calcul Boole-an al produsului de sume, deoarece rămâne de calculat doar:

$$r(n + q + s)pt = 1,$$

rezultând în final:

$$nprt + pqrt + prst = 1.$$

În consecință, pentru această funcție, sunt posibile trei acoperiri prime iredundante având aceeași cardinalitate:

(a) $f(u, v, w) = vw' + uw' + u'w + v'w$, (corespunzător termenului $nprt$);

(b) $f(u, v, w) = uw' + u'v + u'w + v'w$, (corespunzător termenului $pqrt$);

(c) $f(u, v, w) = uw' + uv' + u'w + v'w$, (corespunzător termenului $prst$).

◇

Exemplul care urmează vizează utilizarea, în continuare, a diagramei Karnaugh pentru trei variabile și introduce alte contururi tipice pentru această diagramă.

Exemplul 3.3. Patru funcții Booleene f , g , h și j sunt definite după cum urmează:

$$f(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6,$$

$$g(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7,$$

$$h(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7,$$

$$j(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7.$$

Cele patru funcții sunt reprezentate prin diagramele Karnaugh corespunzătoare din figura 3.3 (a), (b), (c) și respectiv (d).

Pentru funcția f sunt desenate două contururi, ambele cu câte patru unități, așa cum se poate remarca în figura 3.3 (a).

Primul contur, care cuprinde prima linie din diagramă, poate fi considerat ca fiind compus din reuniunea (suma) a două contururi vecine, adiacente logic, fiecare cu câte două unități, de forma:

$$(m_0 + m_2) + (m_6 + m_4) = (u'w') + (uw') = w'.$$

Se poate remarca faptul că expresiile anterioare, $u'w'$ și uw' , sunt adiacente logic (diferă printr-o singură variabilă (u) care în prima expresie este complementată, în timp ce în cea de-a doua este asertată).

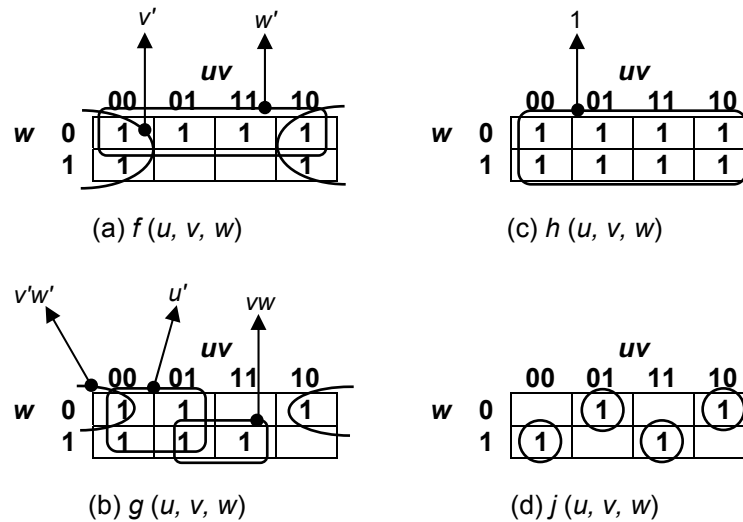


Figura 3.3. Diagramele Karnaugh pentru funcțiile f , g , h și j din exemplul 3.3.

Acest fapt conduce la concluzia că două contururi distincte adiacente, cu câte două unități fiecare se pot grupa sub un contur desenat peste cele patru unități respective. Conturul rezultat va produce un implicant care va avea două variabile mai puțin. Un astfel de contur este, adesea, numit contur linie (ori coloană).

Similar, conturul care cuprinde, de asemenea, patru unități format prin exteriorul diagramei (contur extins) peste cele două coloane din marginile diagramei, poate fi considerat ca fiind alcătuit din reunirea a două contururi adiacente care închid fiecare câte două unități:

$$(m_0 + m_1) + (m_4 + m_5) = (u'v') + (uv') = v'.$$

Contururile cu câte patru celule adiacente imediat ori prin extensie de forma celui descris se numesc adesea careuri.

În concluzie, se poate observa că un contur cu patru unități va crea un implicant care păstrează doar două variabile, acelea care au paritate constantă în conturul respectiv.

Se poate observa, pentru reprezentarea funcției f din figura 3.3.(a), că nu există alte contururi, mai mari care să includă (cuprindă) contururile existente și nici nu există contururi distincte de cele deja trasate.

