## Interpolare.

Fie o funcţie reală $f : [a,b]\rightarrow R$, cunoscută numai într-un număr limitat de puncte numite *noduri*, (ansamblul acestora constituind *suportul interpolării*): $x_1, x_2, \dots, x_n$ prin valorile $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Vom aproxima comportarea funcţiei în afara acestor puncte printr-un *polinom generalizat de interpolare*, de forma:

$P_n(x)=a_1u_1(x)+a_2u_2(x)+\dots+a_nu_n(x)$

în care funcţiile liniar independente

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$

sunt cunoscute şi constituie *baza interpolării*.

Aceasta poate fi formată din funcţii simple: polinoame, funcţii trigonometrice, exponenţiale, etc.

Determinarea polinomului generalizat de interpolare (i.e. a coeficienţilor ) se face, impunând ca pe suportul interpolării polinomul de interpolare să coincidă cu funcţia f.

$P_n(x_i)=f(x_i),\ \ i=1:n$ *condiţii de interpolare*

Condiţiile de interpolare conduc la sistemul de ecuaţii liniare

$$\sum_{i=0}^{n} a_k \cdot u_k(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0 : n$$

$U.a=f$

$$U = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \cdots & & \ddots & \\ u_{n0} & u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

cu $u_{ij}=u_j(x_i),\ \ f_i=f(x_i)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k(x) = u^T a = u^T U^{-1} f = l^T f$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \cdot f(x_k)$$

$$l^T(x) = u^T(x) \cdot U^{-1} = \left[u_1(x) \ \ u_2(x) \ \ \dots \ \ u_n(x)\right] \cdot U^{-1} = \left[l_1(x)\ l_2(x) \dots l_n(x)\right]$$

$$l_k(x_i) = 0, \qquad i \neq k,$$
$$l_k(x_k) = 1.$$

Pentru baza polinomială $u_1(x)=1,\ u_2(x)=x, \dots, u_n(x)=x^{n-1}$

Funcţiile $l_k(x)$ sunt polinoame de grad $n-1$, cu rădăcinile $x_i,\ \ i=1:n,\ \ i\neq k$:

$$l_k(x) = C_k(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$$

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Polinomul de interpolare poartă în acest caz numele de *polinom de interpolare Lagrange* şi are forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Sistemul determinat de condiţiile de interpolare este

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x_i^k = f(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Acesta are determinant *Vandermonde*, care este nenul dacă punctele  sunt distincte, caz în care sistemul este compatibil determinat, cu soluţie unică, ceeace implică un polinom de interpolare unic.

```
function a=coefLagr(x,y)
% calcul coeficienti polinom Lagrange
x = x(:);
n = length(x); % grad polinom n-1
V = ones(n,n);
for j=2:n
   V(:,j) = V(:,j-1).* x;
end;
a = V \ y;
```

Alte forme ale polinomului de interpolare Lagrange

$$\pi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$\pi'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i) \quad \pi'(x_k) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$$

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$l_k(x) = \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{\pi(x)}{\pi'(x_k)}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\, \mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\, \pi'(\mathbf{x}_k)}$$

```
function b = Lagrange(a, x, y)
% valoare polinom Lagrange in a
%Intrări:
%  a = abscisa în care se cere polinomul
%  x = abscisele celor n+1 puncte
%  y = ordonatele celor n+1 puncte
%Ieşiri:valoare polinom interpolare în a
n = length(x); % numar puncte
 b = 0;
 for i = 1 : n
   prod = y(i);
   for j = 1 : n
     if i~=j
       prod=prod*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
     end;
   end;
   b = b + produs;
 end
```

Complexitatea metodei este $\mathbf{O(n^2)}$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 & 1 & \cdots & \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a} - \mathbf{x}_n & \mathbf{a} - \mathbf{x}_n & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 & 1 & \cdots & \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se observă că multiplicatorii Lagrange reprezintă raportul produselor pe coloane ale celor două matrice:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \cdots & \mathbf{l}_n \end{bmatrix} = \mathbf{prod}(\mathbf{V}) \cdot / \, \mathbf{prod}(\mathbf{U})$$

