

Complemente de Fizică

Daniela Buzatu, Cristina Stan

18 noiembrie 2004

Cuprins

1	Vectori	7
1.1	Reprezentarea unui vector	7
1.1.1	Reprezentarea geometrică	8
1.1.2	Reprezentarea analitică	9
1.1.3	Reprezentarea matricială	10
1.2	Operații cu vectori	11
1.2.1	Adunarea și scăderea vectorilor	11
1.2.2	Înmulțirea vectorilor	14
1.2.3	Derivarea vectorilor	22
1.2.4	Integrarea vectorilor	23
1.3	Operatori vectoriali diferențiali	25
1.3.1	Operatorul gradient	26
1.3.2	Divergență	31
1.3.3	Rotor	36
1.4	Probleme	41
2	Mecanica clasică	51
2.1	Cinematica punctului material	51
2.2	Transformările Galilei	56
2.3	Principiile dinamicii newtoniene	59
2.4	Interacțiunile fundamentale	65

2.5	Teoremele generale ale Mecanicii pentru un punct material	68
2.5.1	Teorema impulsului	68
2.5.2	Teorema momentului cinetic	69
2.5.3	Teorema energiei cinetice	71
2.5.4	Energia potențială. Energia mecanică. Teorema de conservare a energiei mecanice	75
2.6	Teoremele generale ale Mecanicii pentru un sistem de puncte materiale	78
2.6.1	Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale	80
2.6.2	Teorema momentului cinetic total pentru un sistem de puncte materiale	84
2.6.3	Teorema energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale. Conservarea energiei mecanice	86
2.6.4	Teoremele lui König	90
2.7	Probleme	93
3	Mecanica analitică	117
3.1	Mărimi caracteristice	117
3.2	Formalismul Lagrange	123
3.2.1	Principiul lucrului mecanic virtual	123
3.2.2	Forțele generalizate	125
3.2.3	Ecuatiile Lagrange	126
3.3	Formalismul Hamilton	128
3.3.1	Principiul lui Hamilton	128
3.3.2	Ecuatiile canonice	133
3.3.3	Semnificația funcției hamiltoniană	136
3.3.4	Parantezele lui Poisson	137

3.3.5	Transformările canonice	139
3.3.6	Ecuția lui Hamilton-Jacobi	141
3.4	Probleme	143
4	Mecanica cuantică	163
4.1	Aparatul matematic al Mecanicii cuantice .	163
4.1.1	Spații liniar complexe	163
4.1.2	Spații unitare și spații Hilbert	167
4.1.3	Operatori liniari. Operații cu opera- tori liniari	172
4.1.4	Operatori unitari	176
4.1.5	Problema cu valori proprii asociată unui operator hermitic	177
4.1.6	Observabile	180
4.1.7	Reprezentarea matricială a vectorilor și operatorilor	183
4.2	Principiile mecanicii cuantice	188
4.2.1	Principiul I (principiul stărilor)	188
4.2.2	Principiul II	191
4.2.3	Principiul III (principiul interpretării statistice)	194
4.2.4	Principiul IV (principiul evoluției tem- porale)	199
4.2.5	Principiul V	204
4.3	Probleme	206
A	Elemente de calcul variațional	225
B	Funcția δ	229
C	Integrale Poisson	231

Capitolul 1

Vectori

Unele mărimi fizice sunt complet determinate printr-o singură **proprietate, care este chiar valoarea lor numerică**. Aceste mărimi, cum ar fi: temperatura, volumul, timpul, energia, frecvența, se numesc **scalari**. Operațiile matematice cu scalari sunt operații aritmetice obișnuite.

Există însă mărimi fizice a căror descriere completă necesită specificarea **direcției, sensului și respectiv a punctului de aplicație**. Aceste mărimi se numesc **vectori**, iar exemple în acest sens sunt: viteza, accelerația, forța, impulsul, momentul unghiular, momentul forței, etc.

1.1 Reprezentarea unui vector

Există mai multe posibilități de exprimare a unui vector: *geometrică, analitică, matricială*. Fiecare dintre ele prezintă avantaje și limite, de aceea reprezentările sunt alese și folosite în funcție de problema concretă care se dorește a fi rezolvată.

1.1.1 Reprezentarea geometrică

Un vector este reprezentat ca un segment orientat, care pornește dintr-un punct numit **origine** sau **punct de aplicație**. Segmentul este așezat pe dreapta suport AA' și are sensul indicat de vârful săgeții (Fig.1).

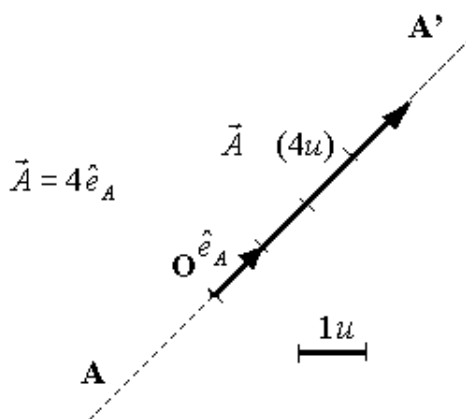


Fig. 1

Ca urmare, un vector este caracterizat de următoarele patru mărimi:

- **origine** (punct de aplicație) - punctul de unde pornește
- **direcție** - dreapta suport pe care este așezat
- **sens** - indică încotro se îndreaptă
- **modul**(mărime) - valoarea numerică

Modulul sau **mărimea** vectorului este proporțională cu lungimea segmentului orientat. Modulul vectorului se notează $|\vec{A}|$ sau A .

Să considerăm un vector de mărime egală cu unitatea, notat \vec{e}_A , orientat pe direcția și în sensul vectorului \vec{A} . Acesta se numește **versor**¹. În aceste condiții, se poate scrie:

$$\vec{A} = A\vec{e}_A \quad (1.1)$$

1.1.2 Reprezentarea analitică

În reprezentarea analitică, un vector se exprimă prin proiecțiile sale pe