Laborator 5

Calculul răspunsului în timp al sistemelor liniare

5.1 Tema

Însuşirea celor mai bune tehnici şi metode de calcul al răspunsului în timp al sistemelor liniare continue şi discrete la diverse tipuri de intrări, precum şi pentru calculul răspunsului permanent la intrări persistente, în particular al caracteristicilor de frecvenţă.

5.2 Răspunsul sistemelor discrete

Calculul răspunsului în timp al sistemelor cu timp continuu cu ajutorul echipamentelor numerice presupune, în mod obligatoriu, o discretizare a timpului şi calculul valorilor răspunsului în momentele de timp discret corespunzătoare. În acest scop se utilizează o procedură de discretizare adecvată care reduce problema la calculul răspunsului unui sistem discret. Din acest motiv vom începe cu prezentarea modalităţilor de calcul al răspunsului în timp al sistemelor discrete la intrări arbitrare.

5.2.1 Răspunsul sistemelor liniare discrete la intrări arbitrare

Algoritmii de calcul al răspunsului în timp al unui sistem liniar, discret $S = (A, B, C, D)$ definit de

$$(S) \qquad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x \\ \quad y(k) \ \ = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{5.1}$$

se obţin prin utilizarea ca atare a ecuaţiilor de stare datorită specificului recurent al acestora.

În consecinţă, dacă evoluţia, presupusă dată, a vectorului de intrare $u(k)$, pe intervalul de interes $k = 0 : k_f$ este stocată într-o matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times(k_f+1)}$ astfel încât $U(:, k) = u(k-1)$ (pentru că vom considera că indexările elementelor unui tablou încep cu 1, e.g. ca în MATLAB,), starea iniţială şi toate stările curente sunt memorate într-un vector unic $x \in \mathbb{R}^n$ iar ieşirile calculate se memorează în tabloul $Y \in \mathbb{R}^{l\times(k_f+1)}$ astfel încât $Y(:, k) = y(k-1)$, $k = 0 : k_f$, atunci putem utiliza următorul algoritm.

Algoritmul 5.1 (Se dau sistemul discret (A, B, C, D), starea iniţială $x(0) = x$, intervalul $0 : k_f$, tabloul valorilor intrărilor $U \in \mathbb{R}^{m\times(k_f+1)}$. Algoritmul calculează răspunsul $y(k)$, $k = 0 : k_f$ memorat în tabloul $Y \in \mathbb{R}^{l\times(k_f+1)}$.)

1. `Pentru` $k = 1 : k_f + 1$
   1. $Y(:, k) = C * x + D * U(:, k)$
   2. $x \leftarrow A * x + B * U(:, k)$

Pentru anumite cazuri particulare şi precizate de intrări, algoritmul de mai sus poate fi făcut mai eficient în sensul că intrările nu mai trebuie memorate şi unele operaţii pot fi evitate. Exemplificăm prin calculul raspunsului la:

a) condiţii iniţiale, i.e. al răspunsului liber, i.e. cu intrarea identic nula $u(k) = 0$, $k = 0 : k_f$

Algoritmul 5.2

1. `Pentru` $k = 1 : k_f + 1$
   1. $Y(:, k) = C * x$
   2. $x \leftarrow A * x$

b) calculul şirului pondere, i.e. al răspunsului la un impuls unitar discret (pentru sistemele cu o singură intrare) $u(0) = 1$, $u(k) = 0$, $k = 1 : k_f$, în condiţii iniţiale nule:

Algoritmul 5.3

1. $Y(:, 1) = D$
2. $x = B$
3. `Pentru` $k = 2 : k_f + 1$
   1. $Y(:, k) = C * x$
   2. $x \leftarrow A * x$

c) calculul şirului indicial, i.e. al răspunsului la o treaptă unitară discretă (pentru sistemele cu o singură intrare) $u(k) = 1$, $k = 0 : k_f$, în condiţii iniţiale nule:

Algoritmul 5.4

1. $Y(:, 1) = D$
2. $x = B$
3. `Pentru` $k = 2 : k_f + 1$
   1. $Y(:, k) = C * x + D$
   2. $x \leftarrow A * x + B$

O interpretare imediată a răspunsului este posibilă dacă acesta este prezentat într-o formă grafică, obţinută prin utilizarea unei proceduri adecvate, de exemplu funcţia `plot` din MATLAB.

