Curs 4

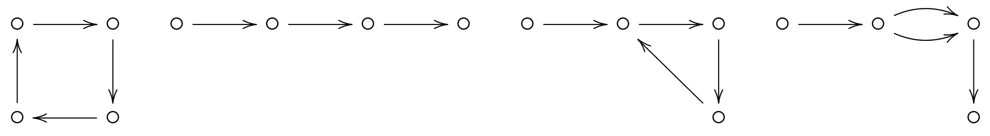
I.4 Grafuri

I.4.1 Grafuri orientate

Definiţia I.4.1.1. *Un* graf orientat *este un tuplu* $\overrightarrow{G} = (N, A, \varphi : A \longrightarrow N \times N)$*, unde* N *şi* A *sunt mulţimi, numite mulţimea nodurilor, respectiv mulţimea arcelor, iar* φ *este o funcţie care asociază fiecărui arc* $a \in A$ *o pereche ordonată de noduri* $\varphi(a) = (p, q)$*, numite extremităţile arcului* a*. În acest caz, vom nota* $p \xrightarrow{a} q$ *şi spunem că* a *este un arc de la nodul* p *la nodul* q*.*

Un arc pentru care extremităţile coincid se va numi buclă sau ciclu. Un graf simplu este un graf fără bucle pentru care există cel mult un arc între oricare două noduri (în particular, φ este injectivă).

Exemplul I.4.1.2. *Dintre grafurile orientate cu patru noduri reprezentate mai jos, doar primele trei sunt simple:*



Definiţia I.4.1.3. *Spunem că două grafuri orientate* $\overrightarrow{G} = (N, A, \varphi)$ *şi* $\overrightarrow{G'} = (N', A', \varphi')$ *sunt* izomorfe *dacă există două funcţii bijective* $f : N \longrightarrow N'$, $g : A \longrightarrow A'$ *astfel încât între nodurile* $p, q \in N$ *din graful* $\overrightarrow{G}$ *există un arc* $p \xrightarrow{a} q$ *dacă şi numai dacă există arcul* $f(p) \xrightarrow{g(a)} f(q)$ *în* $\overrightarrow{G'}$*.*

Cu alte cuvinte, diagrama de mai jos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \times N \arrow[d, "f\times f"] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \times N' \end{tikzcd}$$

comută, adică $\varphi' g(a) = (f \times f)\varphi(a)$ pentru orice $a \in A$.

În particular, două grafuri orientate finite (cu număr finit de noduri şi arce) izomorfe au acelaşi număr de noduri (respectiv arce). Însă reciproca este falsă. Pentru a putea da un contraexemplu, introducem mai întâi noţiunea de grad (intern/extern) pentru un graf orientat finit:

(i) Gradul intern al unui nod $p \in N$ este numărul arcelor care intră în p, $grd_+(p) = |\{a \in A \mid \varphi(a) = (q,p),\ \text{unde } q \in N\}|$;

(ii) Gradul extern al unui nod $p \in N$ este numărul arcelor care ies din p, $grd_-(p) = |\{a \in A \mid \varphi(a) = (p,q),\ \text{unde } q \in N\}|$

Este uşor de văzut că dacă două grafuri sunt izomorfe, atunci nodurile corespunzătoare vor avea acelaşi grad intern, respectiv extern.
Să considerăm acum următoarele grafuri:

$$\begin{tikzcd} \overrightarrow{G}: & \circ^1 \arrow[r] & \circ^2 \arrow[r] \arrow[dr] & \circ^3 \arrow[r] & \circ^4 \arrow[r] & \circ^5 \\ & & & \circ^6 \arrow[r] & \circ^7 \arrow[r] & \circ^8 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \overrightarrow{G'}: & \circ^1 \arrow[r] & \circ^2 \arrow[r] & \circ^4 \arrow[r] & \circ^5 \arrow[r] & \circ^6 \arrow[r] & \circ^7 \arrow[r] & \circ^8 \\ & \circ^3 \arrow[ur] & & & & & & \end{tikzcd}$$

Se vede imediat că cele două grafuri au acelaşi număr de noduri şi de arce. În tabelele de mai jos avem situaţia gradelor interne şi externe ale nodurilor din fiecare graf:

$\overrightarrow{G}$:

nod	grd_+	gr_d-
1	0	1
2	1	2
3,4,6,7	1	1
5,8	1	0

$\overrightarrow{G'}$:

nod	grd_+	grd_-
1,3	0	1
2	2	1
4,5,6,7	1	1
8	1	0

Cum în primul graf apare un nod cu gradul extern 2 iar în al doilea graf nu există un asemenea nod, rezultă că cele două grafuri sunt neizomorfe, deşi au acelaşi număr de noduri şi de arce.