Valoarea polinomului Lagrange într-un punct de abscisă $\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{y}_i = \mathbf{prod}(\mathbf{V}) \cdot / \, \mathbf{prod}(\mathbf{U}) * \mathbf{y}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_n & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \mathbf{I}_n$$

```
U=diag(x)*ones(n)-ones(n)*diag(x)+eye(n)
```

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a} & \cdots & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & 0 & \cdots & \mathbf{a} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 & 0 & \cdots & \mathbf{x}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_n & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{I}_n$$

```
V=(a-diag(x))*~eye(n)+eye(n)
```

```
function b = Lagrange(a, x, y)
% valoare polinom Lagrange in a
n = length(x);
V=(a-diag(x))*~eye(n)+eye(n);
U=diag(x)*ones(n)-ones(n)*diag(x)+eye(n);
b=prod(V)./prod(U)*y;
```

```
function a = coefLagr(x, y)
%  Intrări:
%  x = tabloul absciselor celor n puncte
%  y = tabloul ordonatelor celor n puncte
%  Ieşiri:
%  a = coeficienti polinom Lagrange
a=zeros(n,1);
 z=zeros(n,1);
 % calcul coeficienţi c din (x-x(1))...(x-x(n))
 c=poly(x);
 for i = 1 : n
 % calcul coeficienţi b ai împărţirii
 % polinomului  prin x-x(i)
   [b,r]=deconv(c,[1 -x(i)]);
   % calcul  p=(x(i)-x(1))...(x(i)-x(i-1))(x(i)-x(i+1))(x(i)-x(n))
   z=x(i)-x;
   z(i)=1;
   p=prod(z);
```

```
   a(1:n)=a(1:n)+y(i)*b(1:n)/p;
 end
```

Polinomul de interpolare de grad  poate fi calculat prin recurenţă, folosind polinoame de interpolare de grad mai mic.
Dacă se notează $\sigma=\{i_1,i_2,\dots,i_p\}$ şi,$P_\sigma$ - polinomul de interpolare ce trece prin punctele $(x_{i1},y_{i1}),(x_{i2},y_{i2}),\dots,(x_{ip},y_{ip})$
atunci polinomul de interpolare definit pe ansamblul extins de puncte $\sigma+j+k= \sigma \cup \{j,k\}$

$$P_{\sigma+j+k}(x) = \frac{(x - x_j)P_{\sigma+k}(x) - (x - x_k)P_{\sigma+j}(x)}{x_k - x_j}$$

*Metoda Neville* are forma:

$$Q_{ij}(x) = \frac{(x - x_{i-j}) \cdot Q_{i,j-1}(x) - (x - x_i) \cdot Q_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$$

în care s-a notat $Q_{ij}=P_{i-j,\dots,i}$ polinomul de interpolare prin punctele $(x_{i-j},y_{i-j}),\dots,(x_i,y_i)$
Se porneşte cu polinoamele de interpolare de grad 0, reprezentate prin $y_1,y_2,\dots,y_n$, formându-se polinoamele de interpolare de grad `1, 2, ...`, ş.a.m.d.  conform tabloului

$x_1\ \ y_1\ =\ Q_{11}$
$x_2\ \ y_2\ =\ Q_{21}\ \ Q_{22}$
$x_3\ \ y_3\ =\ Q_{31}\ \ Q_{32}\ \ Q_{33}$

$x_n\ \ y_n\ =\ Q_{n1}\ \ Q_{n2}\ \ Q_{n3}\dots Q_{nn}$

```
function b = Neville (x, y, a)
% Intrări:
%  a = abscisa în care se calculează polinomul
%  x = tabloul absciselor celor n+1 puncte
%  y = tabloul ordonatelor celor n+1 puncte
% Ieşiri:
%  b = valoare polinom de interpolare
   n = length(x);
   q = y
   for  i = 1 : n
    for  j = 1 : n
      q(j)=((a-x(j-i))*q(j)-(a-x(j))*q(j-i))/(x(j)-x(j-i));
    end
   end
   b = q(n);
```

