INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE CU CONDIȚII INIȚIALE

1. Metode cu paşi separați

Formularea problemei

Considerăm date:

- intervalul închis $I = \lfloor x_0,\ x_0 + a \rfloor \subset R$,
- funcția continuă $f : I \times R \to R,\ (x, y) \to f(x, y)$,
- ecuația diferențială $P : y' = f(x, y)$,

Problema diferențială de ordinul 1 constă în determinarea funcției derivabile

$$y : I \to R, \qquad x \to y(x),$$

cu proprietatea că pentru $\forall\ x \in I$ avem $y'(x) \equiv f(x,\ y(x))$.

Pentru un *sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1* se cunosc funcțiile continue

$f_j : I \times R^n \to R^n, \qquad (x, y_1, ..., y_n) \to (z_1, z_2, ..., z_n), \qquad j = 1 : n.$

şi ecuațiile diferențiale

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n),$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n),$$
$$\dots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

şi interesează determinarea funcțiilor derivabile

$$y_j : I \to R^n, \qquad x \to y_j(x),$$

astfel încât $y_j'(x) \equiv f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \qquad j = 1 : n.$

Integrarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul p

$$y_j^{(p)} = f_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', y_1^{(p-1)}, \dots y_n^{(p-1)}),\ j = 1 : n,$$

scris în notație vectorială simplificată sub forma

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots y^{(p-1)}),$$

cu $f_j : I \times (R^n)^p \to R$,

(sau $f : I \times (R^n)^p \to R^n$),

presupune determinarea funcțiilor derivabile

$y_j : I \to R^n, \qquad x \to y_j(x) \qquad (\text{sau } y : x \to y\ (x))$ Sistemul de ecuații diferențiale de ordin p poate fi redus folosind substituțiile de mai jos:

$$y = v_1,$$
$$y' = v_2,$$
$$\dots$$
$$y^{(p-1)} = v_p.$$

la sistemul de ecuații diferențiale de ordin 1

$$v_1' = v_2,$$
$$v_2' = v_3,$$
$$\dots$$
$$v_p' = f(x, v_1, v_2, \dots, v_p).$$

Existența soluțiilor ecuațiilor diferențiale şi sistemelor de ecuații diferențiale este condiționată de o suficientă “netezime” a funcțiilor f. Pentru unicitatea soluțiilor, şi prin urmare pentru o bună formulare a problemei de integrare numerică, se impun condiții suplimentare, cum sunt condițiile inițiale, finale, etc.

Problema diferențială cu condiții inițiale (problema Cauchy) constă din rezolvarea ecuației (3)

$$\mathbf{P1}\ :\ y' = f(x,\ y), \quad \text{impunând } \textit{condiția inițială}$$
$$\mathbf{P2}\ :\ y(x_0) = \lambda, \text{ cu } \lambda \in \mathbf{R}, \text{ dat.}$$

Vom presupune în mod constant în cele ce urmează că funcțiile f satisfac o *condiție Lipschitz*

$$\forall\ x \in I,\ \forall\ u,\ v \in R^n,\ \exists\ L > 0, \text{ astfel încât}$$
$$\left|\ f(x,\ u) - f(x,\ v)\ \right| < L \cdot \left|\ u - v\ \right|.$$

Condiția Lipschitz asigură *existența* şi *unicitatea soluției* problemei Cauchy.
Problema diferențială cu condiții inițiale este echivalentă cu determinarea unei funcții y continue pe I, cu proprietatea că

$$y(x) = \lambda + \int_{x0}^{x} f\ (t,\ y(t))\,dt.$$

echivalență cunoscută şi sub numele de *metoda constructivă Picard*
Metoda nu este aplicabilă analitic, deoarece f nu admite în general primitive. De cele mai multe ori soluția analitică nu este exprimabilă prin funcții elementare, sau este foarte greu de găsit şi de aceea se apelează la tehnici de integrare numerică ce oferă valori aproximative ale soluției într-o diviziu ne a lui I. Câteva dintre cele mai importante metode numerice sunt prezentate în continuare.

Metoda lui Euler

Se împarte intervalul $I = \lfloor x_0,\ x_0 + a \rfloor$ în N intervale echidistante de lungime

$$h = \frac{a}{N},$$

prin punctele de abscise

$$x_i = x_0 + i \cdot h = x_0 + i \cdot \frac{a}{N},$$

şi se aproximează soluția $y(x_i) \approx Y_i$, în care

$$\begin{cases} Y_0 = \lambda, \\ Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \ i = 0 : N-1. \end{cases}$$

```
function y = Euler(x0, a, n, f, y0)
/* Intrări:
/*x0=capătul stâng al intervalului de integrare
/* a  = lungimea intervalului
/* n  = numărul de puncte
/* y0 = condiția inițială
/* f  = funcția de integrat y'=f(x,y)
/*Ieşiri:
/* y  = vectorul aproximațiilor soluției
  y = zeros(n+1, 1);
  y(1) = y0;
  h =  a / n
  for i = 2 : n+1
        x = x0 + i*h
        y(i) =y(i-1) +h*f(x, y(i-1))
  end
```

Consistență, stabilitate, convergență

O *metodă cu pași separați* determină aproximația soluției în pasul următor Y_{i+1}, folosind numai informația din pasul curent i

$$\begin{cases} Y_0 = \lambda_h, \\ Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f_h(x_i, Y_i), \qquad i = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Eroarea într-un pas (în x_i) se defineşte ca

$$e_i = y(x_i) - Y_i,$$

iar *eroarea globală*

$$E_N = \max_{i=0:N} |e_i|.$$

O metodă cu paşi separați este *consistentă* dacă

$$\lim_{h \to 0} f_h(x, y) = f(x, y).$$

Stabilitatea unei metode cu paşi separați impune ca variația condițiilor inițiale să nu producă variații mari în rezultate.
Fie problema diferențială cu condiții inițiale

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = \lambda,$$

problema diferențială *perturbată*

$$z' = f(x, z) + \delta(x), \qquad z(x_0) = y_0 + \varepsilon_0,$$

şi metodele cu paşi separați corespunzătoare

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$
$$z_{i+1} = z_i + h \cdot (f_h(x_i, y_i) + \varepsilon_{iN}).$$

Metoda cu paşi separați este stabilă dacă

$$\forall \lim_{N \to \infty} |\varepsilon_{iN}| = 0, \ \exists K_1, K_2 > 0 \text{ astfel încât}$$

$$\max_{0 \le i \le N} |y_i - z_i| \le K_1 \cdot |y_0 - z_0| + K_2 \cdot \max_{0 \le i \le N} |\varepsilon_{iN}|.$$

Ilustratăm noțiunea de stabilitate a metodei pe problema simplă

$$y(0) = y_0,$$
$$y'(x) = -A \cdot y(x), \qquad A > 0.$$

având soluția

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-Ax}.$$

Metoda Euler furnizează aproximația

$$Y_n = (1 - hA)^n Y_0,$$

Deoarece $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ este necesar ca $\lim_{n \to \infty} Y_n = 0$,

care ne conduce la

$$|1 - hA| < 1 \Rightarrow 0 < h < \frac{2}{A}.$$

adică metoda Euler este *condițional stabilă*, aceasta furnizează rezultate corecte numai dacă se alege pasul h suficient de mic. Condiția de mai sus defineşte *A-stabilitatea metodei.*