Aceasta arată, pe de-o parte, că aceste contururi corespund unor *implicanți primi* (nu există alte contururi mai mari care să le includă pe acestea). Iar, pe de altă parte, faptul că nu mai există alte contururi distincte, afară de cele deja trasate, arată *completitudinea mulțimii implicanților primi* desemnați de respectivele contururi.

În final, se poate realiza, cu ușurință, că funcția f (figura 3.3.(a)) are forma (sumă de produse) minimizată, unică:

$$f(u, v, w) = w' + v'.$$

Funcția g (figura 3.3.(b)) are un contur cu patru unități care poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi cuprinzând câte două unități, respectiv:

$$(m_0 + m_2) + (m_1 + m_3) = (u'w') + (u'w) = u'.$$

Celelalte două contururi sunt, fiecare, cu câte două unități:

și respectiv

$$(m_0 + m_4) = v'w'$$

$$(m_3 + m_7) = vw.$$

Privitor la calitatea acestor implicanți de a fi primi, se poate realiza imediat că nu se pot trasa contururi care să includă contururile existente. Iar, în ceea ce privește completitudinea mulțimii implicanților primi, este limpede că nu sunt posibile alte contururi distincte de cele deja trasate. Simplificarea funcției conduce la expresia algebrică (sumă de produse) minimizată, unică:

$$g(u, v, w) = u' + vw + v'w'.$$

Funcția h este reprezentată printr-o diagramă Karnaugh în figura 3.3.(c). Această funcție corespunde funcției constante:

$$h(u, v, w) = 1.$$

Dacă ar fi să se judece doar după definiția acesteia. În adevăr, această funcție este definită peste tot domeniul de definiție prin valoarea 1.

Pe diagrama Karnaugh corespunzătoare (figura 3.3.(c)) s-a desenat un contur care se așează peste toate cele opt unități ale acestei funcții. Acest contur poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi vecine, logic adiacente, fiecare cu câte patru unități.

Primul contur cu patru unități corespunde primei linii ($w = 0$) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică w'). Iar cel de-al doilea contur corespunde celei de-a doua linii ($w = 1$) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică w), așa cum s-a remarcat anterior. Corespunzător, acestor expresii logice asociate celor două contururi cuprinzând fiecare câte patru unități, rezultă:

$$h(u, v, w) = w' + w = 1.$$

Funcția j a cărei diagramă Karnaugh este prezentată în figura 3.3.(d), prezintă un caz particular: toți mintermii funcției j sunt implicanți primi esențiali.

Mai exact, funcția aceasta nu are termeni adiacenți logic (nu există termeni vecini nici în diagramă). Se poate considera, în extremis, că fiecare minterm (respectiv fiecare unitate din diagrama Karnaugh) este adiacent doar cu sine (respectiv acoperit, în diagrama Karnaugh, printr-un contur care cuprinde doar o singură unitate).

Astfel, funcția j are expresia (sumă de produse canonice) unică:

$$j(u, v, w) = u'v'w + u'vw' + uvw + uv'w'.$$

Funcția $j(u, v, w)$ este, adesea, denumită funcția *suma-modulo-2* ori, SAU-EX (sau-exclusiv) cu trei variabile.

□

Uneori este mai convenabilă minimizarea anumitor funcții folosind valorile zero ale acestora comparativ cu minimizarea aceluiași funcții folosind valorile 1. Mai precis, de multe ori este mai simplă găsirea conturilor utilizând valorile 0, comparativ cu valorile 1, ale anumitor funcții.

Minimizarea funcției, astfel calculată, este obținută în final ca un produs de sume, reprezentând complementarea respectivei funcții.

Produsul de sume, este complementabil, eventual, prin aplicarea teoremei DeMorgan determinându-se o sumă de produse.

Acest procedeu este denumit *abordarea complementară*.

Exemplul 3.4.

Se consideră funcția cu trei variabile:

$$g(a, b, c) = m_0 + m_4 + m_6 + m_7.$$

Această funcție este reprezentată prin diagrama Karnaugh pentru trei variabile din figura 3.4.

Sunt trecute în diagrama din figura 3.4 atât valorile asertate cât și valorile complementate ale funcției $g(a, b, c)$.