Exerciţiul I.4.1.4. *Arătaţi că în orice graf orientat finit are loc relaţia*

$$\sum_{p \in N} grad_+(p) = \sum_{p \in N} grad_-(p) = |A|$$

I.4.2 Grafuri orientate şi relaţii

Fie $\overrightarrow{G} = (N, A, \varphi)$ un graf orientat. Acestuia îi putem asocia o relaţie binară pe mulţimea nodurilor N, prin

$$pR_{\overrightarrow{G}}q \Longleftrightarrow \exists a \in A, \varphi(a) = (p, q)$$

Reciproc, fiecărei relaţii binare R pe N îi corespunde un graf orientat simplu $\overrightarrow{G}_R = (N, A_R, \varphi_R)$, unde $A_R = \{(p, q) \in N \times N \mid pRq\}$ şi $\varphi_R : A \longrightarrow N \times N$ este funcţia de incluziune $\varphi_R(p, q) = (p, q)$.

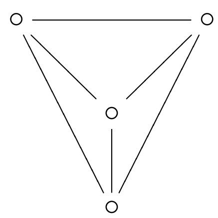
Observaţia I.4.2.1. *Fie $\overrightarrow{G}$ un graf orientat simplu şi $R_{\overrightarrow{G}}$ relaţia asociată. Atunci graful orientat asociat relaţiei $R_{\overrightarrow{G}}$, $\overrightarrow{G}_{(R_{\overrightarrow{G}})}$ este izomorf cu graful de la care s-a plecat. Invers, fiind dată o relaţie R pe o mulţime N, acesteia îi corespunde un graf orientat simplu $\overrightarrow{G}_R$ ca mai sus, iar relaţia asociată grafului $R_{(\overrightarrow{G}_R)}$ este tocmai relaţia de la care s-a plecat. Rezultă că pentru orice mulţime N, există o corespondenţă bijectivă între mulţimea relaţiilor binare pe N şi mulţimea claselor de echivalenţă a grafurilor orientate având mulţimea nodurilor N, în raport cu relaţia de izomorfism.*

I.4.3 Grafuri neorientate

Definiţia I.4.3.1. *Un* graf orientat *este un tuplu $\overrightarrow{G} = (N, A, \varphi)$, unde N şi A sunt mulţimi, numite mulţimea nodurilor, respectiv mulţimea arcelor, iar φ este o funcţie care asociază fiecărui arc $a \in A$ o pereche neordonată de noduri, numite extremităţile arcului a.*

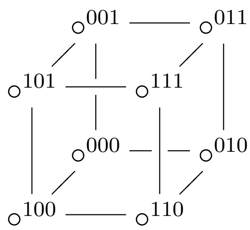
Un graf n-complet este un graf neorientat cu n noduri pentru care există un arc între oricare două noduri distincte sale (deci un graf complet va avea $\frac{n(n-1)}{2}$ arce).

Exemplul I.4.3.2. *(i) Un graf complet cu 4 noduri:*

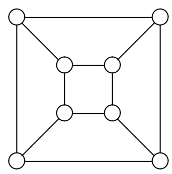


(ii) Cubul unitar n-dimensional poate fi vizualizat ca un graf neorientat (este complet?) cu 2^n noduri, în care mulţimea nodurilor (reprezentate în coordonate carteziene) coincide cu mulţimea secvenţelor binare

de lungime n. Atunci între două noduri există o muchie doar dacă secvenţele binare corespunzătoare diferă exact pe o poziţie. Mai jos am reprezentat cazul $n = 3$:



Exerciţiul I.4.3.3. *Arătaţi că graful de mai sus este izomorf cu graful*



Fiecărui graf neorientat $G = (N, A, \varphi)$ îi putem asocia următoarele relaţii:

(i) Relaţia de incidenţă între A şi N: $aR_G p \iff p$ este o extermitate a arcului a;

(ii) Relaţia de adiacenţă (doar pentru grafuri simple) pe N: $p\widetilde{R}_G q \iff \exists$ arc $a \in A$ cu extremităţile p, q; $\widetilde{R}_G$ este o relaţie simetrică.

