Tema 4

Exercițiul 1. *Matricea asociată unei relații este* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Este relația respectivă o relație de echivalență? Argumentați.*

Exercițiul 2. *Pe mulțimea numerelor reale considerăm relația:* $xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$. *Arătați că este o relație de echivalență și că există o bijecție între mulțimea factor și intervalul* $[0, 1)$.

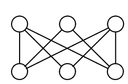
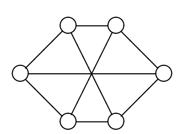
Exercițiul 3. *Fie* $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}^*, \quad x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ *mulțimea șirurilor binare de lungime finită. Spunem că două șiruri* $(x_1, \ldots, x_n)$ *și* $(y_1, \ldots, y_m)$ *sunt echivalente dacă sunt egale (deci dacă* $n = m$ *și* $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$*) sau* $n, m \geq 3$ *și primele trei caractere coincid:* $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\quad x_3 = y_3$. *Scrieți clasele de echivalență pentru această relație.*

Exercițiul 4. *Fie* $G = (N, A, s, t : A \longrightarrow N)$ *un graf orientat finit astfel încât* $\forall v, w \in N$ *există un arc* $a \in A$ *cu* $s(a) = v, t(a) = w$ *sau* $s(a) = w, t(a) = v$. *Arătați că se poate construi un drum ce trece prin fiecare vârf o singură dată.*

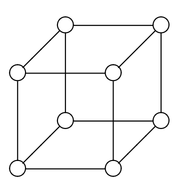
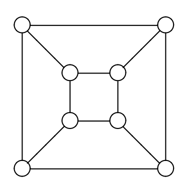
Exercițiul 5. *Arătați că orice graf neorientat finit conține un număr par de noduri impare.*

Exercițiul 6. *Pentru fiecare dintre cazurile de mai jos, decideți dacă grafurile* G_1 *și* G_2 *sunt izomorfe; motivați răspunsul.*

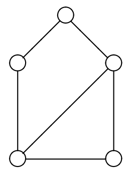
1.

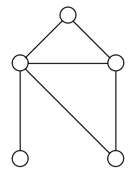
$G_1 =$  $G_2 =$ 

2.

$G_1 =$  $G_2 =$ 

3.

$G_1 =$ 

$G_2 =$ 

Exerciţiul 7. *Un graf eulerian este un graf neorientat pentru care există un drum ce trece exact o dată prin fiecare muchie a sa. Arătaţi că un graf finit conex în care toate nodurile sunt pare este un graf eulerian.*

Exerciţiul 8. *Câte operaţii binare pot fi construite pe o mulţime cu n elemente? Câte dintre acestea sunt comutative? Dar câte operaţii binare admit element neutru?*

Exerciţiul 9. *Fie* $(M, \cdot, e)$ *un monoid finit. Arătaţi că un element* $a \in M$ *este inversabil la stânga dacă şi numai dacă funcţia* $f_a : M \longrightarrow M, f_a(x) = ax$ *este injectivă. Rămâne această afirmaţie valabilă şi pentru* M *infinit?*

Exerciţiul 10. *Fie* $A = \{a, b\}$.

1. *Arătaţi că* $(\mathcal{P}(A), \cup)$ *şi* $(\mathcal{P}(A), \cap)$ *sunt monoizi, dar nu sunt grupuri.*
2. $(\mathcal{P}(A), \cup)$ *şi* $(\mathcal{P}(A), \cap)$ *sunt izomorfe ca monoizi? Argumentaţi.*