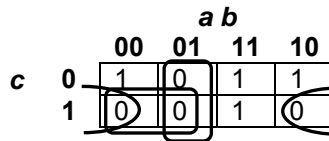


Figura 3.4.

Pentru funcția $g'(a, b, c)$ sunt trei contururi generând mulțimea tuturor implicantilor primi:

- coloana $a'b$, un contur cu două celule care generează implicantul prim $p_1 = a'b$.
- conturul cu două celule format la baza coloanelor $a'b'$ și $a'b$, linia c , producând implicantul prim $p_2 = a'c$.
- conturul extins cu două celule, colțurile inferioare stânga și dreapta ale diagramei, respectiv $a'b'c$ și $ab'c$, reprezentând implicantul $p_3 = b'c$.

Tabelul incidenței implicantilor primi ai complementării funcției este prezentat în tabelul 3.4:

	m_1	m_2	m_3	m_5	
p_1		*	*		e
p_2	*		*		
p_3	*			*	e

Implicantii primi p_1 și p_3 sunt esențiali și constituie o acoperire minimă a complementării funcției:

$$g'(a, b, c) = a'b + b'c.$$

Iar funcția va avea forma:

$$g(a, b, c) = (a'b + b'c)' = (a + b')(b + c).$$

Dacă asupra acestei forme se calculează produsele (desfacerea parantezelor) și se efectuează complet toate calculele se obține:

$$g(a, b, c) = ab + ac' + b'c'.$$

□

Exemplele următoare prezintă principalele tehnici de utilizarea a diagramelor Karnaugh pentru minimizarea funcțiilor logice cu patru variabile. Corespunzător

acestor funcții diagramele Karnaugh pentru patru variabile joacă un rol important în metodele manuale de minimizare a funcțiilor cu cinci și șase variabile.

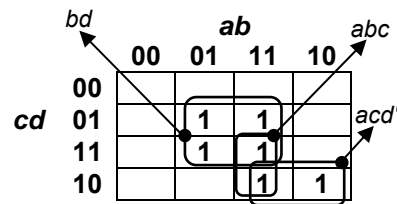


Figura 3.5.

Exemplul 3.5.

Fie funcția: $f(a, b, c, d) = m_5 + m_7 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$.

Acestei funcții îi corespunde expresia în sume de produse calculate în raport cu variabilele a, b, c și d :

$$f(a, b, c, d) = a'bc'd + a'bcd + ab'cd' + abc'd + abcd' + abcd.$$

În figura 3.5 se arată reprezentarea acestei funcții printr-o diagramă Karnaugh, corespunzător variabilelor a, b, c și d .

Ultima linie din diagramă are două celule adiacente (corespunzătoare mintermilor $m_{10} + m_{14}$). Prin celula corespunzătoare mintermului m_{10} este unicul și cel mai larg contur care se poate trasa. Aceasta revine la a spune că implicantul $p_1 = acd' = m_{10} + m_{14}$, este prim și esențial.

Prin celula corespunzătoare mintermului m_{14} este posibilă trasarea conturului care include și celula vecină a mintermului m_{15} . Acest contur conduce la implicantul $p_2 = abc = m_{14} + m_{15}$. Implicantul p_2 este prim, deoarece conturul corespunzător este maximal.

Central în diagramă sunt dispuse patru celule, corespunzătoare mintermilor:

$$m_5 + m_{13} + m_7 + m_{15}.$$

Aceste patru celule se pot considera, într-o primă aproximare, ca fiind două contururi vecine, fiecare de câte două celule: $(m_5 + m_{13}) + (m_7 + m_{15}) = bc'd + bcd = bd$.

Se poate trage concluzia că un astfel de grup de patru celule învecinate sunt grupabile într-un contur care generează un implicant având două variabile reduse (acelea care n-au paritate constantă de-a lungul conturului, în cazul de față variabilele reduse sunt a și c).

Implicantul generat, $p_3 = bd$, este prim deoarece nu există un alt contur care să includă acest contur. Implicantul prim $p_3 = bd$ este, de asemenea, și esențial deoarece acoperă în exclusivitate mintermii m_5, m_{13} și m_7 .

Tabelul 3.5

	m_5	m_7	m_{10}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	
$p_1 = acd'$			*		*		e
$p_2 = abc$					*	*	
$p_3 = bd$	*	*		*		*	e

Incidența dintre implicanții primi și mintermii, pentru această funcție, este arătată în tabelul 3.5.