Pentru utilizările ulterioare a procedurilor de mai sus vom apela la denumirile MATLAB ale funcţiilor corespondente de calclul al răspunsului unui sistem discret, după cum urmează:

`dlsim`	răspunsul la intrări arbitrare;
`dinitial`	răspunsul la condiţii iniţiale (intrare identic nulă);
`dimpulse`	răspunsul la impuls unitar;
`dstep`	răspunsul la treaptă unitară.

dar cu sintaxe de utilizare care vor diferi, posibil, de sintaxele funcţiiloor cu aceleaşi nume din MATLAB.

5.2.2 Răspunsul sistemelor liniare discrete la intrări liniar generate

O clasă interesantă de intrări este dată de intrările liniar generate, i.e. obţinute ca ieşiri ale unui sistem discret generator liber

$$(S_G) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} x_G(k+1) = A_G x_G(k), & \quad x_G(0) = x_G \\ u(k) \;\; = C_G x_G(k), & \end{array} \right. \tag{5.2}$$

vezi fig.5.1.

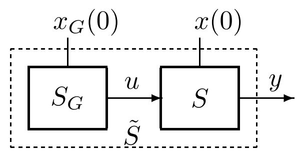

Figura 5.1: Interpretarea intrărilor liniar generate.

În acest caz, cea mai bună modalitate de calcul al răspunsului este de a considera sistemul agregat $\tilde{S} = (S_G, S)$ descris de matricele

$$(\tilde{S}) \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_G & 0 \\ BC_G & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = 0, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} DC_G & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = 0, \tag{5.3}$$

şi de a utiliza algoritmul 5.2 pentru calculul răspunsului liber la condiţiile iniţiale $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_G \\ x \end{bmatrix}$.

Aplicând transformata Z ecuaţiilor (5.2) rezultă $U(z) = C_G(zI - A_G)^{-1} x_G(0)$, i.e. orice intrare liniar generată are o transformată Z raţională strict proprie. Reciproc, pentru orice $U(z)$ raţională strict proprie există realizări $(A_G, x_G(0), C_G)$ care definesc sistemul generator (5.2). Prin urmare clasa intrărilor liniar generate se identifică cu clasa şirurilor cu transformată Z raţională proprie. În particular, e.g. treapta discretă este un semnal de intrare liniar generat. Mai multe detalii vor fi date la sistemele continue.

5.3 Răspunsul sistemelor continue

Problema determinării răspunsului unui sistem liniar continuu $S = (A, B, C, D)$ constă în calculul funcţiei de ieşire $y(t)$, definită prin

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{array} \right. \tag{5.4}$$

pe un interval fixat $[\,0,\, t_f]$, pe care funcţia de intrare $u(t)$ se consideră cunoscută.

Aşa cum s-a precizat deja, calculul răspunsului sistemelor cu timp continuu presupune, în mod obligatoriu, o discretizare a timpului şi calculul valorilor răspunsului în momentele de timp discret corespunzătoare, prin reducerea problemei la calculul răspunsului unui sistem discret obţinut cu ajutorul unei proceduri de discretizare adecvate tipului de intrare.

Pentru aceasta vom considera trei proceduri de discretizare care se referă la

a) intrări identic nule,

b) intrări ”etajate”, i.e. constante între momentele de discretizare,

c) întrări cu variaţie liniară între momentele de discretizare şi care acoperă necesităţile curente de analiză şsi simulare, ţinând seama că ultimul tip de intrare reprezintă, de cele mai multe ori, o aproximare acceptabilă pentru intrări cu variaţie arbitrară.

5.3.1 Calculul răspunsul liber al sistemelor liniare continue

Fie sistemul liniar continuu $S = (A, B, C, D)$ şi o intrare identic nulă $u(t) \equiv 0$ pe intervalul de interes $[\,0,\, t_f]$. Considerăm un pas de discretizare h, convenabil ales, şi fie $k_f = [\frac{t_f}{h}]$, i.e. divizăm intervalul $[0, t_f]$ într-un număr k_f de subintervale egale. Dorim calculul valorilor $y(kh)$, $k = 0 : k_f$, ale răspunsului sistemului care, în condiţile date, are aspectul

