Seminar 7
Valori şi vectori proprii
Descompunere în valori singulare

Responsabil:
Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)
Cosmin-Ștefan Stoica (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator studentul va fi capabil să:
- determine valorile și vectorii proprii ale unei matrice.
- aplice proprietățile valorilor și vectorilor proprii în rezolvarea diferitelor probleme .
- determine valorile și vectorii singulari ale unei matrice.
- aplice teorema descompunerii valorilor singulare.

Breviar teoretic

7.1 Valori şi vectori proprii

Def1: Fie $A \in C^{n \times n}$. Un număr se numeşte ***valoare proprie*** a matricei A dacă există un vector nenul , $x \in C^n$ numit ***vector propriu*** *asociat* **valorii proprii** $\lambda \in C$, astfel încât $Ax = \lambda x$ **(ecuaţia caracteristică)**.

Obs:

1) $Ax = \lambda x$ -acest sistem liniar şi omogen admite soluţii nenule dacă şi numai dacă $\mathbf{p}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}) = 0$.

2) ***Polinomul monic*** $\mathbf{p(\lambda)}$ de gradul n se numeşte ***polinom caracteristic*** al matricei A. Valorile proprii ale unei matrice sunt zerourile polinomului caracteristic.

3) Numărul real $\rho(\mathbf{A}) = \max\limits_{\lambda_i \in \lambda(\mathbf{A})} \left(|\lambda_i| \right)$ se numeşte *raza spectrală* a matricei **A**.

Def2: Se numeşte ***spectrul*** (de valori proprii al) matricei **A** mulțimea $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Proprietăți ale valorilor proprii

P1) Valorile proprii ale unei matrice satisfac relaţiile $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} A(i,i) = \operatorname{tr}(A) \\ \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A) \end{cases}$

P2) Dacă există $\mathbf{T} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ astfel încât $\mathbf{B} = \mathbf{TAT}^{-1}$. Transformarea de asemănare conservă spectrul de valori proprii al matricei.

Obs: Două matrice A și B sunt *asemenea* dacă există o matrice nesingulară $\mathbf{T} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ astfel încât $\mathbf{B} = \mathbf{TAT}^{-1}$.

Pentru orice matrice $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ (în particular $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$) există o matrice unitară $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ astfel încât matricea unitar asemenea cu $\mathbf{A}$: $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{Q}}^H\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ este superior triunghiulară.

În cazul real, pentru orice matrice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ există o matrice ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ astfel încât matricea ortogonal asemenea cu $\mathbf{A}$: $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ are o structură **cvasi-superior triunghiulară**

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ 0 & S_{22} & \dots & S_{2q} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & S_{qq} \end{bmatrix}.$$

unde blocurile diagonale $\mathbf{S}_{ii},\ \mathbf{i} = 1 : \mathbf{q}$ sunt matrice 1×1 sau 2×2, cele de dimensiune 2×2 având valorile proprii complexe.

7.2 Descompunere în valori singulare

Este o metodă sigură de calcul a *rangului* unei matrice (numărul maxim de coloane liniar independente).

Teorema *descompunerii valorilor singulare* stabileşte că oricare ar fi matricea $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ există matricele ortogonale $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ şi întregul $\mathbf{r} \geq 0$ astfel încât

$$U^T AV = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

unde $\Sigma_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \mathbf{R}^{r\times r}$ cu $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

În cazul complex matricele $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ sunt unitare iar $\mathbf{U}^H\mathbf{AV} = \Sigma$- ***formă canonică pseudodiagonală.***

Valorile $\sigma_i > 0,\ i=1:r$, şi $\sigma_i = 0,\ i=r+1:n$ poartă numele de ***valori singulare*** $\mathbf{rang(A)=r}$. Coloanele $\mathbf{v}_j = \mathbf{Ve}_j \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{j} = 1 : \mathbf{n}$, ale matricei $\mathbf{V}$ se numesc ***vectori singulari*** (la dreapta) ai lui $\mathbf{A}$ asociaţi valorilor singulare σ_j, $\mathbf{j} = 1 : \mathbf{n}$, iar coloanele $\mathbf{u}_j = \mathbf{Ue}_j \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{j} = 1 : \mathbf{n}$ ale matricei $\mathbf{U}$ se numesc ***vectori singulari*** la stânga ai lui $\mathbf{A}$ asociaţi aceloraşi valori singulare. $\mathbf{A=U\Sigma V^T}$ poartă numele de ***descompunerea valorilor singulare*** ale matricei $\mathbf{A}$.