Extragerea implicantilor primi esențiali (împreună cu mintermi acoperiți) face ca tabelul incidenței implicantilor primi să fie vid.

Rezultă că minimizarea exactă minimă este realizată prin acoperirea funcției doar cu implicantii primi esențiali p_1 și p_3 .

Aceasta conduce la expresia minimizată exactă a funcției:

$$f(a, b, c, d) = acd' + bd.$$

◇

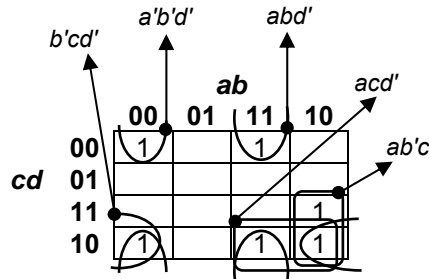


Figura 3.6.

Exemplul 3.6.

Se dorește calculul tuturor formelor minimizate exact ale funcției:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14},$$

Reprezentarea acestei funcții printr-o diagramă Karnaugh este înfățișată în figura 3.5.

Utilizând această reprezentare se determină, într-o primă etapă, mulțimea implicantilor primi. În acest scop se stabilesc pentru fiecare din celulele funcției toate contururile maxime care sunt posibile față de respectiva celulă.

Astfel, pentru celula corespunzătoare mintermului m_0 ($ab = 00$ și $cd = 00$, colțul din stânga sus în diagramă) este posibil un singur contur, extins, între această celulă și celula corespunzătoare mintermului m_2 ($ab = 00$ și $cd = 10$, colțul din stânga jos în diagramă). Implicantul corespunzător acestui contur va avea o variabilă mai puțin.

Aceasta este variabila c care schimbă paritatea în cadrul acestui contur. În adevăr:

$$p_1 = m_0 + m_2 = a'b'c'd' + a'b'cd' = a'b'd'(c' + c) = a'b'd'.$$

Implicantul p_1 este prim deoarece nu există un alt implicant care să-l conțină (adică, să aibă mai puține variabile).

Celulei care reprezintă mintermul m_{12} ($ab = 11$ și $cd = 00$, linia superioară din diagramă) i se poate atașa un singur contur, extins, între această celulă și celula reprezentând mintermul m_{14} ($ab = 11$ și $cd = 10$, linia inferioară din diagramă).

Pentru acest contur, cu două celule, implicantul rezultat p_2 se determină prin stabilirea variabile care nu are paritate constantă. Aceasta este variabila c .

Se poate ușor verifica rațiunea acestei afirmații:

$$p_2 = m_{12} + m_{14} = abc'd' + abcd' = a'b'd'(c' + c) = abd'.$$

Pentru celula mintermului m_{10} ($ab'cd'$) este posibil să se traseze trei contururi distincte, maxime, pentru care se vor determina implicantii primi p_3, p_4 și p_5 .

Implicantul p_3 este asociat conturului dintre celule mintermilor m_{10} și m_{14} . În cadrul acestui contur, cu două celule, va fi o singură variabilă care are schimbare de paritate. Aceasta este variabila b , celelalte variabile având paritate constantă.

Un calcul simplu poate să susțină această concluzie:

$$p_3 = m_{10} + m_{14} = ab'cd' + abcd' = acd'(b' + b) = acd'$$

Implicantul p_3 este prim deoarece conturul respectiv este maximal, neexistând un altul care să-l conțină.

Cel de-al doilea contur asociat celulei mintermului m_{10} este conturul care reunește această celulă și celula mintermului m_{11} .

Implicantul p_4 , generat de acest contur, va fi de forma $ab'c$, deoarece variabila d nu are paritate constantă în cadrul conturului considerat.

Ultimul contur asociat acestei celule reunește celula mintermului m_{10} cu celula mintermului m_2 . În cadrul acestui contur implicantul prima care se va genera va avea variabila a redusă, deoarece aceasta schimbă paritatea în acest contur.

Implicantul produs prin acest contur, p_5 , este prim, fiind generat dintr-un contur maximal. Formula algebrică a implicantului prim p_5 , este $b'cd'$.

Tabelul 3.6 prezintă incidența implicantilor primi în raport cu mintermii funcției din acest exemplu.