Partea II
Structuri algebrice

II.1 Operaţii

II.1.1 Noţiuni introductive

Definiţia II.1.1.1. *Fie A o mulţime. O operaţie pe A este o funcţie $o : A^m \longrightarrow A$, unde $m \in \mathbb{N}$.*

Am notat $A^m = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{m}$, pentru $m \geq 1$. Pentru $m = 0$, vom conveni ca A^0 să fie o mulţime cu un singur element. m se numeşte *aritatea* operaţiei; pentru $m = 2$ spunem că operaţia este binară. Exemple de operaţii binare sunt adunarea sau înmulţirea numerelor naturale. O operaţie de aritate $m = 1$ se numeşte operaţie unară: ridicarea la pătrat a numrelor reale, opusul unui număr reale , negatia sunt exemple de operaţii unare. O operaţie de aritate $m = 0$ se mai spune şi operaţie nulară sau o constantă (o funţie de la o mulţime cu un singur element într-o mulţime nevidă A este acelaşi lucru ca un element din A).

Dacă A este o mulţime finită, $A = \{x_1...x_n\}$, pentru reprezentarea operaţiilor se folosesc tablele operaţiilor. De exemplu, pentru operaţii unare scriem

$$\begin{array}{c|l} x_1 & o(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & o(x_n) \end{array}, \text{ iar pentru operaţii binare } \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \hline x_1 & & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ x_i & & \dots & o(x_i, x_j) & \dots & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ x_n & & & & & \end{array}$$

Definiţia II.1.1.2. *Vom numi* algebră[1] *o mulţime A, împreună cu o familie de operaţii pe A (posibil de arităţi diferite),* $(A, (o_i)_{i\in I})$.

Pentru o mulţime A pe care există o operaţie $o : A^m \longrightarrow A$, o submulţime $X \subseteq A$ se numeşte închisă la operaţia o dacă pentru orice $x_1, ...x_m \in X$, $o(x_1, ..., x_m) \in X$ (în liceu: parte stabilă).

Observaţia II.1.1.3. *Dacă $X_1, X_2 \subseteq A$ sunt închise la operaţia o, atunci ¸i $X_1 \cap X_2$ este închisă la o. Într-adevăr, fie $x_1, \dots, x_m \in X_1 \cap X_2$. Atunci $x_1, \dots, x_m \in X_i$ închisă $\forall i = \overline{1, 2}$, deci $\Longrightarrow o(x_1, \dots, x_m) \in X_i, \forall i = \overline{1, 2}$. Rezultă $o(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \cap X_2$.*

O subalgebră B a unei algebre $(A, (o_i)_{i\in I})$ este o submulţime $B \subseteq A$ închisă la toate operaţiile o_i, $i \in I$.

II.1.2 Proprietăţile operaţiilor binare

Fie A o algebră, cu $o : A \times A \longrightarrow A$ operaţie binară pe A. Vom nota $o(x, y) = x \cdot y$, pentru $x, y \in A$.

Spunem că operaţia o este:

(i) Asociativă, dacă $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Dacă operaţia este asociativă, atunci

În particular, putem defini recursiv puteri, prin: $x^1 = x, x^{n+1} = x^n \cdot x$, pentru $n \in \mathbb{N}$, unde $x \in A$.

[1] Termen originar din limba arabă, secolul IX.

Exerciţiul II.1.2.1. *Arătaţi că pentru orice $x \in A$, avem $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$, $x^{mn} = (x^m)^n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

(ii) Comutativă, dacă $x \cdot y = y \cdot x$, pentru orice $x, y \in A$.

(iii) Idempotentă, dacă $x \cdot x = x$, pentru orice $x \in A$.

Exemplul II.1.2.2. *Reuniunea si intersectia pe $\mathcal{P}(M)$ sunt operaţii asociative, comutative şi idempotente.*

Elemente speciale. Reamintim că o operaţie nulară pe o mulţime nevidă A este complet specificată printr-o constantă (un element) din A. Dacă în plus A este o algebră cu o operaţie binară $o : A \times A \longrightarrow A$, $o(x, y) = x \cdot y$, atunci constanta se numeşte:

(i) Element neutru (notat $e \in A$), dacă $e \cdot x = x \cdot e = x$, $\forall x \in A$.