$$A = \begin{bmatrix} \underset{1:r}{U_1} & \underset{r+1:n}{U_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ \underset{1:r}{0} & \underset{r+1:n}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \\ v_r^T \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

$\mathbf{A.v_j = \sigma_j u_j}$ cu $\mathbf{v_j = Ve_j}$ vector singular la dreapta
$\mathbf{u_j^T \cdot A = \sigma_j v_j^T}$ cu $\mathbf{u_j = Ue_j}$ vector singular la stânga

$$\mathbf{B = A^T A = \left(U\Sigma V^T\right)^T \left(U\Sigma V^T\right) = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T = V \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V^T}$$

$\mathbf{B \cdot v_j = \sigma_j^2 \cdot v_j}$ adică:

- valorile singulare sunt rădăcinile pătrate pozitive ale valorilor proprii ale matricei $\mathbf{A^T A}$
  $\mathbf{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1 : r.}$
- vectorii singulari la dreapta $\mathbf{v_j = Ve_j}$ sunt vectori proprii ai matricei $\mathbf{B = A^T . A}$.
- vectorii singulari la stânga $\mathbf{u_j = Ue_j}$ sunt vectori proprii ai matricei $\mathbf{C = A . A^T}$.

O metodă simplă, dar puţin stabilă de calcul a valorilor singulare şi a vectorilor singulari constă în formarea matrcelor **B** şi **C** cărora li se calculează valorile proprii şi vectorii proprii.

Calculul sigur şi stabil al valorilor singulare se face cu algoritmul DVS datorat lui Kahan.

7.3 Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze pentru $A \in \Re^{n \times n}$:

a) $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n} \right\}$**;**

b) $\sigma(A - \mu I_n) = \{\lambda_i - \mu\}, \forall \mu \in \Re;$

c) $\sigma(A^k) = \{\lambda_i^k\}, \forall k \in N;$

d) $\sigma((A - \mu I_n)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \mu} \right\}, \forall \mu \in \Re;$

Rezolvare

b) $\sigma(A - \mu I_n) = \{\lambda_i - \mu\}, \forall \mu \in \Re;$

$Av = \lambda v / - \mu v$

$(A - \mu I_n)v = (\lambda v - \mu v) => \sigma(A - \mu I_n) = \{\lambda_i - \mu\}, \forall \mu \in \Re;$

c) $\sigma(A^k) = \{\lambda_i^k\}, \forall k \in N;$

$Av = \lambda v$

$A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$

$A^3 v = \lambda A^2 v = \lambda^3 v$

Fie P(k): $A^k v = \lambda^k v, \forall k \geq 1;$

Presupunem că P(k) (A) și demonstrăm că P(k+1)(A);

P(k+1): $A^{k+1} v = \lambda^{k+1} v;$

$A * / A^k v = \lambda^k v \Rightarrow A^{k+1} v = \lambda^k A v = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v \Rightarrow$ P(k)(A);=> $\sigma(A^k) = \{\lambda_i^k\}, \forall k \in N;$

d) $\sigma((A - \mu I_n)^{-1}) = \left\{ \dfrac{1}{\lambda_i - \mu} \right\}, \forall \mu \in \Re;$

$\det(A - \mu I_n) \neq 0 \Rightarrow \exists (A - \mu I_n)^{-1}$

$(A - \mu I_n)^{-1} / (A - \mu I_n) v = (\lambda - \mu) v \Rightarrow v = (\lambda - \mu)(A - \mu I_n)^{-1} v \Rightarrow$

$v(\lambda - \mu)^{-1} = (\lambda - \mu)(A - \mu I_n)^{-1} v \Rightarrow \sigma((A - \mu I_n)^{-1}) = \left\{ \dfrac{1}{\lambda_i - \mu} \right\}, \forall \mu \in \Re;$

2. a) Pentru matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \mathbf{c}^2 + \mathbf{s}^2 = 1,$$

calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai acesteia.
b) Repetaţi aceleaşi calcule pentru matricea de rotaţie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{s} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \mathbf{s} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{c} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \ \mathbf{c}^2 + \mathbf{s}^2 = 1.$$