Tabelul 3.6

	m_0	m_2	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	*	*					e
p_2					*	*	e
p_3			*			*	
p_4			*	*			e
p_5		*	*				

În tabelul 3.6, asteriscurile scrise îngroșat reprezintă, succint, cauza pentru care respectivul implicant prim este declarat esențial.

Astfel, deoarece mintermul m_0 este acoperit doar de implicantul prim p_1 , acest fapt conduce la declararea implicantului prim p_1 ca fiind esențial.

Din acest motiv, unitatea aflată la intersecția coloanei m_0 cu linia p_1 este scrisă îngroșat.

Considerații similare au condus la scrierea îngroșată a celorlalte unități din tabelul implicantilor primi.

Toți implicantii primi, din tabelul implicantilor, sunt esențiali în afară de implicantii primi p_3 și p_5 .

Implicantii primi esențiali vor face parte din orice acoperire minimă exactă a acestei funcții.

Din tabelul implicantilor se calculează clauzele formulei lui Petrick, astfel:

- (a) mintermul m_0 este acoperit de implicantul prim esențial p_1 ;
- (b) mintermul m_2 este acoperit de implicantii primi p_1 (esențial) și p_5 ;
- (c) mintermul m_{10} este acoperit de implicantii primi p_4 (esențial), p_5 și p_3 ;
- (d) mintermul m_{11} este acoperit de implicantul prim esențial p_4 ;
- (e) mintermul m_{12} este acoperit de implicantul prim esențial p_2 ;
- (f) mintermul m_{14} este acoperit de implicantul prim esențial p_2 , dar și de implicantul prim p_3 .

Formula lui Petrick pentru această funcție arată astfel:

$$p_1 \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 \cdot p_2 \cdot (p_2 + p_3) = 1.$$

Aplicând identitatea $a(a + b) = a$, formula lui Petrick se simplifică sesizabil, deoarece:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot (p_1 + p_5) &= p_1, \\ (p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 &= p_4 \text{ și} \\ p_2 \cdot (p_2 + p_3) &= p_2. \end{aligned}$$

Formula lui Petrick, pentru această funcție, ajunge să fie exprimată prin produsul celor trei implicații primi esențiali:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 1.$$

În conformitate cu ultima expresie a formulei lui Petrick, rezultă că pentru funcția considerată există o acoperire primă unică iredundantă, exactă și minimă, exprimată prin reuniunea celor trei implicații primi esențiali:

$$f(a, b, c, d) = a'b'd' + abd' + ab'c.$$

Privitor la simplificarea anterioară a formulei lui Petrick se cuvin făcute câteva considerații, utile, pe marginea tabelului implicațiilor.

Deîndată ce s-au declarat implicații primi, respectiv p_1 , p_2 și p_4 , aceștia urmează să aparțină oricărei minimizări exacte, determinate prin acoperirea (mintermilor) funcției cu implicații primi, în conformitate cu teorema lui Quine.

Privitor la implicații primi, p_1 , p_2 și p_4 , este clar că aceștia acoperă, în exclusivitate, respectiv mintermii m_0 , m_{12} , și m_{11} .

Dar, odată cu includerea (obligatorie) a implicațiilor primi esențiali în orice soluție de acoperire a funcției, sunt acoperiți și alți mintermi decât acei care au determinat calificarea acestor implicații primi ca fiind esențiali.

Astfel, se poate remarca faptul că prin includerea implicanțului prim esențial p_1 , în soluția minimizării exacte a funcției, odată cu mintermul m_0 , este acoperit și mintermul m_2 .

Prin această remarcă se micșorează complexitatea problemei alegerii unui set de implicații primi (s-a redus numărul de mintermi care trebuie acoperiți).

Tabelul implicațiilor primi a fost modificat (tabelul 3.6a) în intenția marcării mintermilor acoperiți de implicanțul prim esențial p_1 .

Astfel, s-au marcat cei doi mintermi acoperiți de implicanțul prim esențial p_1 .

Tabelul 3.6a
Influența implicanțului prim esențial p_1

	m_0	m_2	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	*	*					e
p_2					*	*	e
p_3			*			*	
p_4			*	*			e
p_5		*	*				

Analog, se poate observa că implicanțul prim esențial p_2 , acoperă (în afară de mintermul m_{12}) și mintermul m_{14} .

