Curs 2

I.2 Funcţii

I.2.1 Noţiuni introductive

Asemeni mulţimilor, funcţiile sunt o noţiune indispensabilă atât în Matematică cât şi în Computer Science. În acest Curs vom reaminti şi aprofunda principalele concepte referitoare la funcţii[1], cu exemple ce apar în soluţionarea unor probleme de Informatică teoretică şi practică[2].

Fie A, B două mulţimi nevide. Reamintim că o *funcţie* f cu *domeniul* A şi *codomeniul* B este o corespondenţă prin care se asociază oricărui element x din A un singur element din B, numit *valoarea* sau *imaginea* funcţiei în x şi notat $f(x)$. În scrierea $f(x)$, x se numeşte *argumentul* funcţiei. Se mai spune că f este definită pe A cu valori în B şi scriem $f : A \longrightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$. Reamintim că *imaginea* funcţiei f, notată $\mathsf{Im}f$, este submulţimea lui B formată cu toate elementele de forma $f(x)$, unde $x \in A$. Scrierea uzuală $f(x)$ (sau $f\ x$, când nu este pericol de confuzie) se spune că este în notaţie *prefix*, ca în $\sin x$; există totuşi situaţii când argumentul funcţiei apare primul $x\ f$ (notaţie *infix*), cum ar fi funcţia factorial $n!$.

O funcţie poate fi privită echivalent ca un triplet (A, B, f), unde A şi B sunt mulţimi (nevide) iar f este o submulţime (nevidă!) a produsului cartezian $A \times B$ ce satisface următoarele:

- Pentru orice $x \in A$, există $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$;
- Dacă $(x, y) \in f$ şi $(x, y') \in f$, atunci $y = y'$.

[1] Matematicianul şi filosoful german G. Leibniz (1646 - 1716) este cel care a introdus termenul de "funcţie" în 1692. Tot lui i se datorează, printre multe altele, şi sistemul numeric binar, logica simbolică şi analiza matematică.

[2] Acestea vor fi utile la materiile din anii următori: de exemplu, la cursul de Paradigme de Programare din anul II, unde vor fi puse bazele calcului Lambda - calculul Lambda este văzut drept contextul teoretic în Computer Science al descrierii şi evaluării funcţiilor. Deşi este mai mult o abstracţie matematică decât un limbaj de programare, calculul lambda formează baza aproape tuturor limbajelor de programare funcţionale din prezent.

În particular, de aici rezultă că funcţiile cu domeniu A şi codomeniu B formează o mulţime, notată B^A, inclusă în $\mathcal{P}(A \times B)$.

De exemplu, orice program cu intrări şi ieşiri poate fi privit ca o funcţie $I \longrightarrow O$, unde I este mulţimea intrărilor valide pentru acel program, iar O este mulţimea ieşirilor posibile.

Domeniul și codomeniul unei funcții sunt adeseori specificate explicit în limbajele de programare. De exemplu, în Java avem aserțiunea `int floor (float real){...}`, iar în Pascal `function floor (x: real): integer`. Amândouă fac referire la funcția `floor` (parte întreagă) și precizează că domeniul acesteia este mulțimea numerelor reale, iar codomeniul mulțimea întregilor.

Două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi aceeaşi regulă de corespondenţă. De exemplu, funcţiile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ nu coincid, chiar dacă sunt date prin aceeaşi formulă şi au aceeaşi imagine, întrucât codomeniile sunt diferite.

Pentru orice mulţime nevidă A, există o funcţie specială, numită *funcţia identitate* şi notată $\mathbf{1}_A : A \longrightarrow A$, care duce fiecare element din A în el însuşi, adică $\mathbf{1}_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

Până acum am considerat funcţii pentru care atât domeniul cât şi codomeniul erau nevide. Convenim că pentru orice mulţime A există o singură funcţie de la mulţimea vidă la A, notată $!_A : \emptyset \longrightarrow A$. Intuitiv, această funcţie nu face nimic, întrucât mulţimea vidă nu are elemente şi deci nu avem ce corespondenţă să stabilim De asemenea, vom conveni că nu există nici o funcţie cu codomeniul vid, excepţie făcând funcţia identică a mulţimii vide.