## Diferenţe divizate

$$F_0[x_0] = f(x_0)$$

$$F_1[x_0,x_1] = \frac{F_0[x_0] - F_0[x_1]}{x_0 - x_1}$$

$$F_p[x_0, \dots, x_p] = \frac{F_{p-1}[x_0, \dots, x_{p-1}] - F_{p-1}[x_1, \dots, x_p]}{x_0 - x_p}$$

$$F_p[x_0, \dots, x_p] = \sum_{k=0}^{p} \frac{f(x_k)}{\pi'(x_k)} = \sum_{k=0}^{p} \frac{f(x_k)}{\prod_{i=0}^{p} (x_k - x_i)}$$

$$F_1[x_1, x_1] = \lim_{x_0 \to x_1} F_1[x_0, x_1] = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(x_1),$$

$$F_{p-1}[\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{p}] = f^{(p-1)}(x_i)$$

```
function a = DifDiv(x, y)
%  Intrări:
%   x = abscisele celor n puncte
%   y = ordonatele celor n puncte
%  Ieşiri:
%   y =diferenţe divizate de ordin 1:n
    n = length(x);
    for k = 1 : n-1
       y(k+1:n)=(y(k+1:n)-y(k))./(x(k+1:n)-x(k));
    end
    a = y(:);
```

$$(x - x_0) \cdot F_1[x, x_0] = f(x) - f(x_0)$$

$$(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot F_2[x, x_0, x_1] = F_1[x, x_0] - F_1[x_0, x_1]$$

$$(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot F_3[x, x_0, x_1, x_2] = F_2[x, x_0, x_1] - F_2[x_0, x_1, x_2]$$

$$(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) F_{n+1}[x, x_0, \dots, x_n] = F_n[x, x_0, \dots, x_{n-1}] - F_n[x_0, x_1, x_n]$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot F_1[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot F_2[x_0, x_1, x_2] + \dots$$
$$+ (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \cdot F_n[x_0, \dots, x_n] + (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot F_{n+1}[x, x_0, \dots, x_n]$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \cdot F_{n+1}[x, x_0, \dots, x_n]$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_n(\mathbf{x})$ are **n+1** rădăcini

$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - \mathbf{P}'_n(\mathbf{x})$ are **n** rădăcini

$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_n^{(n)}(\mathbf{x})$ are o rădăcină

$$\mathbf{P}_n^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\,! \cdot \mathbf{F}_n[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$$

$$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}) - \mathbf{n}! \cdot \mathbf{F}_n[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = 0$$

$$\mathbf{F}_n[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \frac{\mathbf{f}^{(n)}(\xi)}{\mathbf{n}!} \quad \xi \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n]$$

$$\left|\mathbf{F}_n[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]\right| \le \frac{\left|\mathbf{f}^{(n)}(\xi)\right|}{\mathbf{n}!}$$

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ldots(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{F}_{n+1}[\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$$

$$\left|\mathbf{R}_n(\mathbf{x})\right| \le \left|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ldots(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\right| \cdot \frac{\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})}{(\mathbf{n}+1)!}$$

$$\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f}) = \left|\ \mathbf{f}^{(n+1)}(\xi)\ \right|$$

Dacă funcţia **f** este nedefinit derivabilă $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty$ atunci $\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})$ creşte foarte repede, deci majorarea este grosieră.

```
function b = Newton(a, x, y)
 % Intrări:
 % a = abscisa în care se calculează polinomul
 % x = tabloul absciselor celor n puncte
 % y = tabloul ordonatelor celor n puncte
% Ieşire:
% valoarea polinomului de interpolare în a
   n = length(x);
   a = DifDiv(x, y);
   b = a(n);
   for i = n-1:-1:1
       b = (a - x(i-1)).*b + a(i);
   end
```

### Diferenţe finite

Diferenţele finite sunt notaţii folosite în formulele de interpolare. Ele se aplică unor funcţii definite în puncte echidistante $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + i\mathbf{h}$,

- *diferenţe progresive* (sau *diferenţe înainte*)

$$\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

$$\Delta^k\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \Delta^{k-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \Delta^{k-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

- *diferenţe regresive* (sau *diferenţe înapoi*)

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_i - h) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\nabla^k f(x_i) = \nabla^{k-1} f(x_i) - \nabla^{k-1} f(x_{i-1})$$

- *diferenţe centrate*

$$\delta f(x_i) = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\delta^k f(x_i) = \delta^{k-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - \delta^{k-1} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Diferenţele finite pot fi exprimate prin intermediul operatorului de deplasare $Ef(x)=f(x+h)$ şi a operatorului identic $If(x)=f(x)$.