Tabelul implicantilor a fost din nou modificat, așa cum se poate vedea în tabelul 3.6b, prin bararea celor doi mintermi acoperiți de implicantul prim esențial p_2 .

Tabelul 3.6b
Influența implicantilor primi esențiali p_1 și p_2

	m_0	m_2	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	*	*					e
p_2					*	*	e
p_3			*			*	
p_4			*	*			e
p_5		*	*				

Similar, implicantul prim esențial p_4 , acoperă (în afară de mintermul m_{11}) și mintermul m_{10} .

Tabelul implicantilor a fost, încă odată, modificat prin bararea celor doi mintermi acoperiți de implicantul prim esențial p_4 .

Tabelul 3.6c
Influența celor trei impicanți primi esențiali

	m_0	m_2	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	*	*					e
p_2					*	*	e
p_3			*			*	
p_4			*	*			e
p_5		*	*				

Acum, este evident că impicanții primi esențiali ai acestei funcții sunt, și prin aceste considerente, soluția unică a minimizării exacte a funcției:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14}.$$

◇

În figura 3.7 sunt prezentate alte contururi posibile, care grupează câte patru celule într-o diagramă Karnaugh, pentru funcții cu patru variabile.

Pentru fiecare funcție reprezentată în figura 3.7 este menționată formula minimizată corespunzătoare conturului respectiv.

Figurile 3.7 (a) și (b) înfățișează contururi cu câte patru unități grupate în contururi ce formează *careuri*.

		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11			1	1
	10			1	1

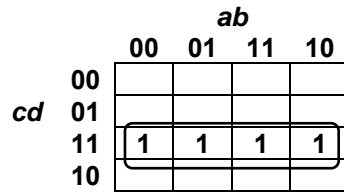
$$f(a, b, c, d) = ac$$

Figura 3.7 (a).

		ab			
		00	01	11	10
cd	00		1	1	
	01		1	1	
	11				
	10				

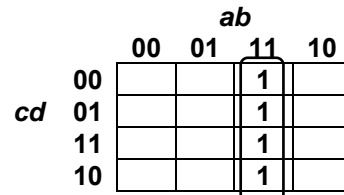
$$g(a, b, c, d) = bc'$$

Figura 3.7 (b).



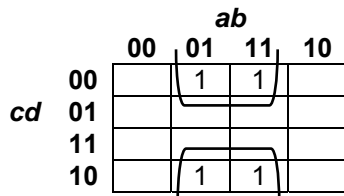
$$h(a, b, c, d) = cd$$

Figura 3.7 (c).



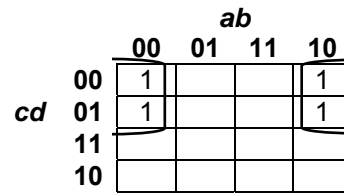
$$j(a, b, c, d) = ab$$

Figura 3.7 (d).



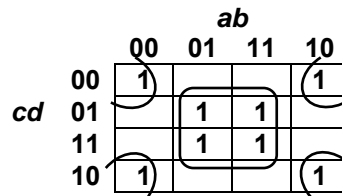
$$k(a, b, c, d) = bd'$$

Figura 3.7 (e).



$$m(a, b, c, d) = b'c'$$

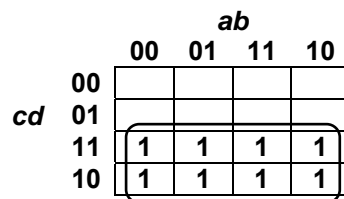
Figura 3.7 (f).



$$n(a, b, c, d) = b'd' + bd$$

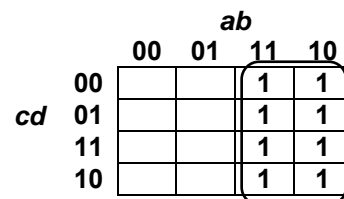
Figura 3.7 (g).

În figura 3.7 sunt înfățișate contururi care includ opt celule, în diagramele Karnaugh pentru funcții cu patru variabile.



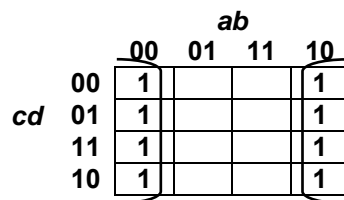
$$m(a, b, c, d) = c$$

Figura 3.7 (a).