Pentru stabilirea convergenței metodei Euler se scade din dezvoltarea în serie Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h.f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_i)$$

cu $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ şi $|y''(\xi_i)| \le M$.

relația lui Euler: $y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i)$

$e_{i+1} = e_i + h[f(x_i, y(x_i))-f(x_i, y_i)]+ h^2/2.|y''(\xi_i)|$

$|e_{i+1}| \le |e_i|+ h|[f(x_i, y(x_i))-f(x_i, y_i)]|+ h^2/2.M$

$|e_{i+1}| \le |e_i|+ h.L.|e_i|+ h^2/2.M \le (1+hL)|e_i|+ h^2/2.M$

$|e_1| \le h^2/2.M$

$|e_2| \le (1+hL)|e_1| + h^2/2.M \le [(1+hL)+1].h^2/2.M$

$|e_3| \le (1+hL)|e_2| + h^2/2.M \le [(1+hL)^2+(1+hL)+1].h^2/2.M$

$|e_n| \le [1+(1+hL)+(1+hL)^2+...+(1+hL)^{n-1}].h^2/2.M$

$$| e_n | \le \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} \cdot \frac{h^2M}{2} = \frac{(1 + hL)^n - 1}{2L} \cdot hM$$

$1+hL \le e^{hL} \Rightarrow (1+hL)^n \le e^{nhL} = e^{(xn-x0)L}$

$$| e_n | \le \frac{hM}{2L} \cdot \left[e^{(x_n-x_0)} - 1\right] \qquad \Rightarrow \qquad e_n = O(h)$$

Dacă $y(x)$ este soluția exactă şi y_n^h este aproximația lui $y(x)$ pentru h dat, atunci:

$x-x_0 = nh$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} y_n^h = y(x)$$

$$| y(x) - y_n^h | \le \frac{hM}{2L} \cdot \left[e^{(x-x_0)L} - 1\right] \Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} | y(x) - y_n^h | = 0$$

Metode de tip Runge - Kutta

O metodă de tip *Runge-Kutta* este o metodă cu paşi separați, în care funcția $f_h(x, y)$ se determină astfel

- se împarte intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ în q subintervale cu abscisele

  $$x_{ij} = x_{i0}u_jh, \ 0 \le u_j \le 1, \ u_0 = 0, u_q = 1.$$

Numărul subintervalelor q defineşte *rangul metodei.*

- se calculează aproximațiile soluției în punctele intermediare de forma

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{ij} = y_i + h \cdot \sum_{l=0}^{j-1} K_{jl} \cdot f(x_{il}, y_{il}), \ j = 1 : q. \end{cases}$$

Punctele intermediare x_{ij} şi constantele K_{jl} se obțin din condiția ca în dezvoltarea Taylor a lui y_{ij} după puterile lui h, să coincidă cât mai mulți termeni cu cei din dezvoltarea Taylor a soluției exacte.
Metoda este de ordinul p, dacă în cele două dezvoltări termenii coincid până la h^p inclusiv.
Metoda Runge-Kutta de ordin 1 şi rang 1 este de forma

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{i1} = y_i + h \cdot K_{10} \cdot f(x_{i0}, y_{i0}). \end{cases}$$

Dezvoltarea în serie Taylor a soluției exacte este

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y_i + \frac{h}{1!} y'_i + \frac{h^2}{2!} + \ldots = y_i + hf(x_{i0}, y_{i0}) + \ldots$$

Din identificare se obține $K_{10} = 1$,care conduce la metoda lui Euler. Metoda nu este utilizată în mod practic, deoarece eroarea într-un pas, de ordinul h^2, este importantă.
In metodele cu paşi separați de rang 2 şi ordin 2 se ia

$$x_{ij} = x_{i0} + u_j h, \ j = 0 : 2, \quad u_0 = 0, \quad u_1 \in [0, 1], \quad u_2 = 1$$

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{ij} = y_i + h \cdot \sum_{l=0}^{j-1} K_{jl} \cdot f(x_{il}, y_{il}), \ j = 1, 2. \end{cases}$$

Pentru $j=1$ avem

$$y_{i1} = y_i + hK_{10} f(x_{i0}, y_{i0}).$$

Dezvoltarea Taylor a soluției este

$$y(x_{i1}) = y(x_{i0} + u_1 h) = y_i + u_1 h y'_i + \ldots = y_i + u_1 h f_0 + \ldots$$

Din identificare rezultă $K_{10} = u_1$.
Pentru $j=2$ avem

$$y_{i2} = y_i + hK_{20} f(x_{i0}, y_{i0}) + hK_{21} f(x_{i1}, y_{i1}).$$

în care $f(x_{i1}, y_{i1})$ se înlocuieşte cu dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea punctului (x_{i0}, y_{i0})

$$f(x_{i1}, y_{i1}) = f(x_{i0}, y_{i0}) + (x_{i1} - x_{i0}) \frac{\partial f}{\partial x} + (y_{i1} - y_{i0}) \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots$$

$$f(x_{i1}, y_{i1}) = f_0 + u_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + K_{10} h f_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots,$$

deci

$$y_{i2} = y_i + (K_{20} + K_{21}) h f_0 + u_1 h^2 K_{21} \frac{\partial f}{\partial x} + h^2 K_{21} K_{10} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dar:

$$y'(x) = f(x,y)$$

$$y''(x) = f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(x) = f_x + f.f_y$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f$$

Dezvoltarea exactă este

$$y(x_{i2}) = y(x_i + h) = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \ldots = y_i + hf + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \ldots,$$

de unde rezultă

$$K_{20} + K_{21} = 1,$$

$$u_1 K_{21} = \frac{1}{2}.$$

Sistem care are soluția $K_{20} = 1 - \frac{1}{2u_1}$, $K_{21} = \frac{1}{2u_1}$.

Relațiile Runge-Kutta, au în acest caz forma

$$y_{i0} = y_i,$$
$$y_{i1} = y_i + hu_1 f(x_{i0}, y_{i0}),$$
$$y_{i2} = y_i + h\left(1 - \frac{1}{2u_1}\right)f(x_{i0}, y_{i0}) + \frac{h}{2u_1} f(x_{i1}, y_{i1}).$$

sau:

$$y_{i+1} = y_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)K_1 + \frac{1}{2\alpha} K_2$$

$K_1 = hf(x_i, y_i)$

$K_2 = hf(x_i + \alpha h,\ y_i + \alpha K_1)$

Prezintă interes practic următoarele cazuri particulare în raport cu valoarea lui $u_1 \in [0, 1]$.

