

Tema 5

Exercițiul 1. Determinați toate structurile neizomorfe de monoid pe mulțimea $\{0, 1\}$.

Exercițiul 2. Fie (M, \cdot, e) un monoid.

1. Pentru $X, Y \subseteq M$, notăm $X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$. Arătați că $\mathcal{P}(M)$ devine un monoid în raport cu această operație. Cine este elementul neutru? Există zero (element absorbant)?
2. Dacă $f : (M, \cdot_M, e_M) \rightarrow (N, \cdot_N, e_N)$ este un morfism de monoizi, atunci și funcția $f_* : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(N)$, $f_*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este un morfism de monoizi (în raport cu operația definită anterior).

Exercițiul 3. 1. Fie $(M, \cdot_M, e_M), (N, \cdot_N, e_N)$ monoizi și $f : M \rightarrow N$ o funcție astfel încât $f(x \cdot_M y) = f(x) \cdot_N f(y), \forall x, y \in M$. Este f morfism de monoizi? Argumentați sau dați un contraexemplu în caz negativ.

2. Dacă $f : M \rightarrow N$ este un izomorfism de monoizi, atunci f^{-1} este morfism de monoizi.

Exercițiul 4. Fie A un alfabet și $\alpha, \beta \in A^*$ astfel încât $\alpha\beta = \beta\alpha$. Atunci există un string $\gamma \in A^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \gamma^m, \beta = \gamma^n$.

Exercițiul 5. Fie $f : (\{a, b\}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ unicul morfism de monoizi pentru care $f(a) = 1, f(b) = -1$. Determinați $f^{-1}(\{0\})$.

Exercițiul 6. 1. Fie $L_1, L_2, L_3 \subseteq A^*$. Atunci $(L_1 \cap L_2)L_3 \subseteq L_1L_3 \cap L_2L_3$. Dați un exemplu din care să rezulte că incluziunea poate fi strictă.

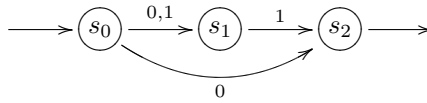
2. Dacă $L \subseteq A^*$, este adevărat că $(L^*)L = L^*$?

Exercițiul 7. Arătați că următoarele limbaje peste alfabetul $\{a, b\}$ sunt raționale (un limbaj se numește rațional dacă este acceptat de un automat finit):

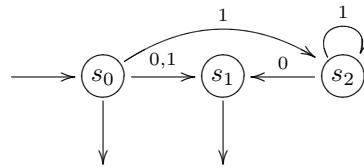
1. $\{a^n \mid n \geq 1\}$.
2. $\{\alpha \in A^* \mid |\alpha| \text{ e un număr par}\}$.
3. $\{\epsilon, a, b, ab, ab^2, \dots, ab^n, \dots\}$.
4. $\{\alpha \in A^* \mid |\alpha|_a \text{ e un număr impar}\}$.

Exercițiul 8. Determinați limbajul acceptat de fiecare dintre următoarele automate:

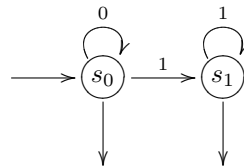
1.



2.



3.



Exercițiul 9. Construiți un automat determinist echivalent cu automatul nedeterminist de la exercițiul precedent, pct. 1. Aceeași cerință pentru automatul de la pct. 2.