

Probleme- Bazele experimentale ale Mecanicii Cuantice.

1). Un model de corp negru este realizat sub forma unei cavitati prevazute cu o mica deschidere cu diametrul $d=1\text{cm}$. Cavitata este incalzita cu o rezistenta electrica ce consuma puterea $P=100\text{W}$. Din energia consumata se pierde prin pereti 10%.

Orificiul emite radiatie ca un corp negru cu temperatura T . Sa se calculeze aceasta temperatura ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$).

2). Radiatia Soarelui are un spectru cu o compozitie apropiata de radiatia unui corp negru pentru care maximul de putere corespunde lungimii de unda $\lambda = 0,48\mu\text{m}$. Sursa de unde de radiofrecventa in domeniul metrilor este coroana solara. Sa se determine:

- Masa pierduta de Soare intr-o secunda prin radiatie;
- Timpul in care masa Soarelui se diminueaza cu 1%;
- Fluxul de energie ce cade pe unitatea de suprafata, pentru undele radio care vin de la Soare, pe unitatea de frecventa, in jurul frecventei de 1MHz. Presupunem ca Soarele emite ca un corp negru.

Masa Soarelui $M_s = 1,97 \cdot 10^{30} \text{kg}$, raza coroanei solare $R_s = 7 \cdot 10^8 \text{m}$, raza orbitei Pamintului $R_{sp} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{m}$, temperatura la suprafata Soarelui $T=5500\text{K}$.

3). Formula Planck pentru densitatea energetica spectrala a radiatiei termice este:

$$\omega_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

a) Sa se calculeze constanta σ din legea Stefan-Boltzmann, $P = \sigma T^4$, stiind ca intre densitatea energetica ω si puterea de emisie exista legatura $\omega = \frac{4}{c} P$;

b) Sa se exprime densitatea energetica spectrala pe unitatea de interval de lungime de unda;

c) Sa se determine constanta b din legea Wien:

$$\lambda_m \cdot T = b.$$

Se dau: $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$, $k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{J} / \text{K}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{m} / \text{s}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \text{ ecuatia transcendentă } \frac{5}{5-x} = e^x \text{ are solutia } x = 4,9651.$$

4). Fie radiatia termica la temperatura T .

a) Sa se arate ca numarul de fotoni pe unitatea de volum este $N = 2,029 \cdot 10^7 T^3 \text{ fotoni} / \text{m}^3$;

b) Valoarea medie a energiei per foton este $\bar{\epsilon} = 3,73 \cdot 10^{-23} T \text{ (J)}$;

c) Sa se particularizeze pentru radiatia de fond de 3K.

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2,4041 \right).$$

5). Sa se calculeze temperatura T la care energia medie a moleculelor unui gaz perfect, monoatomic, este egala cu energia fotonilor corespunzatori lungimii de unda pentru care densitatea spectrala de energie data de formula Planck are valoare maxima, pentru:

- a) corpul omenesc ($\lambda_m=10\mu\text{m}$);
- b) suprafata Soarelui ($\lambda_m=5500\text{\AA}$)

6). Care este energia si impulsul unui:

- a) foton γ cu $\lambda = 10^{-13} \text{ m}$?
- b) foton de lumina vizibila cu $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$?
- c) foton de unda radio cu $\lambda = 10 \text{ m}$?

7). Pragul fotoelectric al unei fotocatode de Cs are lungimea de unda $\lambda_0 = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Se trimite pe fotocatoda un fascicul de lumina monocromatica cu lungimea de unda $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, cu un flux $\Phi = 1 \text{ W}$.

- a) Sa se calculeze energia cinetica maxima a fotoelectronilor si lungimea de unda de Broglie atasata;
- b) Acelasi lucru pentru iluminare cu raze X cu $\lambda_1 = 10^{-11} \text{ m}$;
- c) Stiind intensitatea curentului fotoelectric $I=16,3\text{mA}$, sa se calculeze procentul din electronii incidenti care scot electroni (randament cuantic).

8). Suprafata unui metal este iluminata cu un fascicul de radiatii monocromatice cu $\lambda_1 = 350 \text{ nm}$. Iluminand aceeasi suprafata cu radiatii monocromatice cu $\lambda_2 = 300 \text{ nm}$, potentialul de franare creste cu $\Delta U_f = 0,589 \text{ V}$. Cunoscand constanta Planck si viteza luminii, sa se determine sarcina electronului.

9). Pentru un anumit unghi θ fata de directia initiala a unui fascicul de raze X, cu lungimea de unda $\lambda_0 = 0,1 \text{ \AA}$, s-a constatat ca deplasarea Compton este $\Delta\lambda = 0,024 \text{ \AA}$. Sa se determine:

- a) energia transferata electronului de recul;
- b) viteza electronului de recul;
- c) unghiul sub care sunt difuzati fotonii.

