UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Logică

03. Analiza circuitelor combinaţionale

ANALIZA CIRCUITELOR COMBINAŢIONALE

Un circuit combinaţional C, este definit prin relaţiile dintre intrări şi ieşiri :

$$f_i : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}, \qquad (\mathbf{B}=\{0,1\}),$$
$$z_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

unde :

- z_i , $0 \leq i \leq m-1$, este una dintre liniile de ieşire ale circuitului, iar
- $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sunt liniile de intrare în circuitul combinaţional considerat (diagrama modelului circuitelor combinaţionale, este prezentată în figura 1).

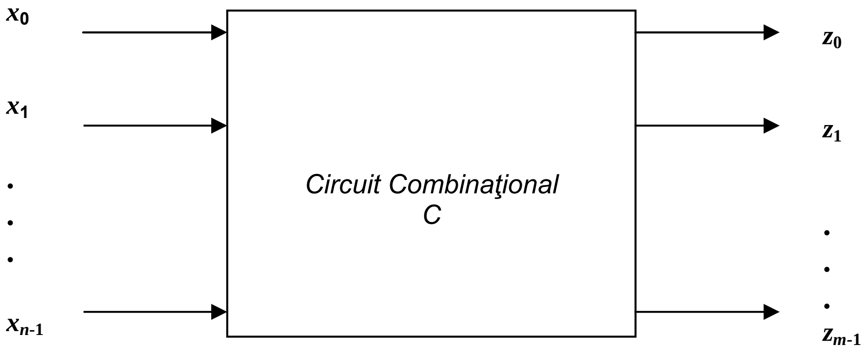

Figura 1. Reprezentarea modelului unui circuit combinaţional

1. Introducere

Se poate remarca, din relaţia care leagă liniile de intrare de liniile de ieşire, dependenţa în exclusivitate a valorilor ieşirilor de valorile aplicate intrărilor.
Ca particularitate, funcţiile Boole-ene sunt, întotdeauna, funcţii cu domeniul de definiţie finit. Aşa cum au fost prezentate mai sus funcţiile f_i au 2^n puncte, n-uple, distincte în domeniul lor de definiţie (produsul cartezian al mulţimii **B** cu aceasta însăşi de n ori).
Datorită faptului că funcţiile au un domeniu de definiţie cu 2^n n-uple distincte, iar funcţiile pot lua doar două valori, atunci numărul funcţiilor distincte, astfel considerate, este 2^{2^n} .

Exemplul 1.1
Funcţiile distincte cu două variabile sunt :

Tabelul 1.1 Mulţimea tuturor funcţiilor Boole-ene cu două variabile.

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Dintre acestea, se remarcă, pentru ilustrarea exemplului :

- funcţiile constante 0 şi 1, respectiv f_0 şi f_{15} ;
- funcţiile identic x_1 şi x_0, respectiv f_3 şi f_5 ;
- funcţiile x_1' şi x_0', respectiv f_{12} şi f_{10};
- funcţiile SAU şi ŞI, respectiv f_7 şi f_1.

◊

Circuitele combinaţionale pot fi introduse prin enumerarea valorilor funcţiei corespunzătoare punctelor, în număr finit, domeniului de definiţie sau printr-o descriere comportamentală a circuitului. Cea de-a doua cale este reductibilă la prima.

Exemplul 1.2
Se consideră un circuit combinaţional care realizează suma a două numere binare *a* şi *b* fără semn reprezentate fiecare printr-un singur rang. Un astfel de circuit se numeşte, tradiţional, *semi-sumator*.

Circuitul, se poate remarca, este introdus printr-o descriere comportamentală. Acestei descrieri se poate asoca, simplu, o descriere enumerativă punct cu punct, după cum urmează :

((*a,b*) | *suma, transportul*) :{ ((0, 0) | 0, 0), ((0, 1) | 1, 0), ((1, 0) |1, 0), ((1, 1) | 0, 1) }.

Se remarcă utilizarea unui mod de scriere explicit atât al valorilor argumentelor *a* şi *b* cât şi al valorilor funcţiilor de ieşire *suma* şi *transportul*, separând prin caracterul bară verticală (|) punctul curent din domeniul de definiţie, de valorile funcţiilor în acel punct. Acest mod de scriere este mult răpândit în literatură.