Elementul neutru, dacă există, este unic: dacă $e_1, e_2 \in A$ sunt elemente neutre, atunci $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$, deci $e_1 = e_2$. Mulţimea numerelor naturale cu operaţia de adunare admite elementul neutru numărul natural 0. Dar sunt şi algebre cu operaţie binară pentru care nu există element neutru, cum ar fi $(\mathbb{N}, -)$.

(ii) Element zero (element absorbant) şi notat $0 \in A$, dacă $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \forall x \in A$.

Elementul zero, dacă există, este unic: dacă 0_1 şi 0_2 sunt elemente zero, atunci $0_1 = 0_2 \cdot 0_1 = 0_2$. De exemplu, mulţimea vidă este element zero pentru operaţia de intersecţie pe mulţimea $A = \mathcal{P}(M)$. Un alt exemplu se obţine pentru A $= \{0, 1, \ldots, n\}$ şi operaţia $x \cdot y = \max(x, y)$. Atunci n este element zero pentru că $\max(x, n) = n, \forall x \in A$.

Fie acum A o algebră cu o operaţie binară notată ca mai sus, asociativă şi pentru care există elementul neutru $e \in A$. Fie $x \in A$. Spunem că x este inversabil la stânga (dreapta) dacă există un element $x_s \in A$ ($x_d \in A$) astfel încât $x_s \cdot x = e$ ($x \cdot x_d = e$). x_s (respectiv x_d) se numeşte inversul la stânga (la dreapta) al lui x Elementul x se numeşte inversabil dacă este inversabil la stânga şi la dreapta şi $x_s = x_d$; vom nota atunci cu x^{-1} inversul elementului x.

Observaţia II.1.2.3. *Inversul unui element x, dacă există, este unic (fals pentru invers doar la stânga sau doar la dreapta). Să presupunem că există x_1^{-1}, x_2^{-1} inverse pentru x. Atunci*

$$x_1^{-1} = x_1^{-1} \cdot e = x_1^{-1} \cdot (x \cdot x_2^{-1}) = (x_1^{-1} \cdot x) \cdot x_2^{-1} = e \cdot x_2^{-1} = x_2^{-1}$$

deci $x_1^{-1} = x_2^{-1}$.

II.2 Monoizi

II.2.1 Definiţie. Proprietăţi

Fie $(A, o : A \times A \longrightarrow A)$ o algebră cu o operaţie binară. Spunem că A este:

(i) *Semigrup*, dacă operaţia este asociativă.

(ii) *Monoid*, dacă operaţia este asociativă şi admite element neutru.

(iii) *Grup*, dacă operaţia este asociativă, admite element neutru şi orice element din A este inversabil în raport cu operaţia dată.

Exemplul II.2.1.1. *Exemple de monoizi:*

(i) Mulţimea numerelor naturale împreună cu operaţia de adunare $(\mathbb{N}, +, 0)$.

(ii) Mulţimea părţilor cu operaţia de reuniune $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset)$ *sau cu cea de intersecţie* $(\mathcal{P}(X), \cap, X)$.

(iii) Mulţimea funcţiilor $X \longrightarrow X$, *cu compunerea funcţiilor* $(X^X, \circ, \mathbf{1}_X)$.

(iv) Mulţimea relaţiilor binare pe o mulţime X, *împreună cu compunerea relaţiilor şi cu relaţia de egalitate ca element neutru formează un monoid* $(\mathsf{Rel}(X), \circ, E)$.

Definiţia II.2.1.2. *Fie* $(M, \cdot, e_M)$ *şi* $(N, \cdot, e_N)$ *doi monoizi. Un morfism de monoizi este o funcţie* $f : M \longrightarrow N$ *astfel încât*

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in M \qquad \text{şi } f(e_M) = e_N$$

Un izomorfism de monoizi este un morfism bijectiv.

Fie $(M, \cdot, e)$ un monoid. Am definit anterior puterile unui element $x \in M$ prin recursivitate $x^1 = x, x^{n+1} = x^n \cdot x$; prin convenţie vom considera $x^0 = e$. Un monoid este *ciclic* dacă există un element $x \in M$ astfel încât $M = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (spunem că M este *generat* de x). Orice monoid ciclic este comutativ (căci $x^n \cdot x^m = x^m \cdot x^n = x^{n+m}$). De exemplu, $(\mathbb{N}, +, 0)$ este un monoid ciclic, generat de 1.