- *metoda tangentei ameliorate,* în care $u_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă

$$x_{i1} = x_{i0} + u_1 h = x_i + \frac{h}{2},$$
$$y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i),$$
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1}).$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

- - *metoda Euler-Cauchy,* în care $u_1 = 1$

$$x_{i1} = x_i + h$$
$$y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})\right]$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right]$$

- *metoda Heun* pentru $u_1 = \frac{2}{3}$ care conduce la relațiile

$$x_{i1} = x_i + \frac{2}{3} h,$$
$$y_{i1} = y_i + \frac{2}{3} hf(x_{i1}, y_{i1}),$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} f(x_i, y_i) + \frac{3h}{4} f(x_{i1}, y_{i1}).$$

Eroarea într-un pas în metodele Runge-Kutta de ordin 2 este

$$\varepsilon = \frac{h^3}{6}\left(1 - \frac{3}{2} u_1\right)y'''(\xi) + \frac{3}{2} u_1 y''(\xi) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

In mod frecvent se utilizează o metodă de tip Runge-Kutta de ordin 4 de forma

$$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$
$$K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}.$$

a cărei implementare este.

```
function y = Runge_Kutta(a, b, n, y0, f)
% Intrări:
%  a, b - intervalul de integrare
%     n - numărul de puncte
%    y0 - condiția inițială
%     f - funcția y'=f(x,y)
% Ieşiri:
%  y - aproximarea soluției în punctele xi
  h = (b-a)/n;
  y = zeros(n+1,1);
  y(1) = y0;
  for  k = 2 : n+1
          x = a + i*h
          K1 = h.f(x, y(i-1))
          K2 = h.f(x + h/2, y(i-1) + K1/2)
          K3 = h.f(x + h/2, y(i-1) + K2/2)
          K4 = h.f(x + h, y(i-1) + K3)
          y(k) = y(k-1)+(K1+2.K2+2.K3+K4)/6
  end
```

Pentru ca metoda Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(x_i, y_i, h)$$

să fie convergentă către soluția $y(t)$ a problemei diferențiale, atunci când $h \to 0$ este suficient ca φ să verifice o condiție Lipschitz globală şi

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y).$$

Verificarea *A-stabilității* pentru metoda Runge-Kutta de ordinul 4 conduce la

$$K_1 = h \cdot f(t_n, y_n) = -hAy_n,$$

$$K_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = -hA\left(y_n + \frac{K_1}{2}\right) = -hAy_n\left(1 - \frac{hA}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = -hAy_n\left(1 - \frac{hA}{2} + \frac{h^2A^2}{4}\right),$$

$$K_4 = hf(t_n + h, y_n + K_3) = -hAy_n\left(1 - hA + \frac{h^2A^2}{2} - \frac{h^3A^3}{4}\right),$$

Prin înlocuire se obține o ecuație recurentă de forma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

$$= y_n\left[1 - hA + \frac{1}{2}(hA)^2 - \frac{1}{6}(hA)^3 + \frac{1}{24}(hA)^4\right],$$

$$y_{n+1} = p_4(hA) \cdot y_n,$$

cu soluția

$$y_n = [p_4(hA)]^n,$$

Întrucât

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

adică pasul de discretizare nu poate fi ales arbitrar

$$|p_4(hA)| < 1 \Rightarrow 0 < h < \frac{2.78}{A}.$$

Efortul de calcul în metodele Runge-Kutta este legat, în principal, de evaluarea lui f. Metoda Runge-Kutta de ordin 4 necesită 4 evaluări într-un pas, cu eroarea într-un pas de ordinul $O(h^4)$

Controlul erorii - metode adaptive cu paşi separaţi

O metodă ideală cu paşi separaţi

$$y_{k+1} = y_k + h_i f_h(x_i, y_i, h_i),$$

trebuie să ne asigure pentru o toleranţă ε dată, un număr minim de puncte intermediare, astfel încât eroarea globală să satisfacă următoarea condiţie

$$E_n = \max_{0\le i\le n} |y(x_i) - y_i| < \varepsilon.$$

Întrucât eroarea globală nu poate fi determinată, deoarece nu se cunoaşte valoarea exactă $y(x_i)$, vom utiliza o estimare a erorii locale pe baza calculului soluţiei cu două metode de precizii diferite şi vom folosi această estimare pentru ajustarea pasului h şi prin aceasta pentru "controlul erorii".

In metoda Euler

$$y_0 = \lambda,$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k),$$

eroarea într-un pas satisface ecuaţia

$$e_{k+1} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f(x_k, y(x_k)).$$

In metoda Euler modificată

$$\overline{y}_0 = \lambda,$$
$$\overline{y}_{k+1} = \overline{y}_k + \frac{h}{2}[f(x_k, \overline{y}_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_k + hf(x_k, \overline{y}_k))]$$

eroarea de trunchiere într-un pas, în ipoteza $y_k \approx y(x_k) \approx \overline{y}_k$ este

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_k - hf(x_k, y_k) \approx$$
$$y(x_{k+1}) - y(x_k) - hf(x_k, y_k) = he_{k+1},$$

de unde obţinem estimarea

$$e_{k+1} \approx \frac{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}{h} = \frac{y(x_{k+1}) - \overline{y}_{k+1}}{h} + \frac{\overline{y}_{k+1} - y_{k+1}}{h}$$

$$e_{k+1} \approx \overline{e}_{k+1} + \frac{\overline{y}_{k+1} - y_{k+1}}{h},$$

$$e_{k+1} \approx \frac{\overline{y}_{k+1} - y_{k+1}}{h}.$$

Această estimare a erorii poate fi folosită pentru exprimarea pasului optimal care să asigure o eroare globală minimă.

Fie două metode cu paşi separaţi

$$\begin{cases} y_0 = \lambda, \\ y_{k+1} = y_k + h_k f_h(x_k, y_k, h_k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \lambda, \\ \bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + h_k \bar{f}_h(x_k, \bar{y}_k, h_k) . \end{cases}$$

cu erorile locale de trunchiere $e_{k+1} = O(h^n)$ şi respectiv $\bar{e}_{k+1} = O(h^{n+1})$. Procedând ca mai înainte avem

$$e_{k+1} \approx \frac{\bar{y}_{k+1} - y_{k+1}}{h}, \quad \text{cu } e_{k+1} = O(h^n) \text{ de unde}$$

$$C \cdot h^n \approx \frac{\bar{y}_{k+1} - y_{k+1}}{h},$$

$$e_{k+1}(qh) \approx C \cdot (qh)^n = q^n C h^n \approx q^n \frac{\bar{y}_{k+1} - y_k}{h}.$$

Se alege q astfel încât

$$|e_{k+1}(qh)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad q^n \frac{|\bar{y}_{k+1} - y_k|}{h} < \varepsilon,$$

rezultă condiţia

$$q \le \sqrt[n]{\frac{\varepsilon h}{|\bar{y}_{k+1} - y_k|}} ,$$

Relaţiile de calcul devin

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + \frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6,$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216} K_1 + \frac{1408}{2565} K_3 + \frac{2197}{4104} K_4 - \frac{1}{5} K_5,$$

unde

$$K_1 = h \cdot f(x_k, y_k),$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{K_1}{4}\right),$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{3h}{8}, y_k + \frac{3K_1}{32} + \frac{9K_2}{32}\right),$$

$$K_4 = hf\left(x_k + \frac{12h}{13}, y_k + \frac{1932K_1}{2197} - \frac{7200K_2}{2197} + \frac{7296K_3}{2197}\right),$$

$$K_5 = hf\left(x_k + h, y_k + \frac{439K_1}{216} - 8K_2 + \frac{3680K_3}{513} - \frac{845K_4}{4104}\right),$$

$$K_6 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k - \frac{8K_1}{27} + 2K_2 - \frac{3544K_3}{2565} + \frac{1859K_4}{4104} - \frac{11K_5}{40}\right).$$

Metoda prezintă avantajul că necesită numai 6 evaluări ale funcţiei f într-un pas în loc de 16 pentru metodele convenţionale de ordin 4 şi 5.
Pornind cu un pas iniţial h, se determină y_{k+1} şi $\bar{y}_{k+1}$, care ne conduc la q, calculul repetându-se pentru pasul qh.

