Seminar 4.Aproximări polinomiale

Responsabili :
Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)
Cosmin-Stefan Stoica(cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

In urma parcurgerii acestui seminar, studentul va fi capabil sa:

-aplice diferite metode de aproximare polinomiala pentru o functie

-cunoasca diferentele intre aceste metode

Breviar teoretic

1.Aproximare uniformă

Cel mai bun polinom de aproximare uniformă (*polinomul minimax*) al unei funcţii **f∈C([a,b])** se defineşte ca polinomul $\mathbf{p_n}$ de grad n, care se îndepărtează cel mai puţin în sensul normei de funcţia dată:

$$\left\| f - p_n^* \right\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \left\| f - p_n \right\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - p_n(x) \right|$$

Teorema de caracterizare a polinomului minimax

$\mathbf{p_n^*}$ este polinom minimax dacă $\mathbf{e(x)=f(x)-p_n^*(x)}$ atinge de **n+2** ori valoarea extremă **+E** sau **–E** cu alternanţe de semn între două extreme consecutive.

Polinoamele Cebâşev prezintă proprietatea de alternanţă din teorema de caracterizare şi servesc la obţinerea polinomului minimax.

Pentru determinarea polinomului minimax al unei funcţii date **f∈C([a,b])** :

- se face schimbarea de variabilă:

$$x \in [a, b] \to t \in [-1,1] : x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

în funcţia **f(x)** obţinându-se funcţia **ϕ(t)**

- se aproximează polinomul minimax $\mathbf{p_n^*(t)}$ prin dezvoltarea în serie de polinoame Cebâşev limitată la gradul **n** a funcţiei **ϕ(t)**, transformata lui **f(x)**

$$p_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

Teorema de caracterizare conduce la sistemul de ecuaţii liniare:

$$f(t_j) - p_n^*(t_j) = (-1)^j E, \qquad j = 0 : n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t_j^k + (-1)^j E = f(t_j), \qquad j = 0 : n + 1$$

în care $\mathbf{t_j}$ sunt punctele de oscilaţie ale polinomului $\mathbf{T_{n+1}(t)}$:

$$t_j = \cos \frac{\pi j}{n+1}, \; j = 0 : n + 1$$

- se face schimbarea de variabilă

$$t \in [-1,1] \to x \in [a,b] : t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$$

în polinomul minimax **$p_n^*(t)$** trecându-se în **[a,b]**

Algoritmii Remes

Algoritmul 1 al lui Remes calculează o aproximare a polinomului minimax

$R_{n+1}(t_j)=\phi(t_j)$, $j=0:n+1$
$S_{n+1}(t_j)=(-1)^j$

cu care se aproximează în sistem:

$p_n^*(t)=R_{n+1}(t)-ES_{n+1}(t)$

Identificând coeficienţii se obţine:

$$E = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}$$

$$a_i = r_i - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} s_i, \quad i = 0 : n$$

$$t_j = \cos\frac{\pi j}{n+1}, \quad j = 0 : n+1,$$

In algoritmul 2 Remes, se caută valorile extreme ale diferenţei **e(t)**, fie **e(tm)** o asemenea valoare; **t_j<tm<t_{j+1}** dacă nu coincide cu un punct de oscilaţie, se înlocuieşte cu **t_j** sau **t_{j+1}** astfel încât să se menţină oscilaţia valorilor şi se recalculează polinomul minimax obţinut cu noul ansamblu de puncte de oscilaţie (care îl include pe **tm**), folosind algoritmul 1 Remes.

- dacă **e(tm)*e(t_j)<0**, **$t_{j+1}\leftarrow$tm**

noile puncte de oscilaţie: **$t_0,\ldots,t_j,tm,t_{j+2},\ldots,t_{n+1}$**

- dacă **e(tm)*e(t_j)>0**, **$t_j\leftarrow$tm**

noile puncte de oscilaţie: **$t_0,\ldots,t_{j-1},tm,t_{j+1},\ldots,t_{n+1}$**

Algoritmul iterativ se încheie în momentul în care toate valorile extreme ale lui **e(t)** se ating numai în punctele de oscilaţie.