10). Un foton de raze X cu $\lambda_0 = 1 \text{ \AA}$ cade pe un electron liber aflat in repaus. Fotonul este imprastiat la un unghi $\theta = 30^\circ$ fata de directia de incidenta.

- a) Sa se calculeze deplasarea Compton, $\Delta\lambda$;
- b) Care este unghiul de recul al electronului;
- c) Ce fractiune din energia initiala pierde fotonul.

11). Un atom de hidrogen in repaus emite un foton corespunzator tranzitiei $n=2 \rightarrow n=1$. Fotonul smulge un electron al altui atom de hidrogen aflat in repaus, in starea excitata cu nr cuantic $n=2$. Sa se calculeze:

- a) Raportul dintre viteza primului atom de hidrogen dupa emisia fotonului si viteza luminii;
- b) Frecventa fotonului emis;

c) Viteza fotoelectronului scos prin absorbtia fotonului.

Constanta Rydberg are valoarea $R_H = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$, iar pt atomul de hidrogen $Mc^2 = 938MeV$, pentru electron $mc^2 = 0,511MeV$.

12).

- Sa se calculeze lungimea de unda a radiatiei emise de atomul de hidrogen in urma tranzitiei electronului de pe nivelul excitat $n=2$, pe nivelul fundamental;
- Stiind durata medie de viata a starii excitate, $\tau = 10^{-8} s$, sa se determine numarul de revolutii efectuate de electron nivelul $n=2$;
- Ce scadere de temperatura trebuie sa sufere un gaz de hidrogen pentru ca pierderea de energie cinetica a unei molecule sa fie egala cu scaderea energiei atomului in tranzitia considerata.

13). Sa se calculeze potentialul de ionizare al atomului de hidrogen. Constanta Rydberg are valoarea $R_H = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$.

14). Atomii de hidrogen aflati in starea fundamentala se excita prin iradiere cu radiatie monocromatica. Prin dezexcitare se emit radiatii monocromatice cu trei lungimi de unda diferite. Sa se calculeze lungimea de unda a radiatiilor incidente si lungimile de unda ale radiatiilor emise.

15). Care este energia cinetica pentru:

- un electron;
- o particula α (atom de He dublu ionizat);
- un neutron,
- avand lungimea de unda de Broglie de 1\AA ?

16). Consideram ca legea Bragg, $n\lambda = 2d \sin \theta$, este valabila si pentru undele de Broglie.

- Sa se calculeze lungimea de unda asociata unui electron accelerat la o diferenta de potential de $54V$;
- Intr-o experienta tip Devisson si Germer, fasciculul electronic, accelerat la $U=15V$, este difractat de un monocristal de Al, cu distanta intre atomi $D=2,33\text{\AA}$. Sa se calculeze unghiurile facute de fasciculele difractate cu suprafata cristalului pentru primele doua maxime.

Indicatii

1). Puterea de emisie a corpului negru este data de legea Stefan-Boltzman $P = \sigma T^4$. Aceasta putere reprezinta fractiunea $\eta = 0,9$ din puterea consumata (in conditii de echilibru). Notand S suprafata orificiului, rezulta:

$$\sigma T^4 S = \eta P$$

$$T = \sqrt{\frac{4\eta P}{\pi d^2 \sigma}}.$$

2).

a) $\Delta m \cdot c^2 = 4\pi R_S^2 \cdot P$

b) $0,01 M_S = \Delta m \cdot t$

c) $\Phi = \frac{R_S^2}{R_{SP}^2} \frac{c}{4} \omega$

Pe unitatea de interval de frecventa $\Phi_\nu = \frac{R_S^2}{R_{SP}^2} \frac{c}{4} \omega_\nu$. Vom lua $\omega_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$ si $\nu = 1\text{MHz}$.

3).

a) v. seminar.

b) Trecand la densitatea energetica pe unitatea de interval de lungime de unda, din conditia

$\omega_\nu d\nu = -\omega_\lambda d\lambda$ si relatia $\lambda = c/\nu$ se obtine $\omega_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \omega_\nu(\frac{c}{\lambda}, T)$, astfel ca rezulta:

$$\omega_\lambda(\lambda, T) = 8\pi h c \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}.$$

c) Maximul densitatii de energie se obtine din conditia $\frac{d\omega_\lambda}{d\lambda} = 0$, de unde se obtine:

$$\left(5 - \frac{hc}{k_B T \lambda}\right) e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} = 5.$$

Notam $x = hc / k_B T \lambda$. Se obtine ecuatia $\frac{5}{5-x} = e^x$, cu solutia $x_m = 4,9651$.