$$q = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon \cdot h}{2\left|\overline{y}_{k+1} - y_{k+1}\right|}} = 0.84 \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon \cdot h}{\left|\overline{y}_{k+1} - y_{k+1}\right|}} .$$

Metoda elimină de asemeni variațiile mari ale pasului limitând q şi h.

```
 [n,x,y,OK]=RK_Fehlberg(a,b,ε,y0,hmin,hmax,f)
%Intrări: a, b - intervalul de integrare
%ε - toleranța impusă pentru eroare
%hmin, hmax - limitele de variație ale pasului
%f - funcția de integrat  y'=f(x, y)
%Ieşiri:
% OK - indicator de reuşită/eşec al metodei
% n - numărul de puncte intermediare folosit
% x - tabloul punctelor intermediare
% y - aproximația soluției în punctele xk
  qmin = 0.1;    qmax = 4;
  t = a;         u = y0;
  x(0) = t;      y(0) = u;
  h = hmax;
  OK =  true;
  n =  0;
  while t < b ∧ OK
    K1 = h*f(t, u);
    K2 = h*f(t+1/4*h, u+1/4*K1);
    K3 = h*f(t+3/8*h, u+3/32*K1+9/32*K2);
    K4 = h*f(t+12/13*h, u+1932/2197*K1 -7200/2197* K2 +7296/2197*K3);
    K5 = h*f(t+h, u+439/216*K1-8*K2+3680/513*K3-845/4104*K4);
    K6 = h*f(t+1/2*h, u-8/27*K1+2*K2 -3544/2565*K3+1859/4104*K4-11/40*K5);
     e = abs(1/360*K1-128/4275*K3-2197/75240*K4+1/50*K5-2/55*K6 );
     q = 0.84.(ε / e)^0.25;
     if  e ≤ ε
        t  = t+h;
        u = u + 25/216*K1 + 1408/2565*K2 +2197/4104*K3 - 1/5*K5;
        n = n+1;
        x(n) = t;
        y(n) =u;
     end
     if  q < qmin
        q = qmin;
     if  q > qmax
        q = qmax;
     h = q*h;
     if h > hmax
        h = hmax;
     if h < hmin
        OK = false;
  end
```

Metode cu paşi legați.

Metodele cu paşi separați sunt utilizate frecvent datorită simplității lor şi faptului că necesită puține informații inițiale. Ele prezintă totuşi dezavantajul lipsei de precizie.

Spre deosebire de acestea, metodele cu *paşi legați* (sau *metodele multipas*) folosesc mai multe informații inițiale, deci sunt mai precise.

S-a amintit mai înainte că problema diferențială cu condiții inițiale

$$\begin{cases} y(x_0) = \lambda, \\ y' = f(x, y). \end{cases}$$

în care $f(x, y)$ satisface *condiția Lipschitz* globală

$$|f(x, u) - f(x, v)| \le L\,|u - v|,$$

este echivalentă cu determinarea funcției

$$y(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Pentru a o aplica, vom presupune cunoscute valorile aproximative

$$\begin{aligned} &y_k \approx y(x_k), \quad f_k = f(x_k, y_k), \\ &y_{k-1} \approx y(x_{k-1}), \quad f_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \\ &\dots \\ &y_{k-r} \approx y(x_{k-r}), \quad f_{k-r} = f(x_{k-r}, y_{k-r}). \end{aligned}$$

Aplicând relația pentru x_k și x_{k+1}

$$\begin{cases} y(x_{k+1}) = \lambda + \int_{x_0}^{x_{k+1}} f(t, y(t))\, dt, \\ y(x_k) = \lambda + \int_{x_0}^{x_k} f(t, y(t))\, dt, \end{cases}$$

rezultă

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))dt.$$

Pentru calculul integralei vom utiliza polinomul de interpolare $P(t)$ a lui f dat sub forma celei de-a treia formule de interpolare Newton-Gregory

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x, y\,(x))\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{-u}{j} \nabla^j f_k +$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f^{(r+1)}\,(\xi_k, \ y(\xi_k))}{(r+1)!} \cdot (x - x_k)\dots(x - x_{k-r})\,dx =$$

$$\sum_{j=0}^{r} \nabla^j f_k h \cdot (-1)^j \int_0^1 \binom{-u}{j} du +$$

$$\frac{h^{r+2}\ f^{(r+1)}\,(\xi_k, \ y\,(\xi_k))}{(r+1)!} \cdot \int_0^1 u\,(u+1)\dots(u+r)\,du.$$

Integralele

$$c_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-u}{k} du,$$

calculate cu metoda seriei generatoare au valorile $1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{5}{12}, \ \frac{3}{8}, \ \frac{251}{720}, \ \dots$ etc și duc la relația

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^{r} c_j \nabla^j f_k,$$

definind o *metodă explicită*, cunoscută sub numele de *metoda Adams-Bashforth.*
In același mod se obține *metoda implicită Adams-Moulton*

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=0}^{r} d_j \nabla^j f_{k+1}.$$

Putem trece la o relație de recurență liniară mai generală, aplicabilă atât pentru metode explicite cât şi implicite, de forma

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k-j} + h\sum_{j=-1}^{r} \beta_j f_{k-j}\ .$$

O metodă explicită are $\beta_{-1} = 0$ în timp ce metodele implicite se caracterizează prin $\beta_{-1} \neq 0$.
Pentru determinarea coeficienților α_j, β_j vom impune ca relația să reprezinte soluția exactă pentru polinoame de grad cât mai ridicat.
Astfel pentru

$$\begin{aligned} &y(x) = 1, \qquad y'(x) = 0,\\ &y(x) = x, \qquad y'(x) = 1,\\ &\ldots\\ &y(x) = x^p, \qquad y'(x) = p \cdot x^{p-1}. \end{aligned}$$

se aleg punctele $x_{k-r}, \ldots, x_k$ echidistante cu $h=1$ şi originea în x_{k-r}. Se obține sistemul

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 1,\\ &\sum_{j=0}^{r} \alpha_j (r-j) + \sum_{j=0}^{r} \beta_j = r,\\ &\ldots\\ &\sum_{j=0}^{r} \alpha_j (r-j)^p + p\sum_{j=0}^{r} \beta_j (r-j)^{p-1} = r^p. \end{aligned}$$

Determinarea celor $2r+2$ ($2r+3$ în cazul metodelor implicite), coeficienți impune tot atâtea relații, aşadar formula va fi exactă pentru polinoame de grad $\leq 2r+1$ (respectiv $2r+2$ pentru metode implicite).