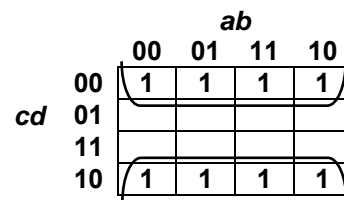
$$n(a, b, c, d) = a$$

Figura 3.7 (b).



$$p(a, b, c, d) = b'$$

Figura 3.7 (c).



$$q(a, b, c, d) = d'$$

Figura 3.7 (d).

Sunt, de multe ori, situații în care complementarea unei funcții poate oferi, ocazional, soluții mai bune. Exemplul care urmează prezintă un astfel de caz.

Exemplul 3.7.

Se consideră funcția cu patru variabile:

$$h(a, b, c, d) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10}.$$

În figura 3.8. (a), este prezentată diagrama Karnaugh a funcției $h(a, b, c, d)$, iar în figura 3.8.(b), este prezentată diagrama Karnaugh a complementării acesteia, $h'(a, b, c, d)$.

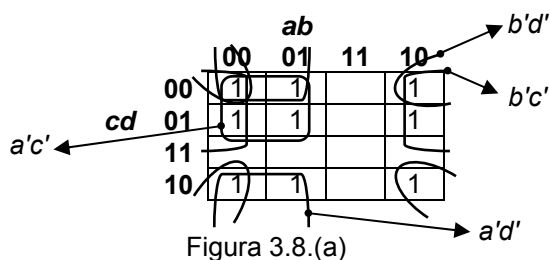


Figura 3.8.(a)

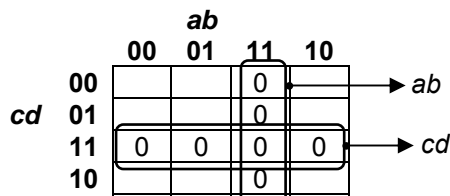


Figura 3.8.(b)

Pentru funcția $h(a, b, c, d)$, din figura 3.8.(a) se determină patru implicații primi constituind mulțimea tuturor implicațiilor primi ai acestei funcții. Acești patru implicații sunt generați astfel:

- (1) conturul cu patru celule delimitat între coloanele $ab = 00$ și $ab = 01$ și liniile $cd = 00$ și $cd = 01$, va genera implicanțul prim $p_1 = a'c'$;
- (2) conturul, în extensie, cu patru unități delimitat între aceleași coloane ca și precedentul contur, dar cuprinzând liniile $cd = 00$ și $cd = 10$, va genera implicanțul prim $p_2 = a'd'$;
- (3) conturul, în extensie, cu patru unități cuprinzând coloanele $ab = 00$ și $ab = 10$ și liniile $cd = 00$ și $cd = 01$, va genera implicanțul prim $p_3 = b'c'$;
- (4) conturul, în extensie, cu patru unități cuprinzând cele patru celule din colțurile diagramei ($abcd = 0000, 1000, 1010$ și 0010), va genera implicanțul prim $p_4 = b'd'$.

Se poate dovedi ușor că toți implicațiii primi sunt esențiali.

Minimizarea exactă a funcției $h(a, b, c, d)$ arată astfel:

$$h(a, b, c, d) = a'c' + a'd' + b'c' + b'd'.$$

Utilizând diagrama Karnaugh a complementării funcției (figura 3.9.(b)) se obține expresia:

$$h'(a, b, c, d) = ab + cd.$$

Această expresie (pentru $h'(a, b, c, d)$) are doar doi termeni produs, în timp ce expresia minimizată a funcției $h(a, b, c, d)$ are patru termeni produs.

Este evident că minimizarea funcției complementare are jumătate din numărul termenilor produs corespunzători minimizării funcției considerate și introduce doar o inversare a ieșirii porții finale (sunt disponibile curent porți SAU-NU fără costuri suplimentare).

Complementând expresia funcției $h'(a, b, c, d)$ rezultă următoarea formă a funcției h :

$$h(a, b, c, d) = (a' + b')(c' + d').$$

Efectuând calculele se regăsește prima expresie determinată, anterior, pentru funcția $h(a, b, c, d)$.

