I. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

1. Coordonate şi viteze generalizate. Spaţiu de configuraţie.

Mecanica analitică este o metodă generală care se bazează pe principii variaţionale.

Un sistem mecanic este supus la legături dacă i se impun anumite restricţii geometrice, adică există o dependenţă funcţională între coordonate, viteze şi timp

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, t) = 0 \quad (1.1)$$

În lipsa unor legături, configuraţia unui sistem de n puncte materiale va fi determinată la un moment dat de 3n coordonate carteziene $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$. Un astfel de sistem are 3 n grade de libertate care definesc univoc poziţia în spaţiu la un moment dat a tuturor punctelor din sistem în raport cu un sistem de referinţă. Dacă între cele 3n coordonate există ℓ relaţii de legătură, numărul gradelor de libertate se reduce la $f = 3n-\ell$. În acest caz configuraţia sistemului se poate defini dacă se cunosc numai f coordonate independente $q_1, q_2, \ldots, q_f$ numite coordonate generalizate

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \\ q_f &= q_f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Meanica analitică are avantajul că elimină relaţiile de legătură.

În mecanică o coordonată generalizată poate fi o distanţă sau un unghi, în timp ce în domeniul electromagnetismului putem considera drept coordonată generalizată o sarcină electrică sau un flux magnetic.

Vitezele generalizate se exprimă prin relaţiile:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \; i = 1, 2, \ldots, f \quad (1.3)$$

Starea mecanică a sistemului de n puncte materiale ce f grade de libertate este complet determinată de 2f parametri şi anume de cele f coordonate generalizate şi cele f viteze generalizate. Ne putem imagina un spaţiu cu f dimensiuni în care un punct figurativ determinat de mărimile $q_1, q_2, \ldots, q_f$ să reprezinte configuraţia sistemului la un moment dat, adică poziţia tuturor punctelor materiale în raport cu un referenţial. Acest spaţiu se numeşte spaţiu de configuraţie. La trecerea sistemului de la o stare iniţială $\sum_0$ la o altă stare $\sum$, punctul reprezentativ va descrie o traiectorie în spaţiul de configuraţie, reprezentată prin ecuaţiile:

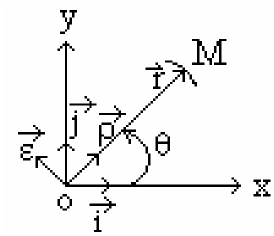
$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \; \ldots, \; q_f = q_f(t) \quad (1.4)$$

2. Ecuaţiile Lagrange de speţa I-a şi a II-a

Considerăm o particulă M care descrie o curbă plană. Dacă particula ar fi liberă, am avea 3 grade de libertate şi deci trei coordonate generalizate. Deoarece avem o restricţie legată de mişcarea particulei într-un plan, rezultă că avem o legătură (z = 0) şi deci pentru descrierea mişcării sunt suficiente două coordonate generalizate r şi θ, numite coordonate polare plane.

Din figură rezultă:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \end{aligned} \quad (1.5)$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\vec{\rho} \tag{1.6}$$

$$\vec{\rho} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta \tag{1.7}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{1.8}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \dot{r}(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta) + r\dot{\theta}(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{\rho} + r\dot{\theta}\vec{\varepsilon} \tag{1.9}$$

cu: $\vec{\varepsilon} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$ (1.10)

$\vec{\rho}$ este versorul direcției <u>variabilei</u> $\vec{r}$, iar $\vec{\varepsilon}$ este versorul perpendicular în <u>fiecare moment</u> pe $\vec{\rho}$. $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii axelor Ox şi Oy şi au mărimea egală cu unitatea şi o direcție care se păstrează.

Din relațiile (1.7) şi (1.10) obținem:

$$\dot{\vec{\rho}} = -\vec{i}\dot{\theta}\sin\theta + \vec{j}\dot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}\vec{\varepsilon}$$

$$\dot{\vec{\varepsilon}} = -\vec{i}\dot{\theta}\cos\theta - \vec{j}\dot{\theta}\sin\theta = -\dot{\theta}\vec{\rho} \tag{1.11}$$

Prin derivarea relației (1.9) obținem accelerația $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{\rho} + \dot{r}\dot{\vec{\rho}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\varepsilon} + r\ddot{\theta}\vec{\varepsilon} + r\dot{\theta}\dot{\vec{\varepsilon}} = \ddot{r}\vec{\rho} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\varepsilon} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\varepsilon} + r\ddot{\theta}\vec{\varepsilon} - r\dot{\theta}^2\vec{\rho}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\varepsilon} \tag{1.12}$$