2.Aproximare în sensul celor mai mici pătrate

Cel mai bun aproximant în sensul celor mai mici pătrate a unui element $f\in F$, F fiind un spaţiu prehilbertian(spaţiu vectorial cu produs scalar), într-un subspaţiu al acestuia $G \subset F$, de dimensiune finită, este un element $g^*\in G$ cu proprietatea:

$$\|f - g^*\| = \min_{g\in G}\|f - g\|.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca $g^* \in G$ să fie cel mai bun aproximant a lui $f \in F$ este ca

$$\langle f - g^*, g\rangle = 0, \quad \forall\ g \in G.$$ (teorema de caracterizare)

Dacă dezvoltăm după o bază, $u_0, \ldots, u_n$ din G se obţine *sistemul normal* (sau sistem *Gram*):

$$\begin{cases} \langle u_1,\ u_1\rangle \cdot c_1^* & + \langle u_2,\ u_1\rangle \cdot c_2^* & \cdots & \langle u_n,\ u_1\rangle \cdot c_n^* & = \langle f,\ u_1\rangle \\ \langle u_1,\ u_2\rangle \cdot c_1^* & + \langle u_2,\ u_2\rangle \cdot c_2^* & \cdots & + \langle u_n,\ u_2\rangle \cdot c_n^* & = \langle f,\ u_2\rangle \\ & \cdots & \ddots & & \cdots \\ \langle u_1,\ u_n\rangle \cdot c_1^* & + \langle u_2,\ u_n\rangle \cdot c_2^* & \cdots & + \langle u_n,\ u_n\rangle \cdot c_n^* & = \langle f,\ u_n\rangle \end{cases}$$

care permite determinarea coeficienţilor celui mai bun aproximant:

$$g^* = \sum_{k=0}^{n} c_k^* \cdot u_k$$

Aproximare continuă în sensul cmmp

Aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate alege produsul scalar de forma

$$\langle f,\ g\rangle = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x)\ dx,$$

şi norma $\| f \| = \sqrt{\int_a^b w(x) f^2(x)\ dx}$

Baza polinomială

$$u_0(x) = 1, \qquad u_1(x) = x, \qquad \ldots \qquad u_n(x) = x^n,$$

conduce la un sistem Hilbert, foarte rău condiţionat.

Baza trigonometrică

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(x),\ \cos(x),\ \cdots,\ \sin(nx),\ \cos(nx)$$

este ortonormată în raport cu produsul scalar continuu

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_q(x) \cdot u_r(x)\ dx = \delta_{qr} = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ 1 & q = r \end{cases},$$

pentru orice funcţie $f = C([-1,\ 1])$

Coeficienţii celui mai bun aproximant

$$g^* = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{p=1}^{n} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

se calculează direct

$$a_0 = \langle f,\ u_0\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin x\ dx, \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x\ dx,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin px\ dx, \quad a_p = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos px\ dx.$$

Baza Cebâşev

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \ T_1(x), \ \dots, \ T_n(x)$$

este ortogonală în raport cu produsul scalar

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_q(x) \cdot T_r(x) \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} 0 & q \neq r, \\ \frac{\pi}{2} & q = r \neq 0, \\ \pi & q = r = 0. \end{cases}$$

pentru orice funcţie arbitrară $f \in C([-1, 1])$.

Coeficienţii polinomului optimal de aproximare

$p_n^*(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$,

sunt

$$a_0 \cdot \pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \qquad ,$$

$$a_p \cdot \frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_p(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \qquad a_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_p(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \qquad p = 1 : n$$

Aproximare discretă în sensul cmmp

În *aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrate*, funcţia $f \in F = C([a, b])$ este cunoscută pe un suport finit $x_0, x_1, \dots, x_n$ prin valorile ei $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ şi se doreşte a fi aproximată optimal în sensul celor mai mici pătrate printr-o funcţie $g^* \in G \subset F$, cunoscută prin valorile sale $g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_n)$.

Subspaţiul G este generat de elementele liniar independente $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ din F.