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = Ax(t), & x(0) = x \\ y(t) = Cx(t). & \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene (5.4) pe intervalul $[t_0, t]$ este

$$x(t - t_0) = e^{(t-t_0)A}x(t_0). \tag{5.6}$$

Prin urmare, scriind relaţia (5.6) pentru $t_0 = kh$ şi $t = (k + 1)h$, obţinem evident sistemul discret liber corespondent

$$\left\{ \begin{array}{ll} x((k+1)h) = e^{hA}x(kh), & x(0) = x, \\ y(kh) = Cx(kh). & \end{array} \right. \tag{5.7}$$

În consecinţă, totul se reduce la calculul exponenţialei matriceale $A_d = e^{hA}$, utilizând, de exemplu, aproximaţia Padé şi calculul răspunsului liber al sistemului discret(izat) $S_d = (A_d, ?, C_d = C, ?)$ (matricele B şi D nu sunt necesare în acest caz). De fapt, sistemul (5.7) constituie reprezentarea discretizată exactă – cu element de extrapolare de ordinul 0 – a sistemului continuu dat.

În concluzie, calculul răspunsului liber al sistemelor liniare se poate face utilizând următoarea procedură.

> **Algoritmul 5.5** (Se dau sistemul liber (A, C), starea iniţială $x(0) = x$, intervalul de simulare $[\,0,\, t_f]$ precum şi pasul de discretizare h. Se calculează răspunsul liber $y(t)$ în momentele $t_k = kh,\ k = 0 : k_f$ unde $k_f = [\frac{t_f}{h}]$.
>
> 1. $k_f = \mathtt{fix}(\dfrac{t_f}{h})$
> 2. $A_d = \mathtt{expm}(hA)$.
> 3. $Y = \mathtt{dinitial}(A_d, C, x, k_f)$.

Vom utiliza acest algoritm cu sintaxa $Y = \mathtt{initial}(A, C, x, h, t_f)$ (care diferă, atenţie, de sintaxa funcţiei cu acelaşi nume din MATLAB).

5.3.2 Calculul răspunsului la intrări liniar generate

La fel ca şi în cazul discret, o clasă interesantă de intrări este dată de intrările liniar generate, i.e. obţinute ca ieşiri ale unui sistem continuu generator liber

$$(S_G) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t), & x_G(0) = x_G \\ u(t) \;\; = C_G x_G(t), & \end{array} \right. , \tag{5.8}$$

vezi fig.5.1.

Şi în acest caz, cea mai bună modalitate de calcul al răspunsului este de a considera sistemul agregat $\tilde{S} = (S_G, S)$ descris, la fel ca în cazul discret, de matricele

$$(\tilde{S}) \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_G & 0 \\ BC_G & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = 0, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} DC_G & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = 0, \tag{5.9}$$

şi de a utiliza algoritmul 5.5 pentru calculul răspunsului liber la condiţiile iniţiale $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_G \\ x \end{bmatrix}$, i.e. calculul răspunsului sistemului (S) la intrarea liniar generată $u(t)$ se reduce la calculul răspunsului liber al sistemului $(\tilde{S})$, prin metoda (exactă) expusă în paragraful anterior.

Aplicând transformata Laplace ecuaţiilor (5.7) rezultă $U(s) = C_G(sI - A_G)^{-1}x_G(0)$, i.e. orice intrare liniar generată are o transformată Laplace raţională strict proprie. Reciproc, pentru orice $U(s)$ raţională strict proprie există realizări $(A_G, x_G(0), C_G)$ care definesc sistemul generator (5.7). Prin urmare clasa intrărilor analogice liniar generate se identifică cu clasa funcţiilor original cu transformată Laplace raţională strict proprie.

Reţeta generală de construcţie a sistemului generator (S_G) constă în realizarea transformatei $U(s)$, interpretată ca funcţie de transfer a unui sistem SIMO (i.e. cu o singură intrare), sub forma unui triplet (A_G, B_G, C_G), unde vectorul $B_G = x_G$ este stare iniţială a lui (S_G).

În concluzie, calculul răspunsului sistemelor liniare la intrări liniar generate se poate face utilizând următoarea procedură.

Algoritmul 5.6 (Se dau: sistemul continuu (A, B, C, D), starea iniţială $x(0) = x$, intervalul de simulare $[0,\ t_f]$, pasul de discretizare h, precum şi transformata $U(s)$ sub forma matricei de transfer a unui sistem SIMO. Se calculează răspunsul $y(t)$ în momentele $t_k = kh$, $k = 0 : k_f$, $k_f = [\frac{t_f}{h}]$.