Exerciţiul I.2.1.1. *Fie A şi B două mulţimi, cu B nevidă. Arătaţi că există cel puţin o funcţie $A \longrightarrow B$; altfel spus, că mulţimea B^A este nevidă.*

Este util de reţinut că două funcţii cu acelaşi domeniu ce iau valori numerice (de exemplu în $\mathbb{R}$), pot fi adunate sau înmulţite punctual, prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, respectiv $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Dacă domeniul de definiţie al unei funcţii este un produs cartezian de mulţimi, spunem că funcţia are argument multiplu: de exemplu, adunarea numerelor naturale este o funcţie binară (primeşte două argumente): $\mathsf{add} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathsf{add}(m, n) = m + n$.

Incluziunea şi restricţia. Fie A o mulţime şi X o submulţime a sa. Atunci funcţia $\iota_X : X \longrightarrow A$, $\iota_X(x) = x$ se numeşte funcţia de *incluziune* a lui X în A. A nu se confunda cu funcţia identică a mulţimii X, $\mathbf{1}_X : X \longrightarrow X$, deoarece nu au acelaşi codomeniu! Uneori se mai notează şi prin $X \hookrightarrow A$, fără a mai specifica numele funcţiei. Vom întâlni ulterior în funcţia de incluziune, unde vom vedea că joacă un rol important în construc tia substructurilor algebrice. Dacă $f : A \longrightarrow B$ este o funcţie şi $X \subseteq A$, numim *restricţia* lui f la X funcţia notată $f|_X : X \longrightarrow B$ şi dată de $f|_X(x) = f(x)$, pentru orice $x \in X$.

Exemplul I.2.1.2. *(i) Funcţia factorial. Atât domeniul cât şi codomeniul funcţiei factorial sunt mulţimea numerelor naturale, iar legea de corespondenţă este* $n \mapsto n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$ *pentru* $n \geq 1$ *şi* $0 \mapsto 0! = 1$. *Funcţia factorial poate fi definită şi recursiv, prin*

$$n! = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & \textit{dacă } n \geq 1 \end{cases}$$

În combinatorică, $n!$ *este numărul de permutări distincte ale unei mulţimi cu* n *elemente. În analiza matematică, funcţia factorial poate fi extinsă la toate numerele reale pozitive, obţinându-se astfel funcţia Gamma a lui Euler,*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathsf{d}t$$

(ii) Funcţia binomială $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *dată de*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} & \textit{pentru } k \leq n \\ 0 & \textit{în caz contrar} \end{cases}$$

Se mai întâlneşte şi sub notaţia C_n^k, *dar doar pentru* $k \leq n$. *În combinatorică,* $\binom{n}{k}$ *reprezintă numărul de submulţimi cu* k *elemente dintr-o mulţime cu* n *elemente.*

(iii) Funcţia parte întreagă. Partea întreagă $[x]$ *a unui număr real* x *este întregul cel mai mare ce nu depăşeşte pe* x. *Din definiţie, avem* $[x] \in \mathbb{Z}$ *şi* $[x] \leq x < [x] + 1$. *Diferenţa* $\{x\} = x - [x]$ *se numeşte partea fracţionară a numărului* x*;* $\{x\} \in [0, 1)$ *şi* $\{-\} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1)$, $x \mapsto \{x\}$ *este o funcţie periodică cu perioada* 1.

(iv) Permutări ciclice. Fie $\underline{\mathbf{n}} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ *şi* $\sigma : \underline{\mathbf{n}} \longrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ *funcţia dată de*

$$0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, \ldots, n-2 \mapsto n-1, n-1 \mapsto 0$$

Aceasta duce fiecare $k \in \underline{n}$ *în succesorul său* $k+1$, *mai puţin pe* $n-1$, *căruia i se asociază imaginea* 0.

(v) *Cel mai mare divizor comun. Fiind date două numere întregi nenule m şi n, cel mai mare divizor comun al acestora, notat (m,n), este cel mai mare număr (natural) care le divide pe amândouă. De exemplu, cel mai mare divizor comun al numerelor* 12 *şi* 18 *este* 6, *iar cel mai mare divizor comun al numerelor* -36 *şi* -56 *este* 4. *Reamintim următoarele proprietăţi:*

(a) $(m,n) = (n,m) = (m,-n)$.

(b) $(m,n) = (n, m - nq)$ *pentru orice* $q \in \mathbb{Z}$.

(c) $(m,n) = d \iff (\exists)k, l \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $km + ln = d$.

(d) $d|mn$ *şi* $(d,m) = 1$ *implică* $d|n$.

Cel mai mare divizor comun apare astfel ca o funcţie cu două argumente, $\mathsf{cmmdc} : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^*$.