Produsul scalar şi norma sunt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \cdot f(x_i) \cdot g(x_i), \ \|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} w(x_i) f^2(x_i)}.$$

Sistemul normal obţinut folosind baza polinomială are forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^* \sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) f(x_i) x_i^j, \ j = 0 : n.$$

Baza trigonometrică:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \cdots, \sin((n-1)x), \cos((n-1)x)$$

este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=0}^{2n-1} u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r, \ q, r = 0 : 2n - 1 \\ n & q = r \end{cases}$$

Suportul interpolării este format din puncte echidistante în $[0,\ 2\pi]$:

$$x_k = \frac{\pi k}{n},\ k = 0 : 2n - 1$$

Coeficienţii polinomului minimal de aproximare discretă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \cdots + b_{n-1} \sin(n-1)x + a_{n-1} \cos(n-1)x$$

rezultă din sistemul diagonal Gram:

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$b_j = \langle f, \sin jx \rangle = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin\frac{k\pi}{n} j,$$

$$a_j = \langle f, \cos jx \rangle = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \cos\frac{k\pi}{n} j, \qquad j = 1 : n - 1.$$

Baza Cebâşev:

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ T_1(x),\ \cdots,\ T_n(x),$$

este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=0}^{n} u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r,\ \ q, r = 0 : n, \\ \dfrac{n+1}{2} & q = r. \end{cases}$$

Suportul interpolării este format din rădăcinile polinomului

$$T_{n+1}(x) = 0,\ \ x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \qquad k = 0 : n$$

Coeficienţii polinomul optimal de aproximare discretă în sensul celor mai mici pătrate

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x)$$

sunt:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} f_k,$$

$$a_j = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot T_j(x_k), \qquad j = 1 : n,$$

Probleme rezolvate

1. Considerăm funcţia $f : [-1,1] \to R,\ f(x) = x^3 - x^2 + 3x$.

a) Calculaţi valorile exacte ale polinoamelor minimax de grade 0,1,2 a lui $f(x)$ şi calculaţi în fiecare caz abaterea între $f(x)$ şi polinomul minimax corespunzător.

b) Aplicaţi algoritmul lui Remes pentru aproximarea polinomului minimax de grad 1.

Soluţia. a) Calculăm derivata lui $f(x): f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0$ pentru orice $x \in [-1,1]$, deci f este crescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

Avem $f(-1) = -5$ şi $f(1) = 3$, deci -1 şi 1 sunt punctele de extrem ale funcţiei.

- Pentru polinomul de grad zero trebuie să avem două puncte de alternanţă.

$$\Rightarrow p_0^*(x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

Abaterea este $\varepsilon(x) = f(x) - p_0^*(x)$, de unde avem:

$\varepsilon_1 = \|f(x_1) - p_0^*(x_1)\| = \|-5 - (-1)\| = 4$

$\varepsilon_2 = \|f(x_2) - p_0^*(x_2)\| = \|3 - (-1)\| = 4$

- Pentru polinomul de grad unu sunt necesare trei puncte de alternanţă.

$p_1^*(x) = ax + b$

$\varepsilon(x) = f(x) - p_1^*(x) = x^3 - x^2 + 3x - ax - b = x^3 - x^2 + (3-a)x + b$

Dacă impunem condiţia de extrem, $\varepsilon'(x) = 3x^2 - 2x + (3 - a) = 0$, obţinem

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3a - 8}}{3}$$

Pentru a prezenta trei alternanţe trebuie ca $\varepsilon'(x) = 0$ să aibă două rădăcini reale pe $[-1,1]$, deci $a > \frac{8}{3}$.

Impunem condiţia $\varepsilon(-1) = \varepsilon(1) \Rightarrow a = 4$, deci : $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

Impunem din nou condiţia $\varepsilon(-1) = \varepsilon\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow b = -\frac{11}{27}$.

$\Rightarrow p_1^*(x) = 4x - \frac{11}{27}$

Abaterea este $\varepsilon(x) = f(x) - p_1^*(x)$, de unde avem:

$\varepsilon = \|f(x) - p_1^*(x)\| \le \frac{1}{2}\|T_2(x)\| \le \frac{1}{2}$

- Pentru polinomul de gradul doi avem:

$p_2^*(x) = f(x) - \frac{1}{4}T_3(x) = x^3 - x^2 + 3x - \frac{4x^3 - 3x}{4} = -x^2 + \frac{15}{4}x$.