Soluţie. Valorile proprii sunt: $\left| \mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_2 \right| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{c} - \lambda & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\mathbf{c} - \lambda)^2 + \mathbf{s}^2 = \lambda^2 - 2\mathbf{c}\lambda + \mathbf{c}^2 + \mathbf{s}^2 = \lambda^2 - 2\mathbf{c}\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \mathbf{c} \pm \sqrt{\mathbf{c}^2 - 1} = \mathbf{c} \pm \mathbf{i} \cdot \mathbf{s}.$

Vectorii proprii se obţin scriind: $A \cdot x_{1,2} = \lambda_{1,2} \cdot x_{1,2}$

$\begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta \\ \gamma + \mathbf{i}\delta \end{bmatrix} = (\mathbf{c} + \mathbf{is}) \cdot \begin{bmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta \\ \gamma + \mathbf{i}\delta \end{bmatrix},$

$\alpha\mathbf{c} + \mathbf{i}\beta\mathbf{c} - \mathbf{s}\gamma - \mathbf{is}\delta = (\mathbf{c} + \mathbf{is}) \cdot (\alpha + \mathbf{i}\beta),$

$\alpha\mathbf{c} - \mathbf{s}\gamma + \mathbf{i} \cdot (\beta\mathbf{c} - \mathbf{s}\delta) = \alpha\mathbf{c} - \beta\mathbf{s} + \mathbf{i} \cdot (\alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{c}),$

care conduce la:

$\alpha\mathbf{c} - \mathbf{s}\gamma = \alpha\mathbf{c} - \beta\mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma$

$\beta\mathbf{c} - \delta\mathbf{s} = \alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \delta = -\alpha$

Aşadar:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta \\ \beta - \mathbf{i}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta \\ -\mathbf{i}\cdot(\alpha + \mathbf{i}\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix} \cdot (\alpha + \mathbf{i}\beta)$$

Analog:

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \alpha - \mathbf{i}\beta \\ \beta + \mathbf{i}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \mathbf{i}\beta \\ \mathbf{i}\cdot(\alpha - \mathbf{i}\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \cdot (\alpha - \mathbf{i}\beta),$$

cu α şi β arbitrari (eventual se normează).

b) $$\begin{bmatrix} \mathbf{c} & & & & -\mathbf{s} \\ & \mathbf{1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ \mathbf{s} & & & & \mathbf{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \cdots \\ \mathbf{x_{n-1}} \\ \mathbf{x_n} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \cdots \\ \mathbf{x_{n-1}} \\ \mathbf{x_n} \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{c}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{s}\cdot\mathbf{x_n} = \lambda\cdot\mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} = \lambda\cdot\mathbf{x_2} \\ \cdots \\ \mathbf{x_{n-1}} = \lambda\cdot\mathbf{x_{n-1}} \\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x_n} = \lambda\cdot\mathbf{x_n} \end{cases}$$

Sunt posibile două situaţii:

a) pentru $\lambda = 1$, ecuaţiile $2 : n-1$ sunt satisfăcute. Sistemul omogen format din ecuaţiile 1 şi n ne dă: $x_1 = x_n = 0$.

Prin urmare avem $n-2$ valori proprii $\lambda = 1$ şi vectorii proprii corespunzători:

$$\mathbf{x_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c_2} \\ \cdots \\ \mathbf{c_{n-1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

b) pentru $\lambda = c + i\cdot s$, ecuaţiile 1 şi n sunt satisfăcute. Ecuaţiile 2 : n-1 nu pot fi satisfăcute decât pentru $x_i = 0$.

Aşadar avem:

$$\lambda_1 = \mathbf{c} + \mathbf{i}\cdot\mathbf{s}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta \\ \mathbf{0} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{i}\cdot(\alpha + \mathbf{i}\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix} \cdot \varpi$$

$$\lambda_n = \mathbf{c} - \mathbf{i}\cdot\mathbf{s}, \qquad \mathbf{x_n} = \begin{bmatrix} \alpha - \mathbf{i}\beta \\ \mathbf{0} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{i}\cdot(\alpha - \mathbf{i}\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \cdot \theta$$

3. Se consideră $P(z)=z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots.. + a_1z + a_0$.Matricea companion este

$$C=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$. Demonstrați că $\det(\lambda I_n - C) = P(\lambda)$.

Rezolvare.

$$\det(\lambda I_n - C) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + a_{n-1})\lambda^{n-1} + \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

(λ – rădăcinile lui P(λ))·

4. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai unui reflector Householder.