Forța $\vec{F}$ se poate descompune într-o componentă radială $\vec{F}_r$ şi una normală $\vec{F}_n$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{F}_n = F_r\vec{\rho} + F_n\vec{\varepsilon} \tag{1.13}$$

unde:

$$F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{1.14}$$

$$F_n = ma_n = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \tag{1.15}$$

Mărimea momentului cinetic se determină astfel:

$$|\vec{P}_\theta| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m\left|r\vec{\rho} \times \left(\dot{r}\vec{\rho} + r\dot{\theta}\vec{\varepsilon}\right)\right| = mr^2\dot{\theta}\,|\vec{\rho} \times \vec{\varepsilon}| = mr^2\dot{\theta} \tag{1.16}$$

Energia cinetică este:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{1.17}$$

Mărimile:

$$P_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \;; \quad P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad (1.18)$$

şi în general:

$$P_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, f \qquad (1.19)$$

se numesc impulsuri generalizate.

Dacă q_i reprezintă o distanţă, atunci impulsul generalizat p_i corespunzător este un impuls, iar dacă q_i este un unghi, atunci impulsul generalizat corespunzător reprezintă un moment cinetic.

Din relaţiile (1.18) şi (1.19) se constată că impulsurile generalizate p_i admit un acelaşi potenţial al impulsurilor T, care în cazul mişcării plane se numeşte potenţial efectiv al impulsurilor generalizate şi este de fapt energia cinetică a particulei.

Aceasta reprezintă prima ipoteză de bază a formalismului analitic.

În condiţiile unei mişcări nerelativiste (m = const.), variaţia în timp a celor două coordonate generalizate r şi θ este descrisă de ecuaţiile:

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2 \qquad (1.20)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \left|\vec{M}_F\right| = \left|\vec{r}\text{ x}\left(F_r\vec{\rho} + F_n\vec{\varepsilon}\right)\right| = r F_n \qquad (1.21)$$

în care $\vec{M}_F$ este momentul forţei. În relaţia (1.20) $m\ddot{r}$ a fost înlocuit din (1.14).

Din relaţiile (1.20) şi (1.21) se constată că, pentru orice grad de libertate, evoluţia este descrisă de o ecuaţie de forma:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \qquad i = 1, 2, \ldots, f \qquad (1.22)$$

unde P_i şi F_i sunt respectiv impulsul generalizat şi forţa generalizată asociate gradului de libertate „i”. Aceasta reprezintă a doua ipoteză de bază a formalismului analitic.

Deoarece $\frac{\partial T}{\partial r} = m\,r\,\dot{\theta}^2$, $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$, relaţiile (1.20) şi (1.21) pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = F_r + \frac{\partial T}{\partial r} \qquad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \left|\vec{M}_F\right| + \frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (1.24)$$

şi în general:

$$F_i = \frac{d}{dt}P_i = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, f \qquad (1.25)$$

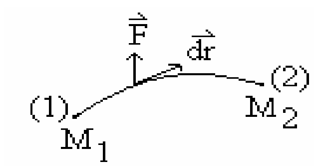
La relaţia (1.24) am adăugat $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ pentru ca să aibă aceeaşi formă ca relaţia (1.23).

Din relația (1.25) se constată că, pentru orice grad de libertate, forța generalizată F_i este egală cu suma dintre forța generalizată Q_i datorată interacțiunilor care efectuează lucru mecanic nenul şi derivata potențialului efectiv al impulsurilor generalizate T în raport cu coordonata generalizată corespunzătoare. Aceasta reprezintă <u>a treia ipoteză</u> de bază a formalismului analitic.

Înlocuind P_i din (1.19) în (1.25) obținem <u>ecuațiile Lagrange de speța I-a</u>, care caracterizează procesele disipative (neconservative):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, f \tag{1.26}$$

Pentru a explica noțiunea de <u>sistem conservativ</u>, considerăm lucrul mecanic efectuat de o forță $\vec{F}$ care deplasează o particulă pe traiectoria M_1, M_2:



$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} \tag{1.27}$$

Deoarece masa este constantă:

$$L_{12} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \frac{1}{2} m \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\vec{v}^2\right)dt = \frac{1}{2} m\,(v_2^2 - v_1^2) \tag{1.28}$$