În acest caz, abaterea va fi:

$\varepsilon = \|f(x) - p_2^*(x)\| = \frac{1}{4}\|T_3(x)\| \le \frac{1}{4}$.

b) Pentru aproximaţia polinomului de gradul 1 folosim algoritmul Remes 1 şi avem:

$p_1^*(x) = c_0 + c_1 x = R_2(x) - E \cdot S_2(x)$

unde $R_2(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2$ şi $S_2(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2$

Suportul interpolării este $-1,0,1$, deci:

$$\begin{cases} r_0 - r_1 + r_2 = -5 \\ r_0 = 0 \\ r_0 + r_1 + r_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 0 \\ r_1 = 4 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0 - s_1 + s_2 = 1 \\ s_0 = -1 \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0 = -1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 2 \end{cases}$$

Deci avem polinoamele $\mathbf{R_2(x) = -x^2 + 4x}$, $\mathbf{S_2(x) = 2x^2 - 1}$ şi $\mathbf{E = -\frac{1}{2}}$.

$\Rightarrow \mathbf{p_1^*(x) = R_2(x) - E \cdot S_2(x) = 4x - \frac{1}{2}}$.

Abaterea va fi:

$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{(x) = f(x) - p_1^*(x) = x^3 - x^2 + 3x - 4x + \frac{1}{2} = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}}$.

Pentru o mai bună aproximare vom lua în loc de 0 punctul $-\frac{1}{3}$, deci vom reface calculele:

$$\begin{cases} r_0 - r_1 + r_2 = -5 \\ r_0 - \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{9} = -\frac{31}{27} \\ r_0 + r_1 + r_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = \frac{1}{3} \\ r_1 = 4 \\ r_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0 - s_1 + s_2 = 1 \\ s_0 - \frac{s_1}{3} + \frac{s_2}{9} = -1 \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0 = -\frac{5}{4} \\ s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

De unde obţinem noile polinoame $\mathbf{R_2(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x + \frac{1}{3}}$, $\mathbf{S_2(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}}$ şi

$\mathbf{E = -\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{16}{27}}$. $\Rightarrow \mathbf{p_1^*(x) = R_2(x) - E \cdot S_2(x) = 4x - \frac{11}{27}}$.

2. Să se determine polinomul Cebâşev de grad 2 pentru funcţia f:[-5,3] → R; f(x)=2x+1.

Soluţie.

Pas1: Schimbare de variabilă

$$x = at + b \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow F : [-1,1] \to \Re; F(t) = f(4t-1) = 8t - 1;$$

$$\Rightarrow x = 4t - 1$$

Pas2: Se scrie forma generală a polinomului de interpolare Cebâşev de grad 2.

$$P_2(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} T_0(t) + a_1 T_1(t) + a_2 T_2(t)$$

Pentru a determina coeficienţii a_0, a_1, a_2 luăm rădăcinile lui $T_3(t)=0$.

$$T_3(t)=0 \Rightarrow t_1=-\frac{\sqrt{3}}{2};t_2=0;t_3=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$T_3(t)=4t^3-3t;$$

$$a_0=\frac{\sqrt{2}}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i);$$

$$a_p=\frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)T_p(x_i);$$

$$F(t_1)=-4\sqrt{3}-1; \qquad F(t_2)=-1; \qquad F(t_3)=4\sqrt{3}-1;$$

$$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2+1}(F(t_1)+F(t_2)+F(t_3))=\frac{\sqrt{2}}{3}(-4\sqrt{3}-1-1+4\sqrt{3}-1)=-\sqrt{2}$$

$$a_1=\frac{2}{2+1}(F(t_1)t_1+F(t_2)t_2+F(t_3)t_3)=\frac{2}{3}((-4\sqrt{3}-1)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+0*1+(4\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right))=8;$$

$$a_2=\frac{2}{2+1}(F(t_1)(2t_1^2-1)+F(t_2)(2t_2^2-1)+F(t_3)(2t_3^2-1))=\frac{2}{3}((-4\sqrt{3}-1)\frac{1}{2}+1*1+(4\sqrt{3}-1)\frac{1}{2})=0;$$

$$\Rightarrow P_2=-1+8T_1(t)=8t-1;$$

3. Să se determine P_2 ,polinom de grad 2 care realizează aproximarea în sensul celor mai mici pătrare a funcţiei $f(x) = |x|$ pe intervalul $(-1,1)$ cu ponderea $w(x) = 1$.