1. Se realizează $U(s)$ sub forma (A_G, B_G, C_G).
2. Se construiesc matricele
$$A \leftarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_G & 0 \\ BC_G & A \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \tilde{x} = \begin{bmatrix} B_G \\ x \end{bmatrix}, \quad C \leftarrow \tilde{C} = \begin{bmatrix} DC_G & C \end{bmatrix}.$$
3. $Y = \texttt{initial}(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{x}, h, t_f)$.

Dintre cazurile particulare importante menţionăm intrările polinomiale precum şi intrările armonice. Dintre intrările polinomiale ne vom mărgini la cele de tip treaptă.

A. Răspunsul la intrare treaptă

O intrare treaptă vectorială generală $u(t) = u_1 \mathbf{1}(t)$ de amplitudine $u_1 \in \mathcal{R}^m$ dată este definită de

$$u(t) = u_1, \quad t \geq 0. \tag{5.10}$$

Pentru simplitate, la laborator vom considera numai sisteme SIMO (i.e. $m = 1$). În acest caz, fără a reduce generalitatea, putem să luăm în consideraţie numai treapta *unitară* i.e. cu $u_1 = 1$, iar generatorul de formare a intrării este

$$A_G = 0, \quad B_G = 1, \quad C_G = 1, \tag{5.11}$$

iar matricele sistemului agregat $\tilde{S}$ sunt

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} D & C \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

B. Răspunsul la intrări armonice

Intrările armonice sunt de forma

$$u(t) = \gamma_1 \cos \omega t + \gamma_2 \sin \omega t\,, \quad t \geq 0\,, \tag{5.13}$$

unde pulsaţia ω este fixată iar coeficienţii $\gamma_1,\, \gamma_2 \in \mathcal{R}^m$ sunt vectori daţi. Avem

$$U(s) = \frac{\gamma_1 s + \gamma_2 \omega}{s^2 + \omega^2}\,, \tag{5.14}$$

deci o realizare a lui (S_G) este

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \omega\gamma_2 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

5.3.3 Răspunsul la intrări etajate

Domeniul de aplicaţie al metodei bazate pe utilizarea sistemului generator, expusă în paragraful anterior, poate fi sensibil lărgit, considerând că funcţia de intrare $u(t)$ este *liniar generată pe porţiuni*, e.g. pe fiecare subinterval $[\,kh,\,(k+1)h\,)$, $k = 0 : k_f$ al unei diviziuni uniforme cu pasul h al intervalului $[\,0,\, t_f\,]$.

În cel mai simplu caz (care în acelaşi timp este şi cel mai frecvent întâlnit în aplicaţii) funcţia de intrare $u(t)$ este constantă pe porţiuni (sau *etajată*), i.e. avem

$$u(t) = u_k, \quad t \in [\,kh,\,(k+1)h\,) \tag{5.16}$$

unde amplitudinile $u_k \in \mathcal{R}^m$ sunt vectori daţi, în general variabili de la pas la pas (v. fig. 5.2).

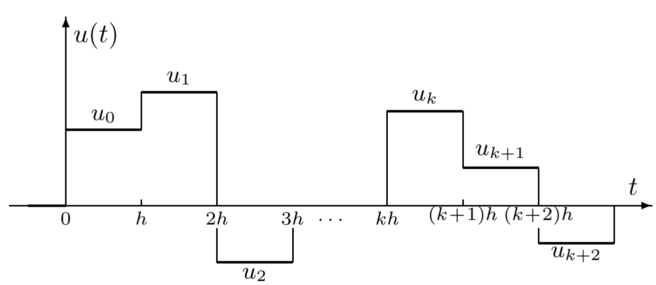

Figura 5.2: Funcţie de intrare etajată.

Utilizând expresia soluţiei sistemului pe intervalul $t \in [kh, (k+1)h)$ scrisă sub forma

$$x(t) = e^{(t-kh)A}x(kh) + \int_{kh}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau,$$

