Tema 1

Exercițiul 1. *Scrieți elementele următoarelor mulțimi:*

1. *Mulțimea literelor din cuvântul* matematician.
2. *Mulțimea numerelor prime mai mici decât 20.*
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$

Exercițiul 2. *Puneți sub forma* $\{x \mid x \textit{ are proprietatea } P\}$ *fiecare dintre următoarele mulțimi:*

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$.
3. $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 1024\}$.
4. *Mulțimea vidă.*

Exercițiul 3. *Descrieți fiecare din mulțimile de mai jos prin enumerarea elementelor sale:*

1. $\{x \mid x \textit{ este o vocală}\}$.
2. $\{3k + 1 \mid k \textit{ este un întreg impar cuprins între } 1 \textit{ și } 10\}$.
3. $\{x \mid x \textit{ este număr prim par }\}$.
4. $\{x \mid x \textit{ este numele unei luni ce se termină cu litera "e" }\}$.

Exercițiul 4. *Fie* $A = \{a, \emptyset\}$. *Care dintre următoarele afirmații este adevărată?*

1. $a \in A$.
2. $\{a\} \in A$.
3. $a \subseteq A$.
4. $\{a\} \subseteq A$.
5. $\emptyset \in A$.
6. $\emptyset \subseteq A$.
7. $\{\emptyset\} \in A$.
8. $\{\emptyset\} \subseteq A$.

Exercițiul 5. *Scrieți toate submulțimile mulțimii* $\{x, y, z\}$ *și relațiile de incluziune între acestea.*

Exercițiul 6. *Determinați mulțimea părților asociată fiecărei dintre următoarele mulțimi:*

1. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
2. $\{x, y, z, w\}$.
3. $\{x, \{x, y\}\}$.
4. $\{\{a\}, \emptyset\}$.
5. $\{a, \{\emptyset\}\}$

Exerciţiul 7. *Fiecare dintre mulţimile de mai jos conţine la rândul său alte mulţimi. Determinaţi cea mai mică mulţime posibilă A pentru care mulţimea dată este inclusă în mulţimea părţilor $\mathcal{P}(A)$:*

1. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$.
2. $\{\{a\}, \{\emptyset\}\}$.
3. $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$.
4. $\{\{a\}, \{\{b\}\}, \{a, b\}\}$.

Exerciţiul 8. *Definim diferenţa a două mulţimi $A, B \subseteq M$ prin $A \setminus B = \{x \in M \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$. Arătaţi că au loc următoarele identităţi:*

1. $A \setminus B = A \cap B^c$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4. $A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B = A \setminus B = B^c \setminus A^c$
5. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cap B$
6. $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$
7. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
8. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
9. $A \setminus A = \emptyset$
10. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
11. $A \setminus \emptyset = A$

pentru orice $A, B, C \subseteq M$.

Exerciţiul 9. *Diferenţa simetrică a două mulţimi se defineşte prin $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Arătaţi că următoarele identităţi sunt adevărate:*

1. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
2. $A \Delta B = B \Delta A$
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta A = \emptyset$
5. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
6. $A = B \iff A \Delta B = \emptyset$

pentru orice $A, B, C \subseteq M$.

Exerciţiul 10. *Fie $A, B \subseteq M$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

1. $B = A^c$
2. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = M$

Exercițiul 11. *Fie A, B două mulțimi. Atunci următoarele relații sunt echivalente:*

1. $A \subseteq B$
2. $B^c \subseteq A^c$
3. $A \cap B = A$
4. $A \cup B = B$
5. $A \setminus B = \emptyset$

Exercițiul 12. *Scrieți $A \cup B \cup C$ ca reuniune a 7 mulțimi disjuncte două câte două.*

Exercițiul 13. *Arătați că:*

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
2. $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$

Exercițiul 14. *Arătați că $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ pentru orice mulțimi A, B. Rămâne valabil și pentru reuniune $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?*

Exercițiul 15. *Pentru fiecare k număr întreg, fie A_k mulțimea $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $|x| > k\}$, pentru k impar, respectiv $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-k < x < k\}$ pentru k par.*

1. *Determinați mulțimile A_0, A_1, A_2, A_3, A_{-2}, și A_{-3}.*
2. *Aflați reuniunea mulțimilor A_1, A_3, A_5, A_7, A_9.*
3. *Aflați reuniunea mulțimilor $(A_k)_{k \text{ impar}}$.*
4. *Aflați reuniunea mulțimilor $(A_k)_{k \text{ par}}$.*
5. *Aflați reuniunea tuturor mulțimilor $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.*
6. *Determinați intersecția mulțimilor A_1, A_3, A_5, A_7, A_9.*
7. *Determinați intersecția mulțimilor $(A_k)_{k \text{ impar}}$.*
8. *Determinați intersecția mulțimilor $(A_k)_{k \text{ par}}$.*
9. *Determinați intersecția tuturor mulțimilor $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.*

Exercițiul 16. *Fie A, B două mulțimi. Atunci $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.*

Exercițiul 17. *Arătați că:*

1. $A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B$
2. $A_1 \subseteq A_2$ *și* $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
5. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
6. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ *(Arătaţi că incluziunea inversă nu are loc în general).*