Propoziţia II.2.1.3. *Orice monoid ciclic infinit e izomorf cu* $\mathbb{N}$. *Orice monoid ciclic finit de ordin n (numărul de elemente din monoid) e de forma*

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r] & x \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & x^m \arrow[dr] & \\
& & x^{m+k-1} \arrow[ur] & & x^{m+1} \arrow[d] \\
& & \ddots \arrow[u] & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\
& & & \cdots &
\end{tikzcd}$$

unde $m + k = n$, $m > 0$ şi $x^n = x^m$.

Demonstraţie. Fie $(M, \cdot, e)$ monoid ciclic cu generatorul x. Atunci $M = \{e, x, x^2, \ldots\}$. Dacă elementele lui A sunt distincte două câte două, funcţia $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$, $x^n \mapsto n$ este un izomorfism de monoizi. În caz contrar, fie $n \in \mathbb{N}$ minim astfel încât există $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ cu $x^m = x^n$. Atunci $M = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ şi pentru $i, j \in \mathbb{N}$ avem $x^i \cdot x^j = x^{i+j-n-mk}$ unde $k \in \mathbb{N}$ este cel mai mic număr natural astfel încât $k > i + j - n$, altfel $k = 0$. $\square$

Universalitate. Din teorema precedentă rezultă că $(\mathbb{N}, +, 0)$ este un monoid cu proprietăţi speciale: pentru orice monoid $(M, \cdot, e)$ şi pentru orice $x \in M$ (sau echivalent pentru orice funcţie $1 \longrightarrow M$), funcţia $\mathbb{N} \longrightarrow M$, $n \mapsto x^n$ este un morfism de monoizi. Spunem că $\mathbb{N}$ este *monoidul liber* cu un generator.

Vom generaliza această situaţie în secţiunea următoare

II.2.2 Monoid liber. Alfabet. Limbaj

Definiţia II.2.2.1. *Fie A o mulţime. Numim* monoidul liber *generat de A un monoid $(M, \cdot, e)$ pentru care există o funcţie $\varphi : A \longrightarrow M$ cu următoarea proprietate: pentru orice monoid $(N, \cdot, e)$ şi pentru orice funcţie $f : A \longrightarrow N$, există un unic morfism de monoizi $\tilde{f} : M \longrightarrow N$ astfel încât $\tilde{f} \circ \varphi = f$, ca în diagrama de mai jos:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

Constructia monoidului liber. Fie A o mulţime, deocamdată nevidă (adesea finită in Computer Science). Elementele lui A le vom numi simboluri (sau litere, sau caractere). Mulţimea A se va numi *alfabet*. Un *string* (sau cuvânt sau listă) din A este un element din A^n, $n \geq 1$, care va fi scris $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$ (fără paranteze sau virgulă), şi vom nota prin $\mid \alpha \mid = n$ *lungimea* string-ului. Convenim că există un unic string vid, notat ϵ, de lungime $\mid \epsilon \mid = 0$. Dacă un string conţine pe toate poziţiile sale acelaşi caracter $\underbrace{a\ldots a}_{n\ ori}$, vom nota $a^n = \underbrace{a\ldots a}_{n\ ori}$.

Mulţimea tuturor string-urilor peste alfabetul A se va nota A^*. Deci $A^* = \underbrace{\{\epsilon\}}_{A^0} \cup A \cup A^2 \cup \ldots = \cup_{n\geq 0}A^n$. De exemplu, daųa $A = \{a\}$, atunci $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$, iar dacă $A = \{a, b\}$, atunci $A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$. Convenim ca pentru $A = \emptyset$ să luăm $A^* = \{\epsilon\}$.