în care punem $t = (k+1)h$, în virtutea lui (5.16) obţinem uşor

$$\begin{aligned} x((k+1)h) &= A_d x(kh) + B_d u_k, \\ y(kh) &= \ C\,x(kh) + D\,u_k\,, \end{aligned}\,, \tag{5.17}$$

unde

$$A_d = e^{hA}, \quad B_d = \int_0^h e^{\eta A}\, d\eta\, B. \tag{5.18}$$

Prin definiţie, sistemul liniar discret $S_d = (A_d, B_d, C, D)$ constituie *reprezentarea discretizată* (pe scurt discretizatul) cu pasul h al sistemului liniar $S = (A, B, C, D)$. Matricele A_d şi B_d, necesare pentru construcţia lui S_d, se determină calculând exponenţiala matriceală $\tilde{A}_d = e^{h\tilde{A}}$, unde matricea $\tilde{A}$ are expresia $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$. Procedând în acest mod, se obţine

$$e^{h\tilde{A}} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Calculul matricelor (A_d, B_d) pe această bază se poate face în MATLAB cu ajutorul funcţiei `c2d` ("continuous t(w)o discrete") având sintaxa

$$[A_d, B_d] = \mathtt{c2d}(A, B, h).$$

În concluzie, problema calcului răspunsului unui sistem continuu la o intrare etajată se reduce la calculul răspunsului sistemului discretizat $S_d = (A_d, B_d, C, D)$ la o intrare dată de valorile $u_k = u(kh)$ pe care le considerăm aranjate într-o matrice U de forma $m \times k_f$, astfel încât $U(:, k) = u_{k-1}$, $k = 1 : k_f$. Avem următoarea procedură

Algoritmul 5.7 (Se dau sistemul (A, B, C, D), starea iniţială $x(0) = x$, intervalul de simulare $[\,0,\ t_f\,]$, pasul de discretizare h, precum şi tabloul U ce conţine palierele funcţiei de intrare etajate $u(t)$. Se calculează răspunsul $y(t)$ în momentele $t_k = kh$.

1. $[A_d, B_d] = \mathtt{c2d}(A, B, h)$
2. $k_f = [\frac{t_f}{h}]$.
3. $Y = \mathtt{dlsim}(A_d, B_d, C, D, U)$.

5.3.4 Răspunsul la intrări arbitrare

Dacă funcţia de intrare nu este liniar generată atunci procedura curentă este de a o aproxima pe porţiuni (e.g. între două momente consecutive de discretizare) cu funcţii liniar generate. Cazul cel mai frecvent utilizat este cel al aproximării printr-o variaţie liniară, i.e.

$$u(t) = u(kh) + \frac{u((k+1)h) - u(kh)}{h}(t - kh), \quad \forall t \in [\,kh,\ (k+1)h\,). \tag{5.20}$$

Vom reduce calculul răspunsului sistemului continuu $S = (A, B, C, D)$ la o astfel de intrare la callculul unui sistem convenabil extins la o intrare etajată în vederea utilizării algoritmului din paragraful precedent. Într-adevăr, nu este greu de văzut că sistemul $S_G = (A_G, B_G, C_G = (0, I_m, I_m))$ definit de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = v(t), \quad x_G(0) = u(0) \\ u(t) = x_G(t), \end{cases} \tag{5.21}$$

(i.e. format din m integratoare pure) şi având ca semnal de intrare funcţia etajată

$$v(t) = \frac{u((k+1)h) - u(kh)}{h}, \quad \forall\, t \in [kh, (k+1)h) \tag{5.22}$$

furnizează la ieşire funcţia liniară pe porţiuni (5.20). În consecinţă răspunsul dorit se obţine prin calculul răspunsului sistemului obţinut prin legarea în serie a sistemelor S_G şi S, i.e. a sistemului $\tilde{S} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ definit de

$$(\tilde{S}) \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0, \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} D & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = 0, \tag{5.23}$$

la intrarea etajată (5.22) cu ajutorul algoritmului 5.7 din paragraful precedent. Utilizând pentru acesta din urmă sintaxa

$$Y = etajate(A, B, C, D, U, x, h, t_f),$$

unde U este tabloul cu valorile palierelor (i.e. valorile intrărilor din momentele de discretizare) obţinem următorul algoritm.

Algoritmul 5.8 (Se dau sistemul (A, B, C, D), starea iniţială $x(0) = x$, intervalul de simulare $[\,0,\, t_f\,]$, pasul de discretizare h, precum şi tabloul U ce conţine valorile $U(:, k+1) = u(kh)$, $k = 0 : k_f$ alle funcţiei de intrare $u(t)$. Se calculează răspunsul $y(t)$ în momentele $t_k = kh$.