(vi) *Funcţia caracteristică. Considerăm o mulţime universală M, care va conţine toate mulţimile cu care vom lucra. Pentru $A \subseteq M$,* funcţia caracteristică *asociată mulţimii A este* $\chi_A : M \longrightarrow \{0,1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Reamintim că am introdus notaţia exponenţială pentru mulţimea funcţiilor cu domeniu şi codomeniu dat; astfel, putem scrie $\chi_A \in \underline{\mathbf{2}}^M$ *(I.2.1.6.(v)), pentru orice* $A \subseteq M$. *Mai mult chiar, corespondenţa* $A \mapsto \chi_A$ *defineşte o funcţie* $\mathcal{P}(M) \longrightarrow \underline{\mathbf{2}}^M$, *ce asociază fiecărei submulţimi A funcţia sa caracteristică* χ_A. *Vom reveni ulterior asupra acesteia.*

Currying[3]**.** Să presupunem că lucrăm cu o funcţie al cărui domeniu este un produs cartezian, $f : A \times B \longrightarrow C$, adică cu o funcţie de mai multe variabile sau cu argument multiplu. Dacă fixăm primul argument $x \in A$, putem construi o funcţie $f_x : B \longrightarrow C$ prin $f_x(y) = f(x,y)$. Deci obţinem o funcţie $A \longrightarrow C^B$, $x \mapsto f_x$, adică un element din $(C^B)^A$. Am stabilit astfel o corespondenţă numită *curry* între mulţimea funcţiilor $C^{A\times B}$ de la produsul cartezian $A \times B$ în C, şi mulţimea funcţiilor $(C^B)^A$, definită prin

$$\mathsf{curry} : C^{A\times B} \longrightarrow (C^B)^A$$

[3]Această tehnică a fost introdusă de M. Schönfinkel după numele matematicianului şi logicianului Haskell B. Curry; ea a apărut datorită faptului că λ-calculul are numai funcţii de un singur argument. O funcţie având mai multe argumente se exprimă, cu ajutorul acestei tehnici, ca o funcţie având un singur argument şi care ia valori tot funcţii.

$$\mathsf{curry}(f)(x) = f_x \text{ sau echivalent } f \mapsto (x \mapsto f_x)$$

Această corespondenţă transformă deci funcţiile de mai multe argumente în funcţii ce primesc argumentele pe rând (succesiv).

I.2.2 Compunerea funcţiilor.

Fie $f : A \longrightarrow B$ şi $g : B \longrightarrow C$ două funcţii. Definim compunerea lui g cu f ca fiind funcţia $g \circ f : A \longrightarrow C$, dată de regula de corespondenţă

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Prin utilizarea diagramelor Venn, putem vizualiza un exemplu de compunere a funcţiilor:

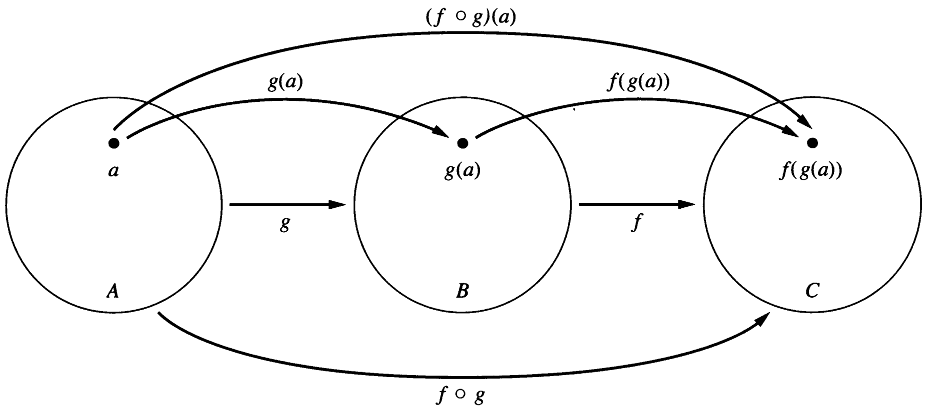

Figura 1: $g \circ f$

Trebuie să subliniem că nu oricare două funcţii f şi g pot fi compuse; pentru aceasta, codomeniul lui f trebuie să coincidă cu domeniul lui g. În acest caz, relaţia dintre cele trei funcţii, f, g, şi $g \circ f$, poate fi vizualizată cu ajutorul diagramei de mai jos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Intuitiv, putem ajunge de la A la C în două moduri, cu acelaşi rezultat: fie în doi paşi, mai întâi aplicând f apoi g, fie într-un singur pas cu funcţia $g \circ f$.