Cele două funcţii sunt exprimabile separat ca formule Boole-ene utilizând fie valorile 1 (acolo unde funcţia este *asertată*), fie valorile 0 (acolo unde funcţia este *complementată*). În acest exemplu se va considera exprimarea celor două funcţii prin aserţiuni.

Pentru aceasta se construiesc formulele celor două funcţii utilizând teorema de reprezentare a algebrelor Boole-ene :

$$suma(a,b) = a'b + ab' \;;\; transportul(a,b) = ab.$$

S-a utilizat notaţia, mult răspândită, *a'* pentru variabila *a* complementată.

Există o strânsă corespondenţă între definirea punct cu punct (numită şi definirea prin tabela de adevăr) şi scrierea prin formule a unei funcţii. În realitate, ambele cuprind aceeaşi informaţie. Se poate remarca, din forma canonică disjunctivă, că produsele variabilelor funcţiilor sunt calculate acolo unde funcţia ia valoarea 1. Produsele respective se numesc, tradiţional, *termeni produs* (din cauza analogiei, curent practicate, dintre funcţia ŞI şi Multiplicarea numerelor reale) şi se calculează astfel :

- valoare 0 a variabilei, variabila apare în produs complementată,
- valoare 1 a variabilei, variabila apare în produs asertată.

Pentru termenii produs se mai utilizează, alternativ, denumirea de mintermi. Mintermii sunt indiciaţi, curent, cu valorile zecimale corespunzătoare scrierii binare a mintermului. Astfel formulele pentru cele două funcţii pot fi scrise, în aceeaşi ordine, astfel :

$$suma(a,b) = m_1 + m_2 \;;\; transportul(a,b) = m_3.$$

Construcţia formulelor prin punctele unde funcţiile sunt complementate se poate deduce similar sau se poate calcula simplu utilizând relaţiile De Morgan aplicate formulei deduse pentru punctele unde funcţiile sunt asertate. Este un foarte bun exerciţiu.
◊

1.1 Dualitatea şi Legile DeMorgan

Dualitatea este o proprietate foarte utilă a algebrelor booleene. Expresia duală a unei expresii Booleene se deduce prin:

- înlocuirea operatorului ŞI ($\cdot$), prin operatorul SAU (+) şi reciproc;
- înlocuirea constantei 0, prin constanta 1 şi reciproc;
- în timp ce, variabilele expresiei rămân neschimbate.

Orice teoremă ori propoziţie demonstrată din algebra booleană ca fiind adevărată, are întodeauna o duală, deasemenea adevărată. Dualitatea este, în esenţă, o *meta-teoremă*, cu alte cuvinte o teoremă despre teoreme.

Cu toate că dualitatea nu cuprinde, în sine, o modalitate directă de simplificare a expresiilor booleene, aceasta oferă posibilitatea deducerii unor noi teoreme din cele deja cunoscute ajuntând astfel în procesul de simplificare al expresiilor.

Astfel, teorema de unificare $x \cdot y + x \cdot y' = x$, are duala formulată astfel $(x + y) \cdot (x + y') = y$.

O demonstraţie a dualei teoremei de unificare decurge, succesiv, în două etape astfel:
(1) aplicând legea de distributivitate se poate transcrie expresia membrului stâng al dualei teoremei de unificare:

$$(x + y) \cdot (x + y') = x \cdot (x + y') + y \cdot (x + y'),$$

(2) în continuare, expresia obţinută devine:

$$x \cdot (x + y') + y \cdot (x + y') = x + y \cdot x = x \cdot (y + 1) = x,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Se consideră expresia: $f = abc + a'(b + c)$, pentru care se calculează duala. O cale simplă de calcul a dualei poate fi imaginată prin divizarea expresiei date în sub-expresii mai mici pentru care efortul de calcul poate fi mai uşor controlat: $f = e_1 + e_2$, unde $e_1 = abc$, iar $e_2 = a'(b + c)$.
Se notează, tradiţional, duala expresiei f prin f_D, rezultând că:

$$f_D = e_{1D} \cdot e_{2D}.$$

Aplicând principiul dualităţii sub-expresiei e_{1D}, rezultă:

$$e_{1D} = a + b + c.$$

Similar, se calculează sub-expresia:

$$e_{2D} = a' + bc.$$

Rezultatul final arată astfel :

$$f_D = (a + b + c)(a' + bc).$$

Legea DeMorgan oferă o modalitate teoretică de complementare a unei funcţii, de complexitate modică. Expresia complementară a unei expresii date se formează pornind de la expresia originală prin înlocuirile:

