Mulțimi

1. Descrieți un algoritm pentru listarea tuturor submulțimilor unei mulțimi finite.

2. Determinați mulțimea $\{(x,y)\in k \mid x^2+y^2=0\}$, unde:

a) $k=\mathbb{R}$ c) $k=\mathbb{Z}_3$

b) $k=\mathbb{C}$ d) $k=\mathbb{Z}_5$

3. Găsiți două mulțimi A și B astfel încât $A\in B$ și $A\subseteq B$.

4. Fie A și B două mulțimi astfel încât $\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$. Rezultă de aici că $A=B$?

5. Fie A și B două mulțimi. Arătați că:

a) $A\cap(A\cup B)=A$

b) $A\cup(B-A)=A\cup B$

c) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$

6. Fie A și B două mulțimi, astfel încât $A-B=B-A$. Rezultă de aici că $A=B$?

7. Fie $A_0=\{a\in\mathbb{R} \mid a<1\}$ și $A_n=\{a\in\mathbb{R} \mid a\leq 1-\frac{1}{n}\}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Arătați că $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots=A_0$

Funcţii

1. Fie funcţiile $f, g : \{1, 2, \ldots, 1000\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 1000\}$, unde $f(n)$ = numărul întregilor de forma 2^k mai mici sau egali cu n, şi

$g(n) = [100 \log_2 n]$. Calculaţi:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$

2. Fie funcţiile $f : A \longrightarrow B$ şi $g : B \longrightarrow C$. Care din afirmaţiile de mai jos este adevărată?

a) $g \circ f$ este injectivă dacă şi numai dacă g şi f sunt injective.

b) $g \circ f$ este surjectivă dacă şi numai dacă g şi f sunt surjective.

3. Care dintre expresiile de mai jos reprezintă o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = ix$

e) $f(x) = |x|$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

4. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie şi $X_1, X_2 \subseteq A$. Atunci:

$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$, dar $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

5. Arătaţi că orice funcţie $f : A \longrightarrow B$ se poate descompune sub forma $f = g \circ h$, unde g este injectivă şi h surjectivă. Dar o descompunere $f = g \circ h$ cu g surjectivă şi h injectivă, este posibilă?

6. Fie A o mulţime cu m elemente şi B o mulţime cu n elemente. Determinaţi numărul funcţiilor $A \longrightarrow B$ care sunt:

a) injective b) bijective c) oricare d) constante.

Metode de demonstrație

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $\max(x,y)+\min(x,y) = x+y$

2. Arătați că $2 \cdot 10^{500}+15$ sau $2 \cdot 10^{500}+16$ nu este un pătrat perfect. Este o demonstrație constructivă sau nu?

3. Arătați că ecuația $2x^2+5y^2=14$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

4. Arătați că mulțimea numerelor prime este infinită.

5. Arătați prin inducție că $n<2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

6. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați prin inducție că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & \text{[illegible]} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați A^n pentru următoarele matrici:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

7. Considerăm șirul $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că: $x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1} = x_{2n}$, $n \geq 1$

b) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $A^n = \begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 2$.