Se constată că lucrul mecanic L_{12} este egal cu variația energiei cinetice:

$$L_{12} = T_2 - T_1 \tag{1.29}$$

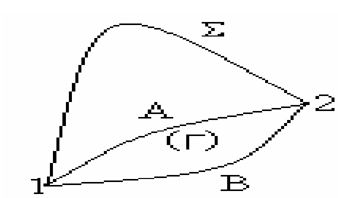
Forțele care au proprietatea că lucrul mecanic (1.27) este <u>independent de drum</u> se numesc <u>forțe conservative</u>. Astfel, pentru două drumuri diferite A şi B trebuie să fie satisfăcută relația:

$$\int_{1(A)}^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{1(B)}^2 \vec{F}\, d\vec{r} \tag{1.30}$$

sau:

$$\int_{1(A)}^2 \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{1(B)}^2 \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{1(A)}^2 \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{2(B)}^1 \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \tag{1.31}$$

Rezultă că o forță este <u>conservativă</u> dacă lucrul mecanic efectuat pe o traiectorie închisă Γ este nul. După <u>teorema lui Stokes</u>, circulația vectorului $\vec{F}$ de-a lungul curbei închise Γ care mărgineşte suprafața Σ este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{F}$ prin suprafața Σ.



$$\oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} \tag{1.32}$$

Din relațiile (1.31) şi (1.32) rezultă condiția necesară şi suficientă pentru ca o forță să fie conservativă:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0 \tag{1.33}$$

Ultima relație arată posibilitatea definirii unei funcții care nu depinde explicit de timp U(r) = U(x, y, z) astfel încât forța $\vec{F}$ să derive din gradientul acestei funcții:

$$\vec{F} = - \nabla U = - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{1.34}$$

întrucât întotdeauna rotorul unui gradient este nul. Semnul minus este ales pentru ca funcția U să aibă semnificație fizică. Funcția U(r) definită astfel se numeşte <u>energie potențială</u>. Deci lucrul mecanic

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^2 -\nabla U d\vec{r} = \int_1^2 -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) =$$

$$= \int_1^2 -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \int_1^2 -dU = U_1 - U_2$$

Rezultă:

$$dL = - dU \tag{1.35}$$

$$L_{12} = U_1 - U_2 \tag{1.36}$$

Din (1.29) şi (1.36) obținem:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \tag{1.37}$$

Relația (1.37) exprimă <u>teorema conservării energiei</u>: energia totală a sistemului este constantă dacă forțele ce acționează asupra sistemului sunt <u>conservative</u>.

Astfel, când U nu depinde explicit de timp, sistemul este un <u>sistem conservativ</u>.

În cazul <u>proceselor nedisipative (conservative)</u>, lucrul mecanic se poate datora doar unei modificări a energiei de interacțiune, care în general este denumită potențial U (q_i) al <u>forțelor generalizate</u>. Astfel putem generaliza relația (1.35):

$$- dU = dL = \sum_{i=1}^{f} Q_i dq_i \tag{1.38}$$

Luînd q_j = const. Pentru orice $j \neq i$ rezultă:

$$Q_i = - \left(\frac{dU}{dq_i}\right)_{q_j = const.} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, f \tag{1.39}$$

<u>În acest caz se poate defini funcția Lagrange</u>

$$L (q_i, \dot{q}_i, t) = T (q_i, \dot{q}_i, t) - U (q_i) \tag{1.40}$$

Deoarece:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overset{(1.19)}{=\!=} P_i \tag{1.41}$$

iar

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \overset{(1.39)}{=\!=} \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \overset{(1.25)}{=\!=} F_i \qquad (1.42)$$

ecuațiile (1.26) devin:

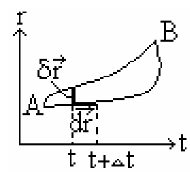
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, f \qquad (1.43)$$

Acestea sunt ecuațiile Lagrange de speța a II-a, care sunt valabile în cazul proceselor conservative.

Sistemul ecuațiilor Lagrange cuprinde f ecuații diferențiale de ordinul doi. Pentru ca mişcarea să fie complet determinată, este necesar să ştim valorile inițiale ale coordonatelor şi vitezelor generalizate.

