Tema 2

Exercițiul 1. *Explicați de ce fiecare dintre următoarele corespondențe nu definește o funcție $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \cos x + i \sin x$

Exercițiul 2. *Decideți care dintre următoarele expresii definește o funcție $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

1. $f(n) = \pm n$
2. $f(n) = n$
3. $f(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = \sqrt{|n|}$
5. $f(n) = \frac{1}{n^2 - 4}$
6. $f(n) = \frac{1}{n^2 + 4}$

Exercițiul 3. *Datele stocate în memoria unui calculator sunt reprezentate sub forma unor șiruri de octeți (bytes). De câți octeți este nevoie pentru 100 de biți de informație?*

Exercițiul 4. *Arătați că pentru orice număr real x are loc relația $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.*

Exercițiul 5. *Este adevărat că $[x] + [y] = [x + y]$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$?*

Exercițiul 6. *Fie funcția $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, unde $x \in A \subseteq \mathbb{R}$. Determinați domeniul maxim de definiție al funcției f. Cine este imaginea funcției?*

Exercițiul 7. *Fie M o mulțime. Pentru fiecare $A \subseteq M$, considerăm $\chi_A : M \longrightarrow \{0, 1\}$ funcția caracteristică asociată. Atunci au loc următoarele relații:*

1. $\chi_A^2 = \chi_A$, $\forall A \subseteq M$.
2. $\chi_\emptyset = 0$.
3. $\chi_M = 1$.
4. $A = B \iff \chi_A = \chi_B$, $\forall A, B \subseteq M$.
5. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$, $\forall A, B \subseteq M$.
6. *Dacă* $A \cap B = \emptyset$, *atunci* $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$.

7. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$, $\forall A, B \subseteq M$.

8. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$, $\forall A \subseteq M$.

9. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$, $\forall A, B \subseteq M$.

10. $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$, $\forall A, B \subseteq M$.

Exercițiul 8. *Funcția $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$ este funcția caracteristică a unei submulțimi a mulțimii numerelor întregi. Determinați acestă submulțime.*

Exercițiul 9. *Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție. Când are sens $f \circ f$?*

Exercițiul 10. *Arătați că orice funcție $f : A \longrightarrow B$ se poate descompune sub forma $f = g \circ h$, unde g este o funcție injectivă și h este o funcție surjectivă.*

Exercițiul 11. *Dați un exemplu de funcție de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$ care:*

1. *Este injectivă, dar nu este surjectivă.*
2. *Este surjectivă, dar nu este injectivă.*
3. *Este injectivă și surjectivă (dar diferită de funcția identitate $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$).*
4. *Nu este nici injectivă, nici surjectivă.*

Exercițiul 12. *Determinați care dintre următoarele funcții $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este surjectivă:*

1. $f(m, n) = 2mn$.
2. $f(m, n) = m^2n^2$.
3. $f(m, n) = m + n + 1$.
4. $f(m, n) = |m| - |n|$.
5. $f(m, n) = m^2 - 4$.
6. $f(m, n) = m + n$.
7. $f(m, n) = m^2 + n^2$.
8. $f(m, n) = m$.
9. $f(m, n) = |n|$.
10. $f(m, n) = m - n$.

Exercițiul 13. *Determinați care dintre următoarele funcții $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt bijective:*

1. $f(x) = -3x + 4$.
2. $f(x) = -3x^2 + 7$.
3. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
4. $f(x) = x^5 + 1$.

Exercițiul 14. *Fie $f : A \longrightarrow B$ și $g : B \longrightarrow C$ două funcții. Arătați că:*

1. *Dacă f și g sunt injective, atunci și $g \circ f$ este injectivă.*
2. *Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă. Dați un exemplu în care $g \circ f$ este injectivă, dar g nu este.*

3. *Dacă f şi g sunt surjective, atunci şi $g \circ f$ este surjectivă.*

4. *Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă. Daţi un exemplu în care $g \circ f$ este surjectivă, dar f nu este.*

5. *Dacă f şi g sunt bijective, atunci şi $g \circ f$ este bijectivă.*

6. *Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă şi g este surjectivă. Daţi un exemplu în care $g \circ f$ este bijectivă, dar f şi g nu sunt.*

Exerciţiul 15. *Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,*

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

este bijectivă.

Exerciţiul 16. *Daţi un exemplu de funcţie surjectivă care admite două inverse la dreapta.*

Exerciţiul 17. *Fie $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 3n$, $g(n) = 3n+1$, $h(n) = 3n+2$. Construiţi o inversă la stânga comună pentru cele trei funcţii.*

Exerciţiul 18. *Scrieţi toate funcţiile parţiale $\{x, y, z\} \longrightarrow \{1, 2\}$.*

Exerciţiul 19. *Determinaţi reuniunea şi intersecţia următoarelor multiseturi:*

1. $A = \{x, y\}$, $B = \{x, y, z\}$
2. $A = \{x, y, x\}$, $B = \{y, x, y, x\}$
3. $A = \{a, a, a, b\}$, $B = \{a, a, b, b, c\}$
4. $A = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 4\}$, $B = \{2, 3, 3, 4, 5\}$
5. $A = \{x, x, \{a, a\}, \{a, a\}\}$, $B = \{a, a, x, x\}$
6. $A = \{a, a, \{b, b\}\}$, $B = \{a\}$

Exerciţiul 20. *Determinaţi un multiset A care verifică simultan următoarele relaţii:*

$$\begin{aligned} A \cup \{2, 2, 3, 4\} &= \{2, 2, 3, 3, 4, 4, 5\} \\ A \cap \{2, 2, 3, 4, 5\} &= \{2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Exerciţiul 21. *De citit pag. 338-344 din articolul lui L. Zadeh,* Fuzzy sets, *disponibil la adresa* `http://www-bisc.cs.berkeley.edu/Zadeh-1965.pdf`.