1. $k_f = \texttt{length}(U)$
2. $V = (U(:, 2 : k_f) - U(:, 1 : k_f - 1))/h$
3. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0, \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} D & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = 0,$
4. $t_f = k_f h$
5. $x = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$
6. $Y = \texttt{etajate}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, V, x, h, t_f)$.

5.4 Răspunsul staţionar

Prin răspuns staţionar vom înţelege componenta persistentă a răspunsului unui sistem liniar la o intrare persistentă. Presupunem acum, în plus, că matricea A a unui sistem continuu este stabilă, adică $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < 0$, iar funcţia de intrare $u(t)$, generată de un sistem generator liber $S_G = (A_G, C_G)$, este *persistentă*, i.e. nici o componentă a stării nu tinde către zero, ceea ce este echivalent cu condiţia $\mathrm{Re}\,\lambda(A_G) \geq 0$.

Procedura generală de separarea componentelor *tranzitorie* şi *,,staţionară”* (*asimptotică* sau *permanentă*) ale răspunsului $y(t)$ constă în a scrie

$$x(t) = \xi(t) + V x_G(t), \tag{5.24}$$

unde $\xi(t)$ este componenta *tranzitorie* a traiectoriei de stare, adică $\xi(t) \to 0$ când $t \to \infty$, iar matricea constantă $V \in \mathcal{R}^{n \times n_G}$ trebuie determinată. Se arată uşor [1] că matricea V trebuie să satisfacă ecuaţia Sylvester

$$V A_G = AV + BC_G \tag{5.25}$$

şi spunem că $V x_G(t)$ este componenta *”staţionară”* (*asimptotică* sau *permanentă*) a traiectoriei de stare $x(t)$.

În continuare obţinem

$$y(t) = C(\xi(t) + V x_G(t)) + DC_G x_F(t)\,, \tag{5.26}$$

deci avem

$$y(t) = \eta(t) + Wx_G(t)\,, \tag{5.27}$$

unde

$$\eta(t) = C\xi(t) \tag{5.28}$$

este (prin definiţie) componenta *tranzitorie* a răspunsului, iar matricea W este definită prin

$$W = CV + DC_G\,. \tag{5.29}$$

Având în vedere că, în esenţă, $x_G(t) = e^{tA_G}x_G(0)$ este cunoscut (sau poate fi calculat cu procedurile de calcul al răspunsului liber, prezentate mai sus), componenta *staţionară* $Wx_G(t)$ a răspunsului este complet determinată prin (5.29) în funcţie de soluţia V a ecuaţiei matriceale algebrice liniare (5.25).

În concluzie, calculul răspunsului staţionar al sistemelor liniare la intrări persistente liniar - generate se poate face utilizând următoarea procedură.

Algoritmul 5.9 (Se dau sistemul (A, B, C, D) precum şi transformata $U(s)$ sub forma matricei de transfer a unui sistem SIMO. Se calculează răspunsul staţionar $Wx_G(t)$ pe un interval $[\,0,\, t_f\,]$ convenabil precizat).

1. Se realizează $U(s)$ sub forma (A_G, B_G, C_G).
2. Se calculează matricea V rezolvând ecuaţia matriceală Sylvester (5.25).
3. Se calculează matricea W în acord cu (5.29).
4. $Y = \texttt{initial}(A_G, W, B_G, h, t_f)$.

Pentru exemplificare, vom considera cazul particular important al intrărilor armonice.

Răspunsul staţionar la intrări armonice

Intrările armonice au un filtru generator definit prin

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \omega\gamma_2 \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Partiţionând V pe coloane sub forma $V = [v_1 \;\; \omega v_2]$ ecuaţia (5.25) se scrie

$$[v_1 \;\; \omega v_2] \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A[v_1 \;\; \omega v_2] + B[\gamma_1 \;\; \omega\gamma_2] \tag{5.31}$$

Obţinem

$$\left\{ \begin{array}{rl} \omega v_2 & = Av_1 + B\gamma_1 \\ -\omega v_1 & = Av_2 + B\gamma_2 \end{array} \right. \tag{5.32}$$

deci vectorii v_i, $i = 1:2$ rezultă rezolvând sistemul liniar

$$\begin{bmatrix} -A & \omega I \\ -\omega I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\gamma_1 \\ B\gamma_2 \end{bmatrix}. \tag{5.33}$$

În sfârşit, din (5.29), unde $W = [w_1 \;\; \omega w_2]$, rezultă uşor

$$w_i = Cv_i + D\gamma_i, \quad i = 1:2. \tag{5.34}$$

5.5 Calculul caracteristicilor de frecvenţă

Deseori se cere calculul răspunsului armonic permanent pentru diverse valori ale frecvenţei ω renunţând la ipoteza A stabilă în favoarea condiţiei mai slabe de absenţă a rezonanţelor pe frecvenţele ω prescrise $i\omega \notin \lambda(A)$. Aceasta înseamnă calculul caracteristicilor de frecvenţă ale sistemului considerat, ceea ce, tradiţional, se face recurgând la "complexificarea" acestuia.