Exemplul I.2.2.1. *De exemplu, dacă $f : A \longrightarrow B$ este o funcţie şi $X \subseteq A$, atunci restricţia lui f la X este o funcţie compusă: $f|_X = f \circ \iota_X$. Un alt* *exemplu de funcţie compusă se obţine astfel: pentru o funcţie $f : A \longrightarrow B$, notăm prin $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathsf{Im}f$ funcţia având acelaşi domeniu A şi aceeaşi regulă de corespondenţă, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Atunci funcţia de la care am plecat se poate scrie ca o compunere astfel: $f = \iota_{\mathsf{Im}f} \circ \tilde{f}$.*

Propoziţia I.2.2.2. *Operaţia de compunere a funcţiilor are următoarele proprietăţi:*

(i) Este asociativă:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

pentru orice trei funcţii $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$.

(ii) Este invariantă la compunerea cu funcţia identitate:

$$f \circ \mathbf{1}_A = f \text{ şi } \mathbf{1}_{\mathbf{B}} \circ f = f$$

pentru orice funcţie $A \xrightarrow{f} B$.

De reţinut însă că ordinea în care se efectuează compunerea $g \circ f$ este importantă: mai întâi f, apoi g. Nu întotdeauna putem efectua compunerea în orice ordine: pentru aceasta, ar trebui ca domeniul lui f să coincidă cu codomeniul lui g şi invers, ca domeniul lui g să coincidă cu codomeniul lui f. Totuşi, nici în acestă situaţie nu putem avea neapărat $g \circ f = f \circ g$: fie de exemplu funcţiile $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x + 2$. Atunci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = 9x + 5$, în timp ce $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 1 = 9x + 7$.

Exemplul I.2.2.3. *Fie A, B două mulţimi şi $A \times B$ produsul cartezian al acestora. Considerăm funcţiile $\mathsf{out}_A : A \times B \longrightarrow A$, $\mathsf{out}_A(x, y) = x$ şi $\mathsf{out}_B : A \times B \longrightarrow B$, $\mathsf{out}_B(x, y) = y$. Acestea se numesc* proiecţii*: fiecărei perechi ordonate îi asociem prima, respectiv a doua componentă. Fie acum C o mulţime, împreună cu două funcţii $f : C \longrightarrow A$ şi $g : C \longrightarrow B$. Arătaţi că există o unică funcţie $h : C \longrightarrow A \times B$ astfel încât $\mathsf{out}_A \circ h = f$ şi $\mathsf{out}_B \circ h = g$, ca în diagrama de mai jos:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\mathsf{out}_A"] \arrow[r, "\mathsf{out}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

I.2.3 Funcţii injective, surjective, bijective

O funcţie $f : A \longrightarrow B$ se numeşte *injectivă*, dacă pentru orice $x \neq x'$, unde $x, x' \in A$, rezultă $f(x) \neq f(x')$ în B. Altfel spus, o funcţie injectivă este o funcţie care duce obiecte diferite din domeniu în imagini diferite din codomeniu. Echivalent, dacă funcţia duce două obiecte în aceeaşi imagine, atunci obiectele coincid:

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

De exemplu, funcţia de incluziune este întotdeauna injectivă.

O funcţie $f : A \longrightarrow B$ se numeşte *surjectivă*, când imaginea sa coincide cu codomeniul, $\mathsf{Im} f = B$, adică pentru orice $y \in B$, există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. De exemplu, fiecărei funcţii $f : A \longrightarrow B$ îi putem asocia o funcţie surjectivă, şi anume $\tilde{f}$ (Exemplul I.2.2.1), prin restricţia codomeniului la imaginea funcţiei.

Exerciţiul I.2.3.1. *Arătaţi că orice funcţie $f : A \longrightarrow B$ se poate descompune sub forma $f = g \circ h$, unde g este o funcţie injectivă şi h este o funcţie surjectivă.*

În sfârşit, spunem că o funcţie este *bijectivă* dacă este simultan injectivă şi surjectivă. Cel mai simplu exemplu de funcţie bijectivă este funcţia identitate a unei mulţimi, $\mathbf{1}_A : A \longrightarrow A, \mathbf{1}_A(x) = x$ (demonstraţi!). De reţinut însă că o funcţie injectivă nu este neapărat surjectivă sau invers.