Metode explicite şi implicite

Pentru $r=2$, metoda Adams-Bashforth este

$$y_{k+1} = y_k + h\left(f_k + \frac{1}{2}\nabla f_k\right) = y_k + h\left(f_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{2}\right),$$

adică

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(3f_k - f_{k-1}\right).$$

iar expresia erorii este în acest caz

$$e_{k+1} = \frac{5}{12} h^2 y'''(\xi_k).$$

In mod asemănător se obține
-pentru $r=3$

$$\begin{aligned} &y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right),\\ &e_{k+1} = \frac{3}{8} h^3 y^{(4)}(\xi_k); \end{aligned}$$

- pentru $r=4$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right),$$

$$e_{k+1} = \frac{251}{720} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

- pentru **r=5**

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}\cdot\left(1901\,f_k - 2774\,f_{k-1} + 2616\,f_{k-2} - 1274\,f_{k-3} + 251\,f_{k-4}\right)$$

$$e_{k+1} = \frac{95}{288} h^5 y^{(6)}(\xi_k).$$

Metodele implicite Adams-Moulton corespunzătoare sunt

r=2 $$e_{k+1} = -\frac{1}{24} h^3 y^{(4)}(\xi_k);$$

r=3 $$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right),$$

$$e_{k+1} = -\frac{19}{720} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

r=4 $$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}\left(251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}\right)$$

$$e_{k+1} = -\frac{3}{160} h^5 y^{(6)}(\xi_k).$$

Se mai folosesc de asemenea următoarele metode

- metoda explicită *Milne*

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}\right),$$

$$e_{k+1} = \frac{14}{45} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

- -metoda implicită *Simpson*

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left(2f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}\right),$$

$$e_{k+1} = -\frac{1}{90} h^4 y^{(5)}(\xi_k).$$

Metode predictor - corector

Metodele implicite asigură aproximații mai bune ale soluțiilor decât metodele explicite. De aceea ele se folosesc pentru a crește precizia rezultatelor obținute prin metode explicite.
Aplicarea unei metode implicite conduce la o ecuație neliniară de forma

$$y_{k+1} = hC_1 f\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right) + C_2.$$

Rezolvarea ecuației neliniare se face de obicei prin *metoda aproximațiilor succesive*.
Metoda *predictor-corector* îmbină aplicarea unei metode explicite cu una implicită. Metoda explicită calculează o *predicție* a soluției, iar metoda implicită - o *corecție*, făcând o singură iterație, cu valoarea de pornire, predicția oferită de metoda explicită.
Astfel metoda explicită Adams-Bashforth de ordinul 3 furnizează *predicția*

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12}\left[23\cdot f_k - 16\cdot f_{k-1} + 5\cdot f_{k-2}\right],$$

iar formula implicită Adams-Moulton de ordinul 2 corectează această valoare

$$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12}\left[5 \cdot y_{k+1}^{(p)} + 8 \cdot y_k - y_{k-1}\right].$$

Rezultă următorul algoritm

```
Function y = Pred_Cor(a, b, n, y0, f)
% Intrări: a, b = intervalul de integrare
%          n = numărul de puncte
%          y0= condiția inițială
           f = funcția de integrat  y'=f(x,y)
% Ieşiri:  y = tabloul aproximațiilor soluției
  Runge_Kutta(a, b, n, y0, f, y)
  h = (b-a) / n;
  x0=a;   x1 = a+h;   x2 = a+2h;
  y0 = y(0);  y1 =  y(1);  y2 = y(2);
  for i = 3 : n
   x = a+i*h;
   ypr=y2+h(23f(x2,y2)-6f(x1,y1)+5f(x0,y0))/12;
   ycor=yp+h(5f(x,ypr)+8f(x2,y2)-f(x1,y1))/ 2;
   y(k) =  ycor;
   y0 = y1;    y1 =  y2;      y2 =  ycor;
   x0 = x1;    x1 =  x2;      x2 =  x;
  end
```

Convergența și stabilitatea metodelor multipas

Asociem metodei multipas liniare operatorul:

$$L[y, h] = y(x + h) - \sum_{j=0}^{r} \alpha_j y(x - jh) - h\sum_{j=-1}^{r} y'(x - jh)$$

Dezvoltăm **y(x+jh)** şi **y′ (x+jh)** în serie Taylor :

$L[y,h]=C_0y(x)+C_1hy'(x)+...+C_qh^q y^{(q)}+...$

$$L[y, h] = \left[1 - \sum_{j=0}^{r} \alpha_j\right]y(x) + \sum_{j} y^{(j)}(x)\left[\frac{h^j}{j!} - \sum_{k=0}^{r} \alpha_k(-1)^j \frac{h^j}{j!} - \sum_{k=-1}^{r} \beta_k(-1)^{j-1} \frac{h^j}{(j-1)!}\right]$$

$$C_0 = 1 - \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \qquad C_1 = 1 - \sum_{k=0}^{r} \alpha_k(-k) - \sum_{k=-1}^{r} \beta_k$$

$$C_j = \frac{1}{j!}\left[1 - \sum_{k=0}^{r} \alpha_k(-k)^j - j\sum_{k=-1}^{r} \beta_k(-k)^{j-1}\right]$$

Metoda multipas are ordinul **p**, dacă este exactă pentru toate polinoamele de ordin ≤ **p**, adică $L[x^k,h]=0$, $k=0 : p$, dar $L[x^{k+1},h]\neq 0$.

Dacă metoda multipas este de ordinul **p** atunci $C_0=C_1=...=C_p=0$, $C_{p+1}\neq 0$

$$L[x^k, h] = \sum_{j=0}^{r} C_j \frac{d^j}{dx^j}(x^k)h^j =$$

$$C_r r!\, h^r + \cdots + C_j r(r-1)\cdots(r-j+1)h^{r-1} + \cdots C_1 r x^{r-1}h + C_0 x^r$$

O metodă de ordinul **p** este *consistentă* dacă $p \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{r} \alpha_k = 1 \qquad\qquad -\sum_{k=0}^{r} k \cdot \alpha_k + \sum_{k=-1}^{r} \beta_k = 1$$

Enumerăm mai multe metode uzuale:

- metoda explicită Adams-Bashforth $\quad y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=0}^{r}\beta_j f_{k-j}$,
- metoda explicită *Nystrom* $\quad y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{r}\beta_j f_{k-j}$,
- metoda implicită Adams-Moulton $\quad y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=-1}^{r}\beta_j f_{k-j}$,
- metoda implicită *Simpson-Milne* $\quad y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=-1}^{r}\beta_j f_{k-j}$,

Se definesc polinoamele:

$$\rho(z) = z^{k+1} - \sum_{j=0}^{r}\alpha_j z^{k-j}, \quad \sigma(z) = \sum_{j=-1}^{r}\beta_j z^{k-j}.$$

Fie operatorul de deplasare $\mathbf{E}$ definit prin

$$\mathbf{E}y_k = y_{k+1}.$$

Ecuația recurentă poate fi exprimată ca

$$\rho(\mathbf{E})y_{k+1} - h\cdot\sigma(\mathbf{E})f_{k+1} = 0.$$

Algoritmul multipas definit prin relația recurentă este zero-stabil dacă
- rădăcinile ecuației $\rho(z) = 0$ sunt de modul subunitar i.e.

$$\rho(z_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\,z_i\,| \le 1;$$

- rădăcinile de modul 1 sunt simple

Stabilitatea este *puternică* dacă singura rădăcină de modul 1 este $z_i = 1$.
Metoda Adams este *puternic stabilă* deoarece

$$\rho(z) = z^{k+1} - z^k = 0,$$

are singura rădăcină de modul 1 $z_i = 1$.
Metoda Nystrom este *slab stabilă* căci

$$\rho(z) = z^{k+1} - z^{k-1} = 0.$$

are două rădăcini de modul 1 $z_i = \pm 1$.
Impunem ca ecuația recurentă să aibă ordinul p. Se dezvoltă această ecuație în serie Taylor în vecinătatea unui punct t

$$(\rho(\mathbf{E})y(t) - h\rho(\mathbf{E})y'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i h^i y^{(i)}(t),$$

în care

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \rho(1),$$
$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_r) = \rho'(1) - \sigma(1) \ldots$$
$$C_p = \frac{1}{p!}\left(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \ldots + r^p\alpha_r\right) - \frac{1}{(p-1)!}\left(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \ldots + r^{p-1}\beta_r\right)$$

Dacă metoda este de ordin p atunci

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = \ldots = C_p = 0, \\ C_{p+1} \ne 0. \end{cases}$$

O metodă cu paşi legați este *consistentă* dacă este de ordin cel puțin 1.
Condiția de consistență impune deci ca

$$\begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$$

O metodă cu paşi legaţi zero-stabilă şi consistentă este convergentă.