3. Principiul lui Hamilton

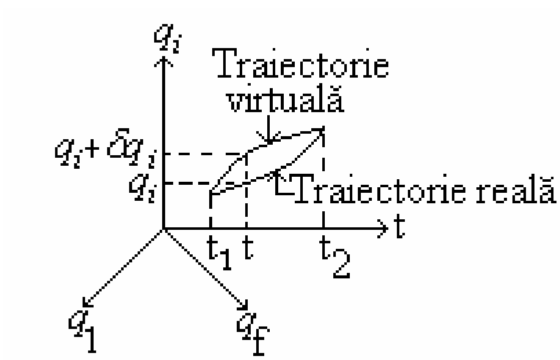
Prin deplasare reală, $d\vec{r}$, vom înțelege orice deplasare compatibilă cu legăturile, iar prin deplasare virtuală, $\delta\vec{r}$, vom înțelege orice deplasare compatibilă cu legăturile la un moment dat între două traiectorii învecinate.



Variațiile $\delta\vec{r}$ nu trebuie confundate cu diferențialele $d\vec{r}$, care sunt variații considerate pe o aceeaşi traiectorie, dar la momente diferite. Deoarece operațiile de variație a traiectoriei δ şi cele de derivare în raport cu timpul $\frac{d}{dt}$ sunt independente, ordinea lor este inversabilă, adică:

$$\delta\dot{r} = \delta\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\delta r \qquad (1.44)$$

Considerăm în spațiul fictiv al configurațiilor şi timpului ($q_1, \ldots, q_f$, t) o curbă care descrie evoluția reală a sistemului $q_i = q_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, f$ şi o altă curbă infinit vecină, care descrie o evoluție virtuală a sistemului $q_{i,virt} = q_{i,virt}(t)$.



$$|\delta q_i| = |q_{i,virt}(t) - q_{i,real}(t)| << |q_i|$$

$$|\delta \dot{q}_i| << |\dot{q}_i(t)|$$

Întrucât atât traiectoria reală, cât şi cea virtuală sunt trasate între aceleaşi stări extreme

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \tag{1.45}$$

Deoarece traiectoria virtuală este foarte apropiată de cea reală

$$L(q_{i,virt}, \dot{q}_{i,virt}, t) = L(q_{i,real} + \delta q_i, \dot{q}_{i,real} + \delta\dot{q}_i, t) =$$

$$= L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right) \quad \text{dezvoltare în serie Taylor} \tag{1.46}$$

Variația funcției Lagrange între valorile corespunzătoare traiectoriei virtuale, respectiv traiectoriei reale:

$$\delta L = L(q_{i,virt}, \dot{q}_{i,virt}, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

devine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right) \tag{1.47}$$

Menționăm că momentul de timp este acelaşi, t (vezi figura). Integrăm relația (1.47) de la t_1 la t_2 şi înlocuim $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ prin $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, în conformitate cu ecuațiile Lagrange de speța a II-a.

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt = \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt + \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\,dt \tag{1.48}$$

Deoarece operatorii δ şi $\frac{d}{dt}$ sunt independenți, putem scrie:

$$\delta\,\dot{q}_i\,dt = \delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right)dt = \delta\,dq_i = d(\delta\,q_i) \tag{1.49}$$

Înlocuind (1.49) în (1.48) obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt = \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,d(\delta q_i) = \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \overset{(1.45)}{=} 0 \tag{1.50}$$

Deoarece operațiile δ şi $\int_{t_1}^{t_2}$ sunt independente, obținem:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt = \underline{\delta S = 0} \tag{1.51}$$

unde:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt \qquad (1.52)$$

se numeşte acţiunea sistemului. Relaţia (1.51) constituie expresia matematică a principiului lui Hamilton.

Principiul lui Hamilton arată că evoluţia unui sistem fizic între o stare iniţială şi o stare finală se realizează după acea traiectorie din spaţiul configuraţiilor şi timpului pentru care acţiunea Hamilton S atinge o valoare minimă (cazul cel mai frecvent), o valoare maximă sau este constantă. De obicei principiul lui Hamilton se numeşte principiul minimei acţiuni sau, mai general, principiul acţiunii extreme.

Se poate proceda şi invers, adică se postulează principiul lui Hamilton şi pe baza acestuia se deduc ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a. Astfel principiul lui Hamilton este echivalent cu ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a.

4. Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton

Se numesc variabile canonice un ansamblu format din f coordonate generalizate şi f impulsuri generalizate. Un spaţiu cu 2 f dimensiuni ale cărui coordonate sunt variabilele $q_1, q_2, \ldots, q_f, p_1, p_2, \ldots, p_f$ se numeşte spaţiul fazelor.