Exerciţiul I.2.3.2. *Fie $f : A \longrightarrow B$ şi $g : B \longrightarrow C$ două funcţii. Arătaţi că:*

(i) Dacă f şi g sunt injective, atunci şi $g \circ f$ este injectivă.

(ii) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă. Daţi un exemplu în care $g \circ f$ este injectivă, dar g nu este.

(iii) Dacă f şi g sunt surjective, atunci şi $g \circ f$ este surjectivă.

(iv) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă. Daţi un exemplu în care $g \circ f$ este surjectivă, dar f nu este.

(v) Dacă f şi g sunt bijective, atunci şi $g \circ f$ este bijectivă.

(vi) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă şi g este surjectivă. Daţi un exemplu în care $g \circ f$ este bijectivă, dar f şi g nu sunt.

Exerciţiul I.2.3.3. *Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este injectivă.*

(ii) *Pentru orice funcţii* $g, h : C \longrightarrow A$ *astfel încât* $f \circ g = f \circ h$*, rezultă* $g = h$.

Exerciţiul I.2.3.4. *Fie* $f : A \longrightarrow B$ *o funcţie. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este surjectivă.*

(ii) *Pentru orice funcţii* $g, h : B \longrightarrow C$ *astfel încât* $g \circ f = h \circ f$*, rezultă* $g = h$.

Exemplul I.2.3.5. *Nu există nici o funcţie surjectivă* $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$*, pentru orice mulţime* A*. Într-adevăr, dacă o asemenea funcţie există, fie* $W = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \subseteq A\}$*. Cum* f *este surjectivă, putem găsi* $x \in A$ *cu* $f(x) = W$*. Dacă* $x \in W$*, rezultă* $x \notin f(x) = W$*, fals. Deci* $x \notin W = f(x)$*, adică* $x \in W$*, contradicţie. De remarcat însă că o surjecţie* $g : \mathcal{P}(A) \longrightarrow A$ *poate fi construită întotdeauna, dacă* A *este nevidă; de exemplu, fie* $x_0 \in A$ *fixat şi funcţia* g *definită astfel:* $g(\{x\}) = x$ *şi* $g(X) = x_0$ *pentru submulţimi* $X \subseteq A$ *care conţin mai mult de un element sau sunt vide.*

I.2.4 Funcţii inversabile. Funcţia inversă

Fie A, B două mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$. Spunem că g este *inversă la stânga* pentru f (sau că f este *inversă la dreapta* pentru g) dacă $g \circ f = \mathbf{1}_A$. Dacă $g \circ f = \mathbf{1}_A$ şi $f \circ g = \mathbf{1}_B$, vom spune că f este *inversabilă* şi că g este *inversa* lui f. Prin simetrie, rezultă că în acest caz şi g este *inversabilă*, cu *inversa* f.

Teorema I.2.4.1. *Fie* $f : A \longrightarrow B$ *o funcţie. Atunci:*

(i) f *este inversabilă la stânga* $\Longleftrightarrow$ f *este injectivă.*

(ii) f *este inversabilă la dreapta* $\Longleftrightarrow$ f *este surjectivă.*

(iii) f *este inversabilă la stânga şi la dreapta* $\Longleftrightarrow$ f *este bijectivă.*

Demonstraţie. (i) Fie f inversabilă la stânga, cu inversa g, şi $x, x' \in A$ astfel încât $f(x) = f(x')$. Atunci

$$x = \mathbf{1}_A(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \mathbf{1}_A(x') = x'$$

Deci pentru $f(x) = f(x')$ avem $x = x'$, de unde rezultă că f este injectivă. Reciproc, să presupunem că f este o injecţie. Vom construi o funcţie g :

$B \longrightarrow A$ inversă la stânga pentru f. Alegem $x_0 \in A$ şi îl considerăm fixat şi definim g prin

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{dacă există } x \in A \text{ astfel încât } y = f(x) \\ x_0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Injectivitatea lui f ne asigură că g este bine definită: dacă pentru $y \in B$ ar exista $x, x' \in A$ cu $y = f(x) = f(x')$, atunci $x = x'$. Rezultă $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ pentru orice $x \in A$. Deci $g \circ f = \mathbf{1}_A$, adică f este inversabilă la stânga.