Probleme rezolvate

Problema 1 Considerăm problema diferențială

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(t) = -y(t). \end{cases}$$

a cărei soluție exactă este $y(t) = e^{-t}$

Să se studieze convergența şi stabilitatea metodei Euler.

Soluție. $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i) = y_i - h \cdot y_i = (1 - h) \cdot y_i$

Pentru convergență considerăm intervalul constant $(0, \tau)$ cu $\tau = (i + 1) \cdot h$ în care facem $h \to 0$.

Avem

$$\lim_{h \to 0} y_{i+1} = \lim_{h \to 0} (1 - h)^{\frac{\tau}{h}} = e^{-\tau}$$

relație care arată că algoritmul converge, soluția exactă fiind

$$y(t) = e^{-t}.$$

Pentru stabilitate facem $t \to \infty \Rightarrow \tau = (i + 1)h \to \infty \Rightarrow i \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$$

$\lim_{i \to \infty} y_{i+1} = \lim_{i \to \infty} (1 - h)^{i+1} = 0$, dacă $| 1 - h | < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < 2$

Eroarea globală este

$$e_n = y(t_n) - y_n = e^{-t_n} - (1 - h)^n,$$

Dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea lui t_i este

$$y(t_{i+1}) = (1 - h) \cdot y(t_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi),$$

Metoda Euler se scrie

$$y_{i+1} = (1 - h) \cdot y_i,$$

de unde rezultă eroarea într-un pas

$$e_{i+1} = (1 - h) \cdot e_i + \frac{h^2}{2} \cdot e^{-(t_i + \theta \cdot h)},$$

majorată de

$$| e_{i+1} | < (1 + h) \cdot | e_i | + \frac{h^2}{2},$$

relație care scrisă succesiv pentru $i = 0, 1, \ldots$ este

$$| e_1 | \le \frac{h^2}{2},$$

$$| e_2 | \le (1 + h) \cdot | e_1 | + \frac{h^2}{2} < e^h \cdot | e_1 | + \frac{h^2}{2},$$

$$|e_3| \le (1 + h)|e_2| + \frac{h^2}{2} < e^h|e_2| + \frac{h^2}{2} < e^{2h}|e_1| + e^h \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}$$

$$| e_3 | < \frac{h^2}{2} (e^{2h} + e^h + 1) = \frac{e^{3h} - 1}{e^h - 1} \frac{h^2}{2} < (e^{3h} - 1) \frac{h}{2},$$

de unde deducem prin inducție că

$$| e_{i+1} | < (e^{(i+1) \cdot h} - 1) \cdot \frac{h}{2}.$$

Problema 2 Problema diferențială cu condiții inițiale

$$y(x_0) = y_0$$
$$y' = f(x, y)$$
se rezolvă printr-o metodă cu paşi separaţi.
a) determinaţi raza de stabilitate pentru o ecuaţie diferenţială liniară
$$f(x, y) = a \cdot y$$
b) pentru ecuaţia diferenţială $y' = ay, \quad a < 0$, calculaţi raza de stabilitate a metodei Runge-Kutta $RK_{11}, RK_{12}, RK_{22}$.

Soluţie. a) O metodă cu paşi separaţi, folosită pentru integrarea problemei diferenţiale cu condiţii iniţiale, este o relaţie de recurenţă de forma

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n, h)$, căreia îi corespunde ecuaţia caracteristică
$r^{n+1} = r^n + f(t_n, r^n, h)$

Raza de stabilitate h_0, pentru ecuaţia caracteristică , îndeplineşte, pentru $n \to \infty$, h fiind fixat, condiţiile
1) pentru $0 < h < h_0$, toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt în modul < 1.
2) pentru $\delta h_0 > 0$, cel puţin o rădăcină este , în modul > 1, pentru $h = h_0 + \delta h_0$
b) Pentru ecuaţia diferenţială liniară $y' = a \cdot y$, relaţia de recurenţă are forma $y_{n+1} = P(ha)\ y_n$, în care $P(x)$ este un polinom de grad s.
Ecuaţia caracteristică este $r^{n+1} = P(ha)r^n$ sau
$r^n(r - P(ha)) = 0$
şi are ca rădăcini pe $r = 0$ şi $r = P(ha)$.
Condiţia de stabilitate impune, pentru $n \to \infty$ ca $|\ P(ha)\ | < 1$.
Pentru ecuaţia de mai sus, metoda Runge-Kutta de ordin 1 şi rang q - R_{1q} are forma
$$y_{n+1} = \left[1 + ha + \sum_{k=2}^{q} c_k \cdot (h \cdot a)^k\right] y_n$$
Pentru $q = 1, \quad RK_{11}, \quad P(ha) = 1 + h \cdot a$.
Condiţia de stabilitate impune ca
$|\ 1 + ha\ | < 1 \Rightarrow -2 < ha < 0$, de unde rezultă raza de stabilitate $R = -\frac{2}{a}$ (posibil, întrucât $a < 0$).
Pentru $q = 2, \quad RK_{12}, \quad P(ha) = 1 + ha + c_2 \cdot (ha)^2$, iar condiţia de stabilitate impune
$$|\ 1 + ha + c_2(ha)^2\ | < 1$$
care se scrie
$$\begin{cases} 2 + ha + c_2(ha)^2 > 0 \\ ha \cdot (1 + c_2 ha) < 0 \end{cases}$$
şi ne conduce la
$$-\frac{2}{(ha)^2} - \frac{1}{ha} < c_2 < -\frac{1}{ha}$$
Pentru $q = 2,\ p = 2, \quad RK_{22}, \quad P(ha) = 1 + ha + \frac{(ha)^2}{2}$, care ne conduce la condiţiile de stabilitate
$$\begin{cases} 2 + ha + \frac{(ha)^2}{2} > 0 \\ ha \cdot \left(1 + \frac{ha}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad ha > -2 \end{cases}$$

Raza de stabilitate este deci $R = -\frac{2}{a}$

Problema 3 Pentru problema diferențială

$$y(t_0) = y_0$$
$$y' = f(y, t)$$

se consideră formula aproximativă de integrare

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (\alpha_1 y'_{i+1} + \alpha_0 y'_i) + h^2(\beta_1 y''_{i+1} + \beta_0 y''_i)$$

Determinați $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$, astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cel mai ridicat. Care este expresia erorii într-un pas.