Din relaţia (1.41) şi ecuaţiile Lagrange (1.43) obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (1.53)$$

Diferenţiala totală a funcţiei Lagrange este:

$$dL = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{f} \dot{p}_i dq_i + \underline{\sum_{i=1}^{f} p_i d\dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \dot{p}_i dq_i + \underline{d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Am folosit relaţiile (1.41) şi (1.53). Ultima relaţie se poate pune sub forma:

$$d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{f} \underline{\dot{q}_i} dp_i - \sum_{i=1}^{f} \underline{\underline{\dot{p}_i}} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (1.54)$$

Se defineşte funcţia lui Hamilton H

$$H\,(qi, pi, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \qquad (1.55)$$

care are semnificaţia de energie totală a sistemului.

Diferenţiind H obţinem:

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \underline{\underline{\frac{\partial H}{\partial q_i}}} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \underline{\frac{\partial H}{\partial p_i}} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (1.56)$$

Prin identificarea relaţiilor (1.54) şi (1.56) rezultă ecuaţiile canonice ale lui Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, f \qquad (1.57)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

şi în plus $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ (1.58)

Sistemul ecuaţiilor Hamilton cuprinde 2 f ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

Sistemele de ecuaţii Lagrange de speţa a II-a sunt <u>echivalente</u> cu sistemele de ecuaţii Hamilton dacă:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \;,\quad H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L$$

5. <u>Teorema lui Liouville</u>

Fiecare punct din spaţiul fazelor corespunde unei stări determinate a sistemului.

<u>Teorema lui Liouville</u> arată că volumul ocupat de un domeniu din spaţiul fazelor este <u>invariant în timpul</u> evoluţiei stărilor.

Fie $q'_i = q_i(t+dt) = q_i(t) + \frac{dq_i(t)}{dt} dt = q_i + \dot{q}_i dt$ (1.59)

şi

$$p'_i = p_i(t+dt) = p_i(t) + \frac{dp_i(t)}{dt} dt = p_i + \dot{p}_i dt$$

coordonatele şi impulsurile generalizate ale unui sistem la momentul t + dt iar $dV = \prod_{i=1}^{f} (dq_i dp_i)$ şi $dV' = \prod_{i=1}^{f} (dq'_i dp'_i)$ volumele unor elemente spaţiale infinit de mici din jurul punctelor $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ şi $(q'_1, \ldots, q'_f, p'_1, \ldots, p'_f)$ în spaţiul fazelor. Legătura dintre dV' şi dV este dată de relaţia:

dV' = D dV (1.60)

unde D este <u>determinantul funcţional</u> (iacobianul)

$$D = \frac{\partial (q'_1, \ldots, q'_f, p'_1, \ldots, p'_f)}{\partial (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)} = \frac{\partial (q'_i, p'_i)}{\partial (q_i, p_i)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_1}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial q'_1}{\partial q_f} \vdots & \frac{\partial q'_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial q'_1}{\partial p_f} \\ \frac{\partial q'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial q_2} & \ldots\ \ldots & & \ldots & \ldots & \frac{\partial q'_2}{\partial p_f} \\ \frac{\partial p'_f}{\partial q_1} & \ldots & \ldots\ \ldots & & \ldots & \ldots & \frac{\partial p'_f}{\partial p_f} \end{vmatrix} \overset{(1.59)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} dt & \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_2} dt & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_f} dt \\ \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_1} dt & 1 + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} dt & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \dot{p}_f}{\partial q_1} dt & \ldots\ \ldots & \ldots & 1 + \frac{\partial \dot{p}_f}{\partial p_f} dt \end{vmatrix}$$

Dezvoltând determinantul rezultă termeni care conţin diferite puteri ale lui dt: $(dt)^0$, $(dt)^1$, $(dt)^2$, . . . , $(dt)^{2f}$. Deoarece dt este o mărime infinitezimală vom neglija termenii ce conţin dt la puteri $\geq$ 2. Termenii ce conțin dt la puterea zero și unu provin numai din diagonala principală a determinantului, astfel că:

$$D = \left(1+\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1}dt\right)\cdots\left(1+\frac{\partial \dot{q}_f}{\partial q_f}dt\right)\left(1+\frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1}dt\right)\cdots\left(1+\frac{\partial \dot{p}_f}{\partial p_f}dt\right) \approx 1 + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right)dt =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right]dt = 1$$

unde am folosit ecuațiile lui Hamilton şi faptul că H este o funcție continuă şi deci

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \quad \text{(relația lui Schwartz)}$$

Din (1.60) rezultă dV' = dV , adică volumul din spațiul fazelor se conservă pentru sisteme conservative.