Concret, aceasta înseamnă că în locul funcţiei de intrare reale (5.13), i.e. $u(t) = \gamma_1 \cos \omega t + \gamma_2 \sin \omega t$ se consideră intrarea complexă

$$u_c(t) = \gamma_c e^{i\omega t}, \tag{5.35}$$

unde $\gamma_c \in \mathcal{C}^m$ este un vector dat cu componente complexe. Avem

$$U_c(s) = \frac{\gamma_c}{s - i\omega} \tag{5.36}$$

deci o realizare (complexă) a lui (S_G) este

$$\begin{array}{l} A_G = i\omega, \quad B_G = 1, \\ C_G = \gamma_c. \end{array} \tag{5.37}$$

Dacă scriem acum (5.25) sub forma

$$i\omega V = AV + B\gamma_c \tag{5.38}$$

obţinem imediat

$$V = (i\omega I - A)^{-1} B\gamma_c, \tag{5.39}$$

iar din (5.29) rezultă

$$W = CV + D\gamma_c = [C(i\omega I - A)^{-1}B + D]\gamma_c \stackrel{\text{def}}{=} H(i\omega)\gamma_c \tag{5.40}$$

unde

$$H(i\omega) = C(i\omega I - A)^{-1}B + D\,, \quad \omega \in \mathcal{R} \tag{5.41}$$

reprezintă caracteristica (complexă) de frecvenţă a sistemului (S).

Problema calculului lui $H(i\omega)$ pentru diverse valori $\omega_k \in \mathcal{R}\,,\ k = 1 : N$ ale lui ω presupune deci

1. `Pentru` $k = 1 : N$
    1. Se rezolvă sistemele matriceale liniare $(i\omega_k I - A)V_k = B$.
    2. $T(i\omega_k) = CV_k + D$.

Pentru a evita triangularizarea matricelor $(i\omega_k I - A)$ pentru fiecare k în parte, pentru implementarea eficientă a schemei de mai sus se recomandă determinarea unei transformări prealabile M astfel încât

$$\tilde{A} = MAM^{-1}$$

să fie, de exemplu, superior Hessenberg. În acest scop, se utilizează eliminarea gaussiană cu pivotare parţială în aritmetică complexă. Aplicând transformarea M matricelor B şi C, adică $\tilde{B} = MB,\ \tilde{C} = CM^{-1}$ şi definind $\tilde{V} = MV$, problema calculului lui $H(i\omega_k)$ se reduce la

1. `Pentru` $k = 1 : N$

1. Se rezolvă sistemele matriceale liniare superior Hessenberg $(i\omega_k I - \tilde{A})\tilde{V}_k = \tilde{B}$.
2. $H(i\omega_k) = \tilde{C}\tilde{V}_k + D$.

Procedura de calcul poate fi rezumată astfel.

Algoritmul 5.10 (Se dau A, B, C, D şi $\omega_k \in \mathcal{R}$, $k = 1 : N$, de regulă în scară logaritmică. Se calculează $H(i\omega_k)$, $k = 1 : N$).

1. Se determină M astfel încât $A \leftarrow \tilde{A} = MAM^{-1}$ este superior Hessenberg.
2. $B \leftarrow MB$
3. $C \leftarrow CM^{-1}$
4. `Pentru` $k = 1 : N$
   1. Se formează matricea $A_0 = i\omega_k I - A$.
   2. Se face triangularizarea $A_0 \leftarrow R = NA_0$.
   3. $B_0 = NB$
   4. Se rezolvă $A_0\tilde{V} = B_0$ în raport cu $\tilde{V}$.
   5. $T(i\omega_k) = C\tilde{V} + D$

Comentarii. Matricele A_0 şi B_0 sunt tablouri de lucru. La pasul 4.2. se efectuează eliminarea gaussiană cu pivotare parţială în aritmetică complexă astfel încât R rezultă superior triunghiulară. La pasul 4.3 transformarea N se aplică lui B. ◇

Programe MATLAB disponibile

Funcţile MATLAB disponibile pentru calculul răspunsului sistemelor liniare continue şi discrete au fost menţionate pe parcursul prezentării procedurilor de calcul.