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = Ef(x_i) - If(x_i) = (E - I)f(x_i)$$

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}) = If(x_i) - E^{-1} f(x_i) = (I - E^{-1}) f(x_i)$$

$$\delta f(x_i) = f(x_{i+1/2}) - f(x_{i-1/2})$$
$$= E^{1/2} f(x_i) - E^{-1/2} f(x_i) = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x_i)$$

Pentru a trece de la diferenţele finite la diferenţe divizate se foloseşte relaţia

$$\Delta^n f(x_i) = \nabla^n f(x_{i+n}) = \delta^n f(x_{i+n/2}) = n!\, h^n F_n[x_i \ldots x_{i+n}]$$

## Formulele Newton - Gregory

Fie funcţia cunoscută prin tabelul

$x_0,\ x_1, \ldots, x_n$
$y_0,\ y_1, \ldots, y_n$

în care abscisele $x_i$ sunt echidistante şi suntem interesaţi în evaluarea funcţiei într-un punct intermediar $x \neq x_i$.
Vom considera, în mod simplificator că acest punct poate fi situat

- la începutul tabloului $x_0 < x < x_1$
- la sfârşitul tabloului $x_{n-1} < x < x_n$

Prima formulă Newton-Gregory realizează interpolare la început de tablou, adică consideră $x=x_0+uh$, cu $0<u<1$ .

$$F_k[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! \cdot h^k}$$

$$P_1(x) = P_1(x_0 + u \cdot h) = p_1(u) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1! \cdot h} \cdot \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{2! \cdot h^2} \cdot$$
$$\cdot \Delta^2 f(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n! \cdot h^n} \cdot \Delta^n f(x_0)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x_k} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - (\mathbf{x_k} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{kh} = (\mathbf{u} - \mathbf{k})\mathbf{h}$$

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_0 + \frac{\mathbf{u}}{1!} \cdot \Delta\mathbf{f}_0 + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - 1)}{2!} \cdot \Delta^2\mathbf{f}_0 + \ldots + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - 1)\ldots(\mathbf{u} - \mathbf{n} + 1)}{\mathbf{n}!} \cdot \Delta^{\mathbf{n}}\mathbf{f}_0$$

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_0 + \binom{\mathbf{u}}{1} \cdot \Delta\mathbf{f}_0 + \binom{\mathbf{u}}{2} \cdot \Delta^2\mathbf{f}_0 + \ldots + \binom{\mathbf{u}}{\mathbf{n}} \cdot \Delta^{\mathbf{n}}\mathbf{f}_0$$

unde $\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{k}}$ extinde notaţia combinărilor în cazul unui număr fracţionar **u**.
Formulele de interpolare Newton-Gregory 2 şi 3 se referă la interpolare la sfârşit de tablou şi se obţin exprimînd diferenţele divizate prin diferenţe regresive

$\mathbf{x=x_n-uh}$, $\mathbf{0<u<1}$

$$\mathbf{p}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_0 - \binom{\mathbf{u}}{1}\nabla\mathbf{f_n} + \binom{\mathbf{u}}{2}\nabla^2\mathbf{f_n} + \ldots + (-1)^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{n}}\nabla^{\mathbf{n}}\mathbf{f_n}$$

$\mathbf{x=x_n+uh}$, $\mathbf{-1<u<0}$

$$\mathbf{p}_3(\mathbf{u}) = \mathbf{f_n} + \binom{\mathbf{u}}{1} \cdot \nabla\mathbf{f_n} + \binom{\mathbf{u} + 1}{2} \cdot \nabla^2\mathbf{f_n} + \ldots + \binom{\mathbf{u} + \mathbf{n} - 1}{\mathbf{n}} \cdot \nabla^{\mathbf{n}}\mathbf{f_n}$$

Algoritmii de calcul ai polinomului de interpolare Lagrange prezintă proprietatea de instabilitate pentru un număr mai mare de puncte, datorită faptului că matricea Vandermonde este, în general, rău condiţionată.