Indicatie: $G^T u = e_1$.G-este un reflector. Coloanele lui G sunt vectori proprii.

Soluţie. Fie reflectorul Householder $\mathbf{H = I - 2 \cdot u \cdot u^T}, \| \mathbf{u} \|_2 = \mathbf{1}$.

Matricea $\mathbf{H}$ fiind simetrică are valorile proprii reale. Fiind ortogonală, are valorile proprii în modul egale cu 1. Valorile proprii nu pot fi decât +1 sau - 1.

Fie G reflectorul Householder care reduce vectorul u : $G^T \cdot u = e_1$, atunci:

$$\mathbf{G^T \cdot H \cdot G = G^T \cdot \left(I - 2 \cdot u \cdot u^T\right) \cdot G = I - 2 \cdot G^T \cdot u \cdot u^T \cdot G =}$$

$$\mathbf{I - 2 \cdot G^T \cdot u \cdot \left(G^T \cdot u\right)^T = I - 2 \cdot e_1 \cdot e_1^T}$$

$$\mathbf{G^T \cdot H \cdot G = diag\left(-1, 1, \dots, 1\right)}$$

$$H \cdot G = G \cdot diag\left(-1, 1, \dots, 1\right)$$

Deci valorile proprii sunt $-1, 1, \dots, 1$.

Din ultima relaţie se observă că vectorii proprii sunt coloanele lui G.

5. Calculaţi valorile proprii ale matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ & \ddots & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Soluţie.

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & \\ & . & -1 & \\ & -1 & . & \\ & & & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-(n-1) & \lambda-(n-1) & ..... & \lambda-(n-1) \\ -1 & \lambda & ..... & -1 \\ : & : & ..... & : \\ -1 & -1 & ..... & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= [\lambda - (n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ -1 & \lambda & ..... & -1 \\ : & : & ..... & : \\ -1 & -1 & ..... & \lambda \end{vmatrix} = [\lambda - (n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 0 & ..... & 0 \\ -1 & \lambda+1 & ..... & 0 \\ : & : & ..... & : \\ -1 & 0 & ..... & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$= [\lambda - (n-1)][\lambda + 1]^{n-1} = 0.$

Deci valorile proprii ale matricei A sunt:

$$\lambda_1 = n-1, \quad \lambda_i = -1, \quad 1 < i \le n.$$

6.a) Fie $x \in R^n$, $x \neq 0$. Determinaţi $y \in C^n$, astfel încât $y^T x = 1$.

b) Fie $A \in R^{n \times n}$, cu $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi vectorii proprii x_i, $i=1:n$. Se formează matricea $B = A(I_n - x_1 y^T)$ cu $y^T x_1 = 1$. Să se arate că matricea B are spectrul $\lambda(B) = \{0, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi vectorii proprii z_k, $k=1:n$, cu $z_1 = x_1$ şi $z_k = x_k - y^T x_k x_1$, $k=2:n$.

Rezolvare:

a) Fie y un vector coliniar cu x => y=ax;

$y^T x = a x^T x = a||x||^2 = 1$ => $a = 1/||x||^2$ => $y = x/||x||^2$;

b) $Bx_1 = (I_n - x_1 y^T) A x_1 = \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_1 y^T x_1 = 0$ => 0 este valoare proprie si x_1 este vector propriu al lui B.

$$Bx_k = (I_n - x_k y^T) A x_1 = \lambda_k x_k - \lambda_k x_1 y^T x_k = \lambda_k (x_k - x_1 y^T x_k) = \lambda_k z_k;$$

$$Bz_k = B(x_k - x_1 y^T x_k) = Bx_k - (Bx_1) y^T x_k = Bx_k$$

Din ultimele 2 relaţii rezultă că $Bz_k = \lambda_k z_k$, ceea ce arată ca matricea B are valorile proprii λ_k şi vectorii proprii z_k, cu k=2:n

$\lambda(B) = \{0, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$

$X(B) = \{x_1, z_2, ..., z_n\}$

7. Care sunt valorile singulare ale matricelor ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezolvare

$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei $A^T A$.

$$\det(A^T A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 11) = 0; \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 - \sqrt{5}; \lambda_1 = 4 + \sqrt{5} \Rightarrow \sigma(A) = \{\sqrt{4-\sqrt{5}}, \sqrt{4+\sqrt{5}}\}.$$

Analog calculam și pentru B și obținem $\sigma(B)=\{\sqrt{8-\sqrt{10}},\sqrt{8+\sqrt{10}}\}$.