- oricare literal, prin complementul său (x prin x' şi reciproc),
- oricare constantă, prin complementara sa (0 se substituie prin 1 şi reciproc),
- operatorul ŞI se substituie prin operatorul SAU şi reciproc.

Această teoremă, aplicată chiar operatorilor ŞI şi SAU arată relaţiile cu operatorii complementari SAU-NU respectiv ŞI-NU:

$$(x + y)' = x' \cdot y',$$
$$(x \cdot y)' = x' + y'.$$

Relaţiile anterioare pot fi interpretate astfel:

Operatorul SAU-NU aplicat unor variabile, este identic cu operatorul ŞI aplicat variabilelor respective dar complementate, în timp ce operatorul ŞI-NU aplicat unor variabile este identic cu operatorul SAU aplicat variabilelor respective dar complementate.

Se consideră expresia booleană de trei variabile $E(a,b,c) = a'b'c + a'bc + ab'c + abc'$. Complementara acesteia se calculează, pas cu pas astfel:

$$(E(a,b,c))' = (a'b'c + a'bc + ab'c + abc')',$$
$$(E(a,b,c))' = (a'b'c)' \cdot (a'bc)' \cdot (ab'c)' \cdot (abc')',$$
$$(E(a,b,c))' = (a + b + c') \cdot (a + b' + c') \cdot (a' + b + c') \cdot (a' + b' + c),$$
$$(E(a,b,c))' = (a + ab' + ac' + ab + bc' + b'c' + c') \cdot (a' + a'b' + a'c + a'b + bc + a'c' + b'c'),$$
$$(E(a,b,c))' = (a + bc' + b'c' + c') \cdot (a' + bc + b'c'),$$
$$(E(a,b,c))' = (a + c')(a' + bc + b'c'),$$
$$(E(a,b,c))' = abc + ab'c' + a'c' + b'c',$$
$$(E(a,b,c))' = abc + b'c' + a'c'.$$

O metodă, puţin mai simplă, pentru calculul formal al complementului expresiei unei funcţii constă în calculul dualei expresiei funcţiei urmat de complementarea fiecărui literal.

Astfel, complementul expresiei booleene de trei variabile din exemplul precedent ar putea fi calculat după cum urmează:

$$E_D(a,b,c) = (a' + b' + c) \cdot (a' + b + c) \cdot (a + b' + c) \cdot (a + b + c'),$$

Complementând fiecare literal din expresia dualei rezultă:

$$(E(a,b,c))' = (a + b + c') \cdot (a + b' + c') \cdot (a' + b + c') \cdot (a' + b' + c).$$

De remarcat faptul că duala unei expresii şi legea DeMorgan aplicată aceleiaşi expresii nu sunt unul şi acelaşi lucru. Procedeul de obţinere al dualei este similar cu menţiunea că *literalii nu sunt complementaţi* pe durata procesului de calcul. Astfel, duala funcţiei SAU-NU este funcţia ŞI-NU şi reciproc, iar duala funcţiei ŞI este funcţia SAU şi reciproc. Atunci când se aplică, unei funcţii, teorema dualităţii se obţine o cu totul altă funcţie. Prin aplicarea legii DeMorgan unei funcţii anumite se obţine complementara respectivei funcţii.

1.2 Formele Canonice

Compararea în raport cu identitatea, spre exemplu, a două funcţii Boole-ene exprimate algebric (formule algebrice) este mult facilitată dacă se utilizeză o formă *etalon* pentru codificarea, reprezentarea, funcţiilor respective. Termenul *etalon* trebuie înţeles în sensul unei standardizări, a unei *unicităţi*, a scrierii algebrice pentru funcţiile binare de variabilă binară. În literatură formele acestea se numesc forme *canonice*. Formele canonice sunt forme unic determinate de funcţia pe care o reprezintă şi reciproc. Deîndată ce două funcţii au aceeaşi formă canonică, acestea sunt identice. În mod frecvent se utilizează două forme canonice :

- Forma canonică disjunctivă, care se mai numeşte şi *suma de produse* (*sum of products* este termenul anglo-saxon cu binecunoscuta abreviere *SOP*) şi
- Forma canonică conjunctivă, numită deasemenea şi *produs de sume*.