□

4. Minimizarea funcțiilor scalare specificate prin produse de sume

Anumite implementări ale funcțiilor logice impun exprimarea acestora prin produse de sume (termenul în engleză este *product of sums* cu abrevierea POS).

Atunci când sunt utilizate diagramele Karnaugh pentru minimizarea acestor expresii se poate obține o minimizarea a produselor de sume prin utilizarea valorilor zero ale funcției respective.

Exemplul 4.1.

Se consideră funcția reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.1.(a).

Funcția este specificată prin valorile 0.

Procedeeul de minimizare în cazul produselor de sume este similar celui în care sunt utilizate sumele de produse, cu câteva excepții care vizează în special modul de citire al sumelor minimizate, în acest caz. Astfel, pentru determinarea sumelor corespunzătoare conturilor (trasate peste celulele conținând zerouri) o variabilă este complementată dacă valoarea sa de-a lungul conturului este constant unu. Altfel, dacă valoarea sa este asertată dacă peste conturul considerat este constant zero.

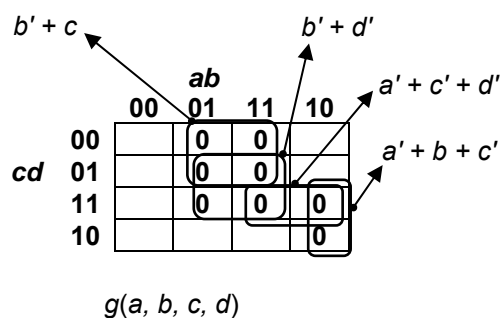


Figura 4.1.(a)

Se poate remarca, din figura 4.1.(a), că sunt posibile în total patru contururi atașate celor opt celule, conținând zerourile corespunzătoare expresiei funcției. Corespunzător fiecărui contur sunt atașate, în figura 4.1.(a), expresiile logice în sume, minimizate. Expresiile logice atașate fiecărui contur sunt calculate în maniera specificată anterior.

Într-o primă formă funcția $g(a, b, c, d)$ este exprimată prin produse de sume și arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + c' + d')(a' + b + c')$$

Conturul corespunzător sumei (implicatului) $a' + c' + d'$, nu este esențial, se poate realiza fără dificultate. Astfel, se poate remarca faptul că implicatul neesențial este conținut în produsul celorlalți implicați.
 Toate celelalte contururi produc implicați esențiali.
 În final formula minimizată exact printr-un produs de sume arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + b + c').$$

□

O posibilă metodă alternativă poate fi formulată astfel:

- (1) În reprezentarea funcției complementate, celule vor fi inițializate prin valori unu;
- (2) Se calculează minimizarea cunoscută, utilizând diagramele Karnaugh, rezultatul fiind exprimat printr-o sumă de produse;
- (3) Se complementează expresia rezultată prin legea DeMorgan, obținând produse de sume.

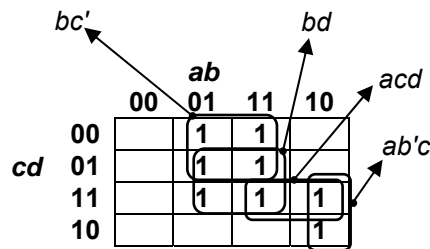
Se poate demonstra, în fapt, că procedeul prezentat anterior este echivalent acestei metode, alternative.

Această metodă, alternativă, este prezentată în exemplul următor.

Pentru o mai bună înțelegere și o facilă comparație s-a utilizat aceeași funcție ca și în exemplul 4.1.

Exemplul 4.2.

Se consideră funcția reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.2.



$$g'(a, b, c, d)$$

Figura 4.2.

Sunt patru contururi în figura 4.2, din care unul nu este esențial, cel corespunzător implicatului acd .

Acest implicat este conținut în reuniunea altor doi implicați primi:

$$acd \subset bd + ab'c.$$

Pentru că, $acd = m_{15} + m_{11}$, iar $bd + ab'c = (m_{15} + m_{13} + m_7 + m_5) + (m_{11} + m_{10})$.

Forma minimizată exact în sume de produse a funcției $g'(a, b, c, d)$, arată astfel:

$$g'(a, b, c, d) = bc' + bd + ab'c.$$

Aplicând legea DeMorgan rezultă următoarea formă minimizată în sume de produse pentru funcția considerată:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + b + c').$$

□