Soluție. Impunem ca formula să fie exactă pentru $f(y, t) = 1, t, t^2, t^3$. Coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ sunt independenți de h şi t, deci putem alege, pentru simplificarea calculelor $h = 1, \quad t_i = 0$

Pentru $f(y, t) = 1$ obținem $t_{i+1} = t_i + h \cdot (\alpha_1 + \alpha_0)$ şi ecuația $\alpha_1 + \alpha_0 = 1$,

Valoarea $f(y, t) = t$ ne permite să scriem

$\frac{t_{i+1}^2}{2} = \frac{t_i^2}{2} + h(\alpha_1 t_{i+1} + \alpha_0 t_i) + h^2(\beta_1 + \beta_0)$ şi $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_0 = \frac{1}{2}$,

Luând $f(y, t) = t^2$ avem $\frac{t_{i+1}^3}{3} = \frac{t_i^3}{3} + h(\alpha_1 t_{i+1}^2 + \alpha_0 t_i^2) + 2 \cdot h^2(\beta_1 t_{i+1} + \beta_0 t_i)$ şi $\alpha_1 + 2 \cdot \beta_1 = \frac{1}{3}$,

Cu $(y, t) = t^3$ obținem f $\frac{t_{i+1}^4}{4} = \frac{t_i^4}{4} + h \cdot (\alpha_1 t_{i+1}^3 + \alpha_0 t_i^3) + 3 \cdot h^2 \cdot (\beta_1 t_{i+1}^2 + \beta_0 t_i^2)$ şi $\alpha_1 + 3 \cdot \beta_1 = \frac{1}{4}$.

Se obțin soluțiile $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_0 = \frac{1}{12}$, $\beta_1 = -\frac{1}{12}$.

care înlocuite în formula de integrare ne dau

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (y_{i+1}' + y_i') + \frac{h^2}{12} \cdot (-y_{i+1}'' + y_i'').$$

Formula este exactă pentru polinoame până la ordinul 4 inclusiv. Eroarea metodei este de ordinul 5.

Problema 4 Metoda explicită Adams de ordin r este

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=0}^{r} \beta_{rj} \cdot f_{i-j} \text{ sau}$$
$$\rho(E)\ y_{i-r} - h \cdot \sigma(E)\ f_{i-r} = 0 \text{ în care}$$
$$\rho(z) = z^r \cdot (z - 1)$$
$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{r} \beta_{rj} \cdot z^{r-j}$$

Calculați coeficienții formulei de integrare în cazul $r=2$

Soluție. Pentru $r=2$ ecuația Adams are forma

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \beta_2 f_{i-2})$$

Impunem condiția ca formula să fie exactă pentru

$$f = t^k, \quad k = 0 : 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{t^{k+1}}{k + 1}$$

Înlocuim în formula de integrare

$$\frac{t_{i+1}^{k+1} - t_i^{k+1}}{k+1} = h\left(\beta_0 t_i^k + \beta_1 t_{i-1}^k + \beta_2 t_{i-2}^k\right), \qquad k = 0 : 2$$

Întrucât formulele sunt independente de h şi t_i, vom lua, pentru a reduce volumul de calcule, fără a pierde din generalitate $h = 1$, $t_i = 0$ (prin urmare $t_{i-2} = -2$, $t_{i-1} = -1$, $t_{i+1} = 1$). Obținem sistemul de ecuații

$k = 0 :$ $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$

$k = 1 :$ $-\beta_1 - 2\beta_2 = \frac{1}{2}$

$k = 2 :$ $\beta_1 + 2^2\beta_2 = \frac{1}{3}$

Sistemul are soluția $\beta_0 = \frac{23}{12}$ $\beta_1 = -\frac{4}{3}$ $\beta_2 = \frac{5}{12}$

Problema 5 Se consideră ecuația recurentă

$$y(x+n) + a_{n-1}y(x+n-1) + \ldots + a_0 y(x) = b(x)$$

scrisă sub forma

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_0 I\right) y(x) = b(x)$$
$$P_n(E)\; y(x) = b(x)$$

Se defineşte ecuația caracteristică $P_n(r) = 0$

a) Să se arate că dacă ecuația caracteristică are rădăcini simple $r_1, r_2, \ldots, r_n$, soluția generală a ecuației recurente omogene are forma

$$y(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x + \ldots + C_n r_n^x$$

b) Să se arate că dacă polinomul caracteristic are rădăcina r_1 cu multiplicitatea k, atunci

$$y(x) = p_{k-1}(x) r_1^x + C_2 r_2^x + \ldots + C_{n-k} r_{n-k}^x$$

Soluție. a) Se caută $y(x)$ de forma $y(x) = r^x$

$$P_n(E)\; y(x) = r^{x+n} + a_{n-1} \cdot r^{x+n-1} + \ldots + a_0 \cdot r^x =$$
$$r^x\left(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_0\right)$$
$$P_n(E)\; r^x = r^x \cdot P_n(r) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_n(r) = 0$$

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rădăcinile, atunci

$y_1 = r_1^x,\ y_2 = r_2^x,\ \ldots,\ y_n = r_n^x,$ şi soluția ecuației omogene se exprimă ca

$$y(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x + \ldots + C_n r_n^x$$

b) $P_n(r) = (r - r_1)^k \cdot P_{n-k}(r)$.

Se ia $u(x) = v(x) \cdot r_1^x$ şi se obține

$$P_n(E)\; u(x) = P_n(E) v(x) r_1^x = \sum_{s=0}^{n} a_s\; E^s\; v(x) r_1^x = \sum_{s=0}^{n} r_1^{x+s} a_s v(x+s)$$

$$= r_1^x \sum_{s=0}^{n} a_s (r_1\; E)^s v(x) = r_1^x P_n(r_1\; E)\; v(x)$$

Folosim operatorul diferență progresivă (sau diferență înainte) $\Delta = E - I$, definit în capitolul 4

$$P_n(r_1\; E)\; v(x) = (E - I)^k P_{n-k}(r_1 E)\; v(x) = \left[\Delta^k\; P_{n-k}(r_1(I + \Delta))\right] v(x) = 0$$

$$\left[\Delta^k + \alpha_1 \Delta^{k-1} + \ldots + \alpha_{n-k}\Delta^n\right] v(x) = 0$$

Dacă alegem $v(x) = x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{r-1}$ atunci $\Delta^r\; v(x) = 0$.

Aşadar $y_2(x) = x r_1^x,\ \ldots,\ y_k(x) = x^{k-1} r_1^x$

Problema 6 Pentru integrarea ecuației diferențiale

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y' = f(x, y).$$
metoda de integrare (A, B) (sau (ρ, σ)) este
$$A(E)\ y_i - h \cdot B(E)\ f_i = 0,$$
unde $A(z) \in \Pi_p, \quad B(z) \in \Pi_q, \quad p \geq q.$

a) care sunt condițiile pentru ca această metodă să aibă ordinul k

b) Să se scrie condițiile de convergență, în funcție de $A(z)$ şi $B(z)$.

Soluție. Explicităm polinoamele
$$A(z) = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j z^j,\ B(z) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j z^j,\ p \geq q$$
Metoda de integrare este de ordinul k dacă
$$A(E)\ y(t) - hB(E)\ y'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j h^j y^{(j)}(t)$$
care se dezvoltă
$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j E^j y(t) - h \cdot \sum_{j=0}^{q} \beta_j E^j y'(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \ldots$$
$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t+h) + \ldots + \alpha_p y(t+ph) - h \cdot [\beta_0 y'(t) + \ldots + \beta_q y'(t+qh)] =$$
$$C_0 \cdot y(t) + C_1 \cdot h \cdot y'(t) + C_2 \cdot h^2 y''(t) + \ldots$$
Identificăm coeficienții cu aceeaşi putere, pentru $y(t) \in \Pi_j$. Pentru a reduce volumul de calcule, vom lua, fără a reduce generalitatea pasul $h = 1$ şi $t_0 = 0$. Obținem relațiile

$y(t) = 1 \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = C_0 = A(1),$

$y(t) = t \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + p\alpha_p - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_q) = C_1 = A'(1) - B(1)$

$y(t) = \frac{t^2}{2!} \quad \frac{1}{2!} \cdot (\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \ldots + p^2\alpha_p) - \frac{1}{1!} \cdot (\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + q\beta_q) = C_2$

. . .