## Interpolare cu functii spline în clasă $C^1$

Vom alege polinoame de interpolare de grad mic, valabile pe subintervale

$\mathbf{x_0 < x_1 < \ldots < x_n}$
$\mathbf{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)}$

Vom considera funcţii de interpolare liniare, locale pe subintervalele

$[\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}], [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}], \ldots, [\mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{x_n}]$

$\mathbf{p_i(x)=a_i x+b_i}$, $\mathbf{i=0:n-1}$

în care cei **2n** parametri se determină din *condiţiile de interpolare:*

$\mathbf{p_i(x_i)=f(x_i)}$, $\mathbf{i=0:n-1}$
$\mathbf{p_{n-1}(x_n)=f(x_n)}$

şi a *condiţiilor de racordare* (*continuitate* în punctele interioare):

$\mathbf{p_i(x_{i+1})=p_{i+1}(x_{i+1})}$, $\mathbf{i=0:n-2}$

*Interpolarea liniară* prezintă dezavantajul discontinuităţii derivatelor în punctele interioare.

$$\mathbf{a_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0 : n - 1$$

$$\mathbf{b_i} = \frac{x_{i+1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

Prin alegerea unor funcţii de interpolare de gradul 3 se poate realiza o interpolare Hermite, care presupune şi fixarea valorii derivatelor pe suportul interpolării

$f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$

O funcţie spline cubică se exprimă sub forma:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$

sau *parametric*

$S_i(t)=a_i+b_ih_it+c_ih_i^2t^2+d_ih_i^3t^3, \quad t\in[0,1]$

în care s-a notat $h_i=x_{i+1}-x_i$ şi s-a efectuat schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Baza *Bernstein* este: $(1-t)^3,\ 3t(1-t)^2,\ 3t^2(1-t),\ t^3$ cu $t \in[0,1]$ reduce volumul de calcule necesar determinării coeficienţilor.

$$s_i(t) = a'_i(1 - t)^3 + 3b'_it(1 - t)^2 + 3c'_it^2(1 - t) + d'_it^3$$

Avem $2n+2$ condiţii de interpolare de tip Hermite:

$s_i(x_i)=f(x_i)$
$s'_i(x_i)=f'(x_i),\ i=0:n$

şi $2n-2$ condiţii de racordare (continuitate şi derivabilitate în punctele interioare):

$s_i(x_{i+1})=s_{i+1}(x_{i+1})$
$s'_i(x_{i+1})=s'_{i+1}(x_{i+1}),\ i=0:n-2$

$$a'_i = f(x_i) \qquad b'_i = f(x_i) + \frac{h_i}{3}f'(x_i)$$

$$d'_i = f(x_{i+1}) \qquad c'_i = f(x_{i+1}) - \frac{h_i}{3}f'(x_{i+1})$$

$$s_i(t) = y_i(1 - t)^3 + (3y_i + h_iy'_i)t(1 - t)^2 + (3y_{i+1} - hy'_{i+1})t^2(1 - t) + y_{i+1}t^3$$

Eroarea interpolării pentru funcţiile spline în clasă $C^1$ este:

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi)$$

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)^2}{4!}f^{(4)}(\xi) = \frac{t^2(1 - t)^2h^4f^{(4)}(\xi)}{24}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \le \frac{(1/2)^2(1/2)^2\mathbf{h}^4\mathbf{f}^{(4)}(\xi)}{24} = \frac{\mathbf{M}_4\mathbf{h}^4}{384}$$

## Funcţii spline în clasă $C^2$

Considerăm numai **n+1** condiţii de interpolare de tip Lagrange:

$s_i(x_i)=f(x_i)$, $i=0:n-1$
$s_{n-1}(x_n)=f(x_n)$

rezultă:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{i} = 0 : \mathbf{n}$$