Există şi alte forme canonice, cum ar fi *forma canonică exclusiv-disjunctivă*, spre exemplu, şi lista ar putea continua.

1.2.1 Sumele de produse

S-au utilizat deja în exemplul semi-sumatorului aceste sume şi s-au precizat modalităţile de construcţie a acestor sume. Teoretic privind construcţia acestor sume se poate remarca faptul

că sunt utilizate anumite funcţii predefinite numite *mintermi.* În principiu fiecare minterm este asociat unui punct specific din domeniul de definiţie al funcţiei şi este propriu domeniului de definiţie. Un minterm este constituit prin conjuncţia tuturor variabilelor funcţiei (o variabilă apare o singură dată), iar fiecare variabilă apare în formă asertată (directă, dacă în punctul respectiv variabila apare cu valoarea 1) şi în formă complementată (negată, dacă variabila în punctul respectiv are valoarea 0).
Fiecare minterm este ponderat prin conjuncţie cu valoarea funcţiei în punctul corespunzător mintermului.

1.2.2 Produsele de sume

Teorema involuţiei stabileşte că prin complementarea complementului unei expresii, formule, booleene E se obţine expresia E. Aplicând de două ori teorema De Morgan se poate deduce a doua formă canonică a unei formule booleene. Această formă se numeşte *forma canonică conjunctivă* sau, încă, *dezvoltarea în maxtermi*.

Procedeul de construcţie al celei de-a doua forme canonice este dual celui utilizat pentru construcţia formei canonice disjunctive.
Sunt utilizate exclusiv punctele în care funcţia ia valoarea 0. Pentru fiecare dintre aceste puncte sunt constituiţi *maxtermii,* câte unul pentru fiecare punct..
Un *maxterm* este definit prin disjuncţia, suma, variabilelor funcţiei (fiecare apare o singură dată fie asertată, fie complementată). Variabila apare în maxterm în formă asertată dacă în acel punct variabila respectivă are valoarea 0 şi apare în formă complementată dacă în acel punct variabila are valoarea 1.
Este exact regula opusă celei cu care se construiesc mintermii.
Produsul tuturor maxtermilor unei funcţii constituie forma canonică conjunctivă sau, altfel spus, produsul de sume al respectivei funcţii.

Exemplu 1.3
Se consideră produsul cartezian $\mathbf{B}^3$ pentru care se calculează toţi maxtermii :

Tabelul 1.2.
Maxtermii spaţiului $\mathbf{B}^3$

a	*b*	*c*	*Maxtermii*
0	0	0	$a + b + c = M_0$
0	0	1	$a + b + c' = M_1$
0	1	0	$a + b' + c = M_2$
0	1	1	$a + b' + c' = M_3$
1	0	0	$a' + b + c = M_4$
1	0	1	$a' + b + c' = M_5$
1	1	0	$a' + b' + c = M_6$
1	1	1	$a' + b' + c' = M_7$

◊

Exemplul următor arată modul în care sunt calculate cele două forme canonice în cazul unei funcţii arbitrare.

Exemplul 1.4.

Se consideră funcţia de trei variabile defnită prin tabelul :

Tabelul 1.3.
Funcţia exemplului 1.4.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Suma de produse pentru această funcţie se calculează cu mintermii m_3, m_4, m_5, m_6 şi m_7 :

$$f = x_2' x_1 x_0 + x_2 x_1' x_0' + x_2 x_1' x_0 + x_2 x_1 x_0' + x_2 x_1 x_0 .$$

Produsul de sume se calculează prin maxtermii M_0, M_1 şi M_2 :

$$f = (x_2 + x_1 + x_0)(x_2 + x_1 + x_0')(x_2 + x_1' + x_0)$$

◊