$y(t) = \frac{t^j}{j!} \quad \frac{1}{j!}(\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + \ldots + p^j\alpha_p) - \frac{1}{(j-1)!}(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \ldots + q^{j-1}\beta_q) = C_j$

Metoda este de ordinul k dacă termenii din cele două dezvoltări coincid până la gradul k inclusiv, adică dacă
$$C_0 = A(1) = 0,$$
$$C_1 = A'(1) - B(1) = 0,$$
$$\ldots$$
$$C_k = 0\ ,$$
$$C_k \neq 0.$$
b) Pentru a fi convergentă, o metodă (A, B) trebuie să fie stabilă, ceea ce impune ca ecuația caracteristică $A(z) = 0$ să aibă rădăcinile z_i, în modul , subunitare, adică $|\ z_i \leq 1\ |$.

Metoda trebuie să fie, cel puțin de ordin 1, adică $C_0 = C_1 = 0$, care conduc la

Problema 7 Fie ecuația diferențială $y'' = f(t, y)$ şi metoda de integrare $A(E)\ y_i - h^2 \cdot B(E)\ f_i = 0$, cu $A(z) \in \Pi_p, \quad B(z) \in \Pi_q, \quad .p \geq q$ Arătați că

a) o condiție necesară de convergență este ca rădăcinile $A(z) = 0$ să fie $|\ z_i\ | < 1$, şi $|\ z_i\ | = 1$ să aibă multiplicitatea cel mult 2.

b) fie o metodă de integrare (A, B) stabilă şi convergentă. Să se arate că $A(1) = 0, \quad A''(1) = 2 \cdot B(1).$

Soluție. Procedăm ca în cazul problemei 6

$$A(E)\ y(t) - h^2 \cdot B(E)\ y''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \cdot h^j \cdot y^{(j)}(t)$$

Obținem relațiile

$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$,

$C_1 = \alpha 1 + 2\alpha_2 + \ldots + p\alpha_p$,

$C_j = \frac{1}{j!} \cdot \left(\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + \ldots + p^j\alpha_p\right) - \frac{1}{(j-2)!} \cdot \left(\beta_1 + 2^{j-2}\beta_2 + \ldots + q^{j-2}\beta_q\right)$.

Metoda este de ordin k dacă $C_j = 0,\ j = 0 : k + 1,\ C_{k+2} \neq 0$.

Metoda $(A,\ B)$ de ordin 2 este

$$A(E)\ y(t) - h^2B(E)\ y''(t) = C_3h^3y^{(3)}(t) + O\left(h^4\right)$$

pentru care

$$C_0 = A(1) \qquad A(1) = 0$$
$$C_1 = A'(1) \qquad A'(1) = 0$$
$$C_2 = \frac{A''(1)}{2} - B(1) \qquad A''(1) = 2B(1)$$

Problema 8 Determinați coeficienții metodei Adams-Bashforth, astfel încât aceasta să aibă gradul de valabilitate 4.

Soluție. Formula Adams-Bashforth este $y_p = y_{p-1} + h\sum_{i=0}^{q} \beta_i f_{p-i}$

Impunem ca formula să fie exactă pentru $y = 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ şi luăm, fără a pierde din generalitate $x_{k-r} = 0,\ \ldots,\ x_k = r$. Obținem

$y = 1, \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$,

$y = x, \quad f = 1 \quad \Rightarrow \quad r + 1 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$,

$y = x^2,\ f = 2x \Rightarrow (r+1)^2 = r^2 + 2\left(r\beta_0 + (r-1)\beta_1 + (r-2)\beta_2 + (r-3)\beta_3\right)$

$y = x^3,\ f = 3x^2 \Rightarrow (r+1)^3 = r^3 + 3\left(r^2\beta_0 + (r-1)^2\beta_1 + (r-2)^2\beta_2 + (r-3)^2\beta_3\right)$

$y = x^4,\ f = 4x^3 \Rightarrow (r+1)^4 = r^4 + 4\left(r^3\beta_0 + (r-1)^3\beta_1 + (r-2)^3\beta_2 + (r-3)^3\beta_3\right)$.

care ne conduc la sistemul

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = -\frac{1}{2} \\ \beta_1 + 2^2\beta_2 + 3^2\beta_3 = \frac{1}{3} \\ \beta_1 + 2^3\beta_2 + 3^3\beta_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

cu soluțiile

$$\beta_0 = \frac{55}{24}, \qquad \beta_1 = -\frac{53}{24}, \qquad \beta_2 = \frac{37}{24}, \qquad \beta_3 = -\frac{3}{8}.$$

Probleme propuse

Problema 1 Scrieți un algoritm pentru rezolvarea problemei diferențiale cu condiții inițiale, folosind metoda Euler-Cauchy.

Problema 2 Se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$y_1'(x) = f_1(x,\ y_1(x),\ y_2(x)), \qquad y_1(x_0) = \lambda_1,$$
$$y_2'(x) = f_2(x,\ y_1(x),\ y_2(x)), \qquad y_2(x_0) = \lambda_2.$$

Scrieți relațiile Runge-Kutta 44 corespunzătoare.

Problema 3 Considerăm problema diferențială cu condiții inițiale

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y' = f(x, y).$$

Notăm $y_i = y(x_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$.

Fie formula de integrare

$$y_{i+1} = y_i + \alpha_0 \cdot K_0 + \alpha_1 \cdot K_1,$$
$$K_0 = h \cdot f(x_i, y_i),$$
$$K_1 = h \cdot f(x_i + \lambda \cdot h, y_i + \lambda \cdot K_0).$$

a) Determinați α_0 și α_1 astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cât mai ridicat.

b) Calculați expresia erorii într-un pas

c) studiați cazurile particulare $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{2}{3}$.

Problema 4 Scrieți o funcție care implementează metoda predictor-corector folosind relațiile

$$y_{i+1}^p = y_{i-3} + \frac{4}{3} h\left(2f_{i-2} - f_{i-1} + f_i\right),$$
$$y_{i+1}^c = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^p\right).$$

Problema 5 Care este gradul de valabilitate al formulelor

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right),$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} \cdot \left(55 \cdot f_k - 59 \cdot f_{k-1} + 37 \cdot f_{k-2} - 9 \cdot f_{k-3}\right).$$

Problema 6 Pentru problema diferențială cu condiții inițiale

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_i) = y_i, \qquad i = 0 : q - 1, \qquad x_i = x_0 + \frac{a}{N} \cdot i. \end{cases}$$

se consideră formula de integrare explicită

$$y_p = y_{p-1} + h\sum_{i=1}^{q} \beta_i f_{p=i}\text{, unde } f_{p-i} = f(x_{p-i}, y_{p-i}).$$

Să se arate că impunând condițiile ca formula de integrare să aibă gradul de valabilitate r, se obțin restricțiile

$$\sum_{i=1}^{q-1} (q - i)^{k-1} \cdot \beta_i = \frac{q^k - (q - 1)^k}{k},$$
$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1, \qquad k = 2 : r.$$