$a_i=f(x_i)$, $i=0:n-1$

$$\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{c}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}^2 + \mathbf{d}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}^3$$

$$\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{c}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}^2 + \mathbf{d}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}^3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \mathbf{a}_n$$

Dispunem de mai multe grade de libertate pentru condiţiile de racordare: continuitatea valorilor şi a derivatelor de ordinul 1 şi 2 în punctele interioare

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{s}_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1})$$

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i\mathbf{h}_i + \mathbf{c}_i\mathbf{h}_i^2 + \mathbf{d}_i\mathbf{h}_i^3 \qquad i=0 : n-1$$

$$\mathbf{s}'_i(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_i + 2\mathbf{c}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + 3\mathbf{d}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2$$

$$\mathbf{s}'_i(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{s}'_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}) \quad , i= 0 : n-2$$

$$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{b}_i + 2\mathbf{c}_i\mathbf{h}_i + 3\mathbf{d}_i\mathbf{h}_i^2$$

pe care o prelungim cu **i=0:n-1**, introducând notaţia

$$\mathbf{b}_n \equiv \mathbf{b}_{n-1} + 2\mathbf{c}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1} + 3\mathbf{d}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}^2$$

$$\mathbf{s}''_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{c}_i + 6\mathbf{d}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \text{ cu } i=0:n-2$$

$$\mathbf{c}_{i+1} = \mathbf{c}_i + 3\mathbf{d}_i\mathbf{h}_i$$
$$\mathbf{c}_n \equiv \mathbf{c}_{n-1} + 3\mathbf{d}_{n-1}\mathbf{h}_{n-1}$$

s-au obţinut astfel **4n-2** relaţii, mai putem impune 2 condiţii suplimentare

$$\mathbf{S}''_0(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad \mathbf{S}''_{n-1}(\mathbf{x}_n) = 0$$

care definesc *funcţiile spline naturale* şi

$$\mathbf{S}'_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{S}'_{n-1}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$$

pentru *funcţii spline tensionate*

$$a_i = f(x_i), \qquad i = 0 : n-1$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \qquad i = 0 : n-1$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{c_{i-1} + 2c_i}{3} h_{i-1}, \quad i = 1 : n-1$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = \frac{3 \cdot (a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3 \cdot (a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = \frac{3 \cdot (a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3 \cdot (a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$S_0''(x_0) = 2 \cdot c_0 + 6d_0 \cdot (x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 2 \cdot c_{n-1} + 6 \cdot d_{n-1} \cdot h_{n-1} \equiv 2 \cdot c_n = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & 0 & 0 & h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \dfrac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \dots \\ \dfrac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_0'(x_0) = b_0 + 2c_0(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 = b_0 = f'(x_0)$$

$$b_0 = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = f'(x_0)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = 3f'(x_0) - \frac{a_1 - a_0}{h_0}$$

$$S_{n-1}'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = b_n = f'(x_n)$$

$$b_n = f'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + (c_n - c_{n-1})h_{n-1} =$$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}c_{n-1} + h_{n-1}c_n,$$

$$\mathbf{h}_{n-1}\mathbf{c}_{n-1} + 2\mathbf{h}_{n-1}\mathbf{c}_n = 3\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n) - \frac{3}{\mathbf{h}_{n-1}}(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{h}_0 & 2(\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1) & \mathbf{h}_1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \ddots & \\ & & \mathbf{h}_{n-2} & 2(\mathbf{h}_{n-2} + \mathbf{h}_{n-1}) & \mathbf{h}_{n-1} \\ & & 0 & \mathbf{h}_{n-1} & 2\mathbf{h}_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{c}_{n-1} \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{g}_{n-1} \\ \mathbf{g}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{g}_{n-1} \\ \mathbf{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)}{\mathbf{h}_0} - 3\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \\ \frac{3(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)}{\mathbf{h}_1} - \frac{3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)}{\mathbf{h}_0} \\ \cdots \\ \frac{3(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})}{\mathbf{h}_{n-1}} - \frac{3(\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_{n-2})}{\mathbf{h}_{n-2}} \\ 3\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n) - \frac{3(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})}{\mathbf{h}_{n-1}} \end{bmatrix}$$