Pentru calculul şi reprezentarea grafică a caracteristicilor de frecvenţă ale unui sistem liniar sunt disponibile funcţiile **nyquist**, **bode** şi **nichols**. În cazul discret, în acelaşi scop se utilizează funcţiile **dnyquist**, **dbode** şi **dnichols**. Pentru funcţii de transfer sunt disponibile versiunile simple **freqs** şi respectiv **freqz**.

5.6 Sarcini de lucru

A. În laborator

1. Se vor scrie programele MATLAB pentru implementarea algoritmilor de calcul al raspunsului unui sistem discret dat prin ecuaţii de stare la o intrare arbitrară precum şi la intrări particulare date şi condiţii iniţiale date. Programele vor fi testate pentru sisteme de ordinul 2 şi 4 convenabil definite. Se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţiile MATLAB `dlsim`, `dinitial`, `dimpulse` şi `dstep`.

2. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al raspunsului unui sistem discret SISO dat prin funcţia de transfer la o intrare arbitrară dată şi condiţii iniţiale nule. Programul va fi testat pentru sisteme de ordinul 2, şi 4 pentru urmăatoarele tipuri de intrare: identic nulă, impuls şi treaptă. Se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţiile MATLAB `dinitial`, `dimpulse` şi `dstep`.

3. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al raspunsului unui sistem continuu dat prin ecuaţii de stare la o intrare etajată şi condiţii iniţiale date. Programul va fi folosit pentru foloosit şi testat pentru calculul răspunsului unor sisteme de ordinul 2, şi 4 pentru urmăatoarele tipuri de intrare: identic nulă şi treaptă. Se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţiile MATLAB `initial` şi `step`.

4. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al răspunsului unui sistem continuu SISO dat prin ecuaţiile de stare la o intrare arbitrară dată şi condiţii iniţiale date. Programul va fi testat pentru sisteme de ordinul 2, 3 şi 4. Se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţia MATLAB `lsim`.

5. Se vor studia sursele funcţiilor MATLAB `dinitial`, `dimpulse` şi `dstep` precum şi ale funcţiilor `initial`, `impulse` şi `dstep`şi se vor identifica metodele folosite.

B. Acasă

1. Se vor scrie şi testa programele MATLAB pentru implementarea algoritmilor de calcul al raspunsului permanent al sistemelor liniare continue la intrări armonice.

2. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al caracteristicilor de frecvenţă a unui sistem SISO continuu şi se vor prevedea reprezentarea grafică a hodografului (diagrama Nyquist), a modulului şi fazei (diagrame Bode)

3. **Exerciţii şi teme de casă.**

   E 5.1 Scrieţi algoritmul de calcul al răspunsului unui sistem liniar discret S descris printr-o relaţie intrare - ieşire de forma

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{d} b_i u(k-i), \quad k = 0 : N-1 \tag{5.42}$$

   precizând cu grijă datele iniţiale necesare.

   E 5.2 Elaboraţi proceduri eficiente de calcul pentru caracteristicile de frecvenţă $H(e^{i\theta})$, $\theta \in [\,0, 2\pi\,)$, unde $H(z)$ este funcţia de transfer a unui sistem discret SISO.

   E 5.3 Elaboraţi algoritmul de calcul al răspunsului în timp al al unui sistem liniar SISO pentru un semnal de intrare periodic având formă de dinţi de fierăstrău cu perioada ph, $p \geq 1$ şi panta u_2 i.e. $u(t) = u_2(t - kph)$, $t \in [\,kph,\ (k+1)ph\,)$, $k \in \mathcal{N}$.

   E 5.4 Scrieţi algoritmul de calcul al răspunsului $y(kh)$, $k = 1 : k_f$, al unui sistem liniar discret dacă în locul stării iniţiale $x(0) = x_0$ se dă starea finală $x(t_f) = \xi$.

Bibliografie

[1] **Jora B., Popeea C., Barbulea S.** *Metode de Calcul Numeric în Automaticǎa*, Ed. Enciclopedică, Bucureşti 1996.