Soluţie. Vom considera baza canonică $u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2$. Sistemul Gram este:

$$\begin{cases} c_0\langle 1,1\rangle + c_1\langle 1, x\rangle + c_2\langle 1, x^2\rangle = \langle 1, f(x)\rangle \\ c_0\langle x,1\rangle + c_1\langle x, x\rangle + c_2\langle x, x^2\rangle = \langle x, f(x)\rangle \\ c_0\langle x^2,1\rangle + c_1\langle x^2, x\rangle + c_2\langle x^2, x^2\rangle = \langle x^2, f(x)\rangle \end{cases}$$

Calculul produselor scalare ne conduce la:

$$\langle 1, x\rangle = \langle x,1\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle 1, x^2\rangle = \langle x, x\rangle = \langle x^2,1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x, x^2\rangle = \langle x^2, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle x^2, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\langle 1, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} |x| dx = 1$$

$$\langle x, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x|x| dx = 0$$

$$\langle x^2, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x^2|x|dx = \frac{1}{2}$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 = 1 \\ \frac{2}{3}c_1 = 0 \\ \frac{2}{3}c_0 + \frac{2}{5}c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{3}{16} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{15}{16} \end{cases}$$

Deci, polinomul care realizează aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrare este:

$$p_2(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}$$

4.Să se determine P_2 care realizează aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrare a funcţiei dată prin tabelul de mai jos cu ponderea $w(x) = 1$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Soluţie. Vom considera baza canonică $u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2$. Sistemul Gram este:

$$\begin{cases} c_0\langle 1,1\rangle + c_1\langle 1,x\rangle + c_2\langle 1,x^2\rangle = \langle 1, f(x)\rangle \\ c_0\langle x,1\rangle + c_1\langle x,x\rangle + c_2\langle x,x^2\rangle = \langle x, f(x)\rangle \\ c_0\langle x^2,1\rangle + c_1\langle x^2,x\rangle + c_2\langle x^2,x^2\rangle = \langle x^2, f(x)\rangle \end{cases}$$

Calculul produselor scalare ne conduce la:

$$\langle 1,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$$

$$\langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i = 0$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x,x\rangle = \langle x^2,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = \frac{5}{2}$$

$$\langle x, x^2\rangle = \langle x^2, x\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = 0$$

$$\langle x^2, x^2\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i^4 = \frac{17}{8}$$

$$\langle 1, f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{4} |x_i| = 3$$

$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i|x_i| = 0$$

$$\langle x^2, f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i^2|x_i| = \frac{9}{4}$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} 5c_0 + \frac{5}{2}c_2 = 3 \\ \frac{5}{2}c_1 = 0 \\ \frac{5}{2}c_0 + \frac{17}{8}c_2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{6}{35} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow p_2(x) = \frac{6}{7}x^2 + \frac{6}{35}$$

Probleme propuse

1. Considerăm funcţia $f:[-1,1] \to R, f(x) = x^3 + x$.
a)Determinati polinomul de grad 2 care realizeaza aproximarea continua in sensul celor mai mici patrate cu $\omega(x) = 1$.
b) Determinati valoarea exacta a polinomului minimax de grad 2 si aproximarea polinomului minimax de grad 1.
2. Considerăm funcţia $f:[0,2\pi] \to R, f(x) = x\cos(x)$.Determinati polinomul trigonometric

$P_2(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + a_2 \sin(2x) + b_2 \cos(2x)$ care realizeza aproximarea continua in sensul celor mai mici patrate.
3. Pentru funcţia $\mathbf{f} : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$, determinaţi polinomul

$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \mathbf{a}_1\mathbf{T}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{a}_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x})$ care realizează aproximarea continuă conform principiului celor mai mici pătrate
4. Considerăm funcţia $f:[-1,1] \to R, f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ .Calculati coeficientii Polinomului Cebisev de grad 3 de aproximare continua in sensul celor mai mici patrate.
5. Pentru funcţia **$f:[-1, 1] \to R, f(x)=x^5-x+1$** se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 4 şi o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.
6. Pentru funcţia $\mathbf{f: [-2, 2] \to R, f(x)=x^4 +1}$ se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 3 şi o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.
7**.** Calculaţi polinomul de aproximare discretă Cebâşev în sensul celor mai mici pătrate de grad 2

ştiind că funcţia **f** cunoscută în punctele:

x	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
f	1/2	1	-1/2

8. Pentru funcţia **f**, cunoscută prin

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f(x)	-1	0	1	2

calculaţi cel mai bun polinom de aproximare trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate de ordin 2.