Propoziţia II.2.2.2. *Dacă A este un alfabet finit, atunci A^* este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ şi definim funcţia $f : A^* \longrightarrow \mathbb{N}$ prin

$$f(\alpha) = \begin{cases} i_1 + (n+1)i_2 + (n+1)^2 i_3 + \ldots & \text{dacă } \alpha = x_{i_1}\ldots x_{i_k} \in A^* \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \epsilon \end{cases}$$

Cum $i_1 \ldots i_k \in \{1, \ldots, n\}$, fiecărui string îi va corespunde un unic număr natural a cărui scriere în baza $(n+1)$ este $\overline{i_1 \ldots i_k}$. Rezultă f injectivă. Cum A^* este o mulţime infinită (conţine de exemplu toate stringurile formate doar cu simbolul x_1), obţinem că A^* este numărabilă. $\square$

Fie acum $\alpha, \beta \in A^*$, $\alpha = a_1 \ldots a_m$ şi $\beta = b_1 \ldots b_n$. Definim operaţia de *concatenare* a string-urilor α şi β prin:

$$\alpha \cdot \beta = a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$$

Convenim ca pentru concatenarea cu stringul vid să punem

$$\alpha \cdot \epsilon = \epsilon \cdot \alpha = \alpha$$

În particular, rezultă $\mid \alpha \cdot \beta \mid = \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid, \forall \alpha, \beta \in A^*$.

Se observă uşor că operaţia de concatenare este asociativă $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ şi necomutativă (pentru $\mid A \mid > 1$), cu string-ul vid drept element neutru.

Deci $(A^*, \cdot, \epsilon)$ este un monoid. Mai mult, pe A^* putem defini operaţia unară de involuţie $\alpha^R = a_n \ldots a_1$, dacă $\alpha = a_1 \ldots a_n$. Atunci $(\alpha^R)^R = \alpha$, $(\alpha \cdot \beta)^R = \beta^R \cdot \alpha^R$ şi $\epsilon^R = \epsilon$.

Teorema II.2.2.3. $(A^*, \cdot, \epsilon)$ *este monoidul liber generat de multimea A.*

Demonstraţie. Fără demonstraţie. □

Exerciţiul II.2.2.4. *Funcţia care asociază fiecărui string lungimea sa,* $A^* \longrightarrow \mathbb{N}$, $\alpha \longrightarrow |\alpha|$ *e morfism de monoizi. Indicaţi cum poate fi construit acest morfism de monoizi folosind Definiţia II.2.2.1 şi Teorema II.2.2.3.*

Limbaje şi operaţii cu limbaje. O submulţime $L \subseteq A^*$ se numeşte *limbaj*. Deci mulţimea limbajelor peste alfabetul A este $\mathcal{P}(A)$. Dacă A este un alfabet finit, am văzut că A^* este o mulţime numărabilă, deci $\mathcal{P}(A^*)$ va fi nenumărabilă.

Cum limbajele sunt submulţimi ale monoidului stringurilor A^*, putem efectua cu acestea toate operaţiile specifice mulţimilor, şi anume reuniunea, intersecţia, complementara. Pe lângă acestea, introducem următoarele operaţii:

(i) Concatenarea limbajelor: dacă $L_1, L_2 \subseteq A^*$, atunci

$$L_1 \cdot L_2 = \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}$$

De exemplu, dacă $A = \{a, b\}$ şi luăm limbajele $L_1 = \{\epsilon, a, a^2, \ldots\}$ şi $L_2 = \{b\}$, atunci $L_1 \cdot L_2 = \{b, ab, a^2b, \ldots\}$.

Concatenarea limbajelor este o operaţie asociativă, necomutativă, pentru care

$$L \cdot \{\epsilon\} = \{\epsilon\} \cdot L = L$$
$$L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset$$

Exerciţiul II.2.2.5. *Arătaţi că operaţia de concatenare a limbajelor este distributivă peste reuniune, dar nu şi peste intersecţie (Indicaţie: consideraţi* $A = \{a, b, c\}$, $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{b\}$, $L_3 = \{\epsilon\}$*).*

(ii) Închiderea (închiderea Kleene): dacă $L \subseteq A^*$, atunci

$$L^* = \{\epsilon\} \cup L \cup L \cdot L \cup L \cdot L \cdot L \cup \ldots$$

În particular, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$. Închiderea Kleene verifică următoarele proprietăţi:

(a) $L \subseteq L^*$
(b) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$
(c) $A \subseteq L^* \Rightarrow L^* = A^*$
(d) $L^* \cdot L^* = L^*$
(e) $(L^*)^* = L^*$
(f) $L^* = \{\epsilon\} \cup L \cdot L^* = \{\epsilon\} \cup L^* \cdot L$