8. Dacă D=A+Bi **și** $D=U\sum V^T$ Arătați că $C=\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$ este ortogonală.

Rezolvare

$$D=(U_{real}+iU_{img})\Sigma(V_{real}+iV_{img})^T = A+iB;=>\begin{cases} A=U_{real}\Sigma V_{real}^T-U_{img}\Sigma V_{img}^T \\ B=U_{img}\Sigma V_{real}^T+U_{real}\Sigma V_{img}^T \end{cases}$$

$$C=\begin{bmatrix} U_{real}\Sigma V_{real}^T-U_{img}\Sigma V_{img}^T & U_{img}\Sigma V_{real}^T+U_{real}\Sigma V_{img}^T \\ -U_{img}\Sigma V_{real}^T-U_{real}\Sigma V_{img}^T & U_{real}\Sigma V_{real}^T-U_{img}\Sigma V_{img}^T \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} U_{real} & U_{img} \\ -U_{img} & U_{real} \end{bmatrix}}_{U_c}\begin{bmatrix} \Sigma_D & 0 \\ 0 & -\Sigma_D \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} V_{real}^T & V_{img}^T \\ -V_{img}^T & V_{real}^T \end{bmatrix}}_{V_c^T}$$

U_c, V_c^T -rotatori Givens=> C- este ortogonală.

Probleme propuse

1. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Fie $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, cu $\lambda(\mathbf{A})=\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi vectorii proprii $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{i=1:n}$. Se formează matricea $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \frac{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T}{\mathbf{y}_1^T\mathbf{x}_1}$, în care $\mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{y}_1$ reprezintă vectorii proprii ai matricelor $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^T$, corespunzători aceleaşi valori proprii dominante λ_1.

a) Să se arate că matricea $\mathbf{B}$ are acelaşi spectru ca şi $\mathbf{A}$, exceptând valoarea proprie λ_1, care se anulează, adică $\lambda(\mathbf{B})=\{0,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ iar vectorii proprii ai matricei $\mathbf{B}$ sunt $\mathbf{z}_k$, $\mathbf{k=1:n}$, unde $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\cdot\left(\mathbf{y}^T\mathbf{x}_k\right)\cdot \mathbf{x}_1,\ \mathbf{k} \neq \mathbf{i}$, şi $\mathbf{z}_1=\mathbf{x}_1$.

b) Scrieţi o funcţie Matlab care calculează valorile proprii şi vectorii proprii prin metoda directă a puterii, presupunând că valorile proprii sunt reale şi distincte.

Indicaţie: Se formează $\mathbf{Bx}_1$, $\mathbf{Bx}_k$, $\mathbf{Bz}_1$ şi $\mathbf{Bz}_k$.

3. Pentru matricea $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, cu $\lambda(\mathbf{A})=\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi vectorii proprii $\mathbf{x}_i,\mathbf{i=1:n}$

a) Să se arate că $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^T$ au aceleaşi valori proprii

b) Arătaţi că vectorii proprii $\mathbf{x}_i$ şi $\mathbf{y}_j$ corespunzători la două valori proprii distincte ale lui $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^T$ sunt ortogonali, adică $\mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j=0$.

c) Fie $B=A-\lambda_i\frac{x_i\cdot y_i^T}{y_i^T\cdot x_i}$ .Calculaţi $\lambda(\mathbf{B})$ şi $\mathbf{x}_i(\mathbf{B})$

4. Fie matricea 3-diagonală: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$.

Se construieşte şirul de polinoame:

$p_0(\lambda) = 1$

$p_1(\lambda) = \lambda - a_1$

$p_n(\lambda) = (\lambda - a_n)p_{n-1}(\lambda) - b_n c_{n-1} p_{n-2}(\lambda)$.

a) Arătaţi că $p_n(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$.

b) Calculaţi vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

c) Scrieţi o funcţie Matlab care calculează valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$

5. Fie matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \in R^{2\times 2},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & & & & c \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ c & & & & b \end{bmatrix} \in R^{n\times n}$$

Calculaţi valorile singulare şi vectorii singulari ai matricelor $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$.

6. Calculaţi valorile singulare şi vectorii singulari la dreapta şi la stânga pentru matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 9 & 12 \\ -30 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

7. Calculaţi descompunerea valorilor singulare (matricele $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ şi Σ) pentru $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.