(ii) Dacă f este inversabilă la dreapta cu inversa $h : B \longrightarrow A$, atunci pentru orice $y \in B$ avem $y = \mathbf{1}_B = f(h(y))$, deci y este imaginea prin f a elementului $x = h(y)$ din A. Rezultă f surjecţie. Invers, dacă f este surjectivă, orice $y \in B$ este imaginea a cel puţin un element $x \in A$. Alegem câte un asemenea element x_y cu $f(x_y) = y$ pentru $y \in B$ şi construim funcţia $h : B \longrightarrow A$ prin $h(y) = x_y$. Atunci $f(h(y)) = f(x_y) = y$, deci $f \circ h = \mathbf{1}_B$. $\square$

De remarcat că inversa la stânga (respectiv dreapta), dacă există, nu este neapărat unică! De exemplu, fie $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dată prin

$$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4$$

Rezultă imediat că f e o injecţie. Fie funcţiile $g_1, g_2 : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$, definite prin $g_1(1) = 1, g_1(2) = 1, g_1(3) = 2, g_1(4) = 3, g_1(5) = 3$, respectiv $g_1(1) = 2, g_1(2) = 1, g_1(3) = 2, g_1(4) = 3, g_1(5) = 2$. Atunci g_1 şi g_2 sunt inverse la stânga pentru f, după cum se poate observa efectuând compunerea, dar $g_1 \neq g_2$.

Existenţa unei inverse la stânga sau la dreapta pentru o funcţie nu garantează şi unicitatea acesteia. Dar, dacă există simultan ambele, atunci:

Propoziţia I.2.4.2. *O funcţie f este bijectivă dacă şi numai dacă este inversabilă la stânga (cu inversa la stânga g) şi inversabilă la dreapta (cu inversa la dreapta h). În această situaţie, cele două inverse coincid, $g = h$.*

Demonstraţie. Prima afirmaţie este consecinţa imediată a Teoremei precedente, dacă ţinem cont că o funcţie bijectivă este o funcţie injectivă şi surjectivă în acelaşi timp. Apoi avem

$$g = g \circ \mathbf{1}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathbf{1}_A \circ h = h$$

de unde rezultă că cele două inverse coincid. $\square$

Inversa comună la stânga şi la dreapta a unei funcţii bijective se notează cu f^{-1}; în particular f^{-1} este de asemenea bijectivă, cu inversa $(f^{-1})^{-1} = f$.

A nu se confunda funcţia f^{-1} cu funcţia $\frac{1}{f}$, care asociază fiecărui element din domeniul de definiţie valoarea $\frac{1}{f(x)}$ (aceasta din urmă având sens doar pentru funcţiile pentru care $f(x)$ este un număr real nenul).

I.2.5 Funcţii parţiale.

În Computer Science, există cazuri când un program intră într-o buclă sau returnează mesaj de eroare, la introducerea unui input incorect. Similar, în matematică ne-am întâlnit adesea cu funcţii definite numai pe o submulţime a mulţimii numerelor reale, cum ar fi $frac1x$, $\sqrt{x}$, sau $\arcsin x$. Pentru a putea studia aceste situaţii, introducem noţiunea de *funcţie parţială*.

Fiind date două mulţimi A şi B, o funcţie parţială de la A la B este o funcţie $f : X \subseteq A \longrightarrow B$, având domeniul o submulţime a lui A şi codomeniul B. Vom spune că pentru elementele din A care nu aparţin domeniului de definiţie X, funcţia f nu este definită. Când $X = A$, se mai spune că f este o funcţie *totală*.

Compunerea funcţiilor parţiale. Fie $f : X \subseteq A \longrightarrow B$ şi $g : Y \subseteq B \longrightarrow C$ două funcţii parţiale. Definim compunerea $g \circ f$ ca fiind o funcţie parţială $A \longrightarrow C$, astfel: pentru $x \in A$, dacă $f(x)$ e definit şi $f(x) \in Y$, prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; în caz contrar. spunem că $g \circ f(x)$ nu este definit. Compunerea funcţiilor parţiale este asociativă, cu element neutru funcţia identitate.

Exerciţiul I.2.5.1. *Arătaţi că o funcţie parţială $f : X \subseteq A \longrightarrow B$ poate fi văzută ca o funcţie totală $\tilde{f} : A \longrightarrow B \cup \{*\}$, unde $*$ este un element ce nu aparţine lui B, iar*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{dacă } x \in X \\ * & x \notin X \end{cases}$$