Se obtine:

$$\lambda_m \cdot T = \frac{hc}{k_B x_m} = 0,28978 \cdot 10^{-2} \text{ mK}.$$

4).

a) Numarul de fotoni pe unitatea de volum si unitatea de interval de frecventa este

$$n(\nu, T) = \frac{\omega_\nu(\nu, T)}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

Numarul total de fotoni pe unitatea de volum va fi:

$$N = \int_0^\infty n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi k_B^3}{h^3 c^3} \cdot T^3 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 2,4041 \frac{8\pi k_B^3}{h^3 c^3} \cdot T^3 = 2,029 \cdot 10^7 T^3.$$

b) Densitatea de energie este (v. seminar): $w = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} T^4.$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega}{N} = 3,73 \cdot 10^{-23} T \text{ (J)}$$

6). Egalam energia medie a moleculelor unui gaz ideal, monoatomic, $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} k_B T$, cu energia unui

foton, $\varepsilon = h\nu$.

a) $T=960\text{K}$; b) $T=15000\text{K}$.

7).

$$a) T = h\nu - h\nu_0 = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 0,41 \text{ eV}$$

In acest caz T este mult mai mica decat energia de repaus a electronului ($m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$).

Electronul se misca nerelativist.

$$T = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2T}{m_0 c^2}} = 1,26 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2m_0 c^2 T}} = 19,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

b) $T = h\nu - h\nu_0 \cong hc \frac{1}{\lambda} = 0,123 \text{ MeV}$, comparabila cu energia de repaus. Vom folosi expresia

relativista pentru energia cinetica:

$$mc^2 = m_0 c^2 + T$$

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{m_0 c^2}\right)^2}} \cong 0,6$$

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \Lambda_C \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0,8\Lambda_C, \text{ unde } \Lambda_C \text{ este lungimea de unda Compton a}$$

fotonului.

b) Numarul de electroni scosi in timpul t este $n = \frac{It}{e}$. Numarul de fotoni incidenti in timpul t

$$\text{este } N = \frac{\Phi t}{\frac{hc}{\lambda}}.$$

Rezulta randamentul cuantic: $\eta = \frac{n}{N} = 0,04$.

9).

$$a) \Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Energia transferata electronului de recul este $E_{rec} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = 24 \cdot 10^3 \text{ KV}$.

$$b) E_{rec} = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$v \cong 6,5 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

c) 90° .

11).

a) Impulsul total al sistemului se conserva. Dupa emisie, atomul are un impuls egal si de semn contrar cu al fotonului.

Energia fotonului este $\varepsilon = E_2 - E_1 = hcR_H \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} hcR_H$, iar impulsul $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{3}{4} hR_H$.

$$p = Mv \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{pc}{Mc^2} = \frac{\varepsilon}{Mc^2}.$$

b)

$$\varepsilon = h\nu = E_2 - E_1 = \frac{3}{4} hcR_H$$

$$c) h\nu = (0 - E_2) + T = hcR_H \frac{1}{2^2} + T \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} hcR_H \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{hcR_H}{mc^2}}.$$

12).

$$b) t = \frac{2\pi r_2}{v_2}$$

$r_n = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc} n^2$, unde $\alpha \cong \frac{1}{137}$ este constanta structurii fine.

$$mv_n r_n = n\hbar \quad \Rightarrow \quad \frac{r_n}{v_n} = \frac{\hbar}{\alpha^2 mc^2} n^3.$$

c) Energia cinetica medie a unei molecule este $\frac{3}{2}k_B T$. Deci $\Delta E = \frac{3}{2}k_B \Delta T$.

Energia unui nivel este $E_n = -\frac{1}{2}mc^2\alpha^2 \frac{1}{n^2}$. Rezulta $\Delta E = \frac{3}{8}mc^2\alpha^2$.

13). Potentialul de ionizare este dat lucrul mecanic necesar pentru a deplasa electronul de pe orbita sa la infinit:

$$eU_{ioniz} = L_{ioniz} = E_{\infty} - E_1$$

Cum $E_n = -hcR_H \frac{1}{n^2}$, rezulta:

$$U_{ioniz} = \frac{hcR_H}{e} = 13,6eV.$$

14). Deoarece se emit numai trei linii spectrale, dezexcitarea se face de pe nivelul $n=3$. Cu

formula Balmer $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, rezulta:

$$\lambda_{31} = 102,5nm; \quad \lambda_{32} = 656,1nm; \quad \lambda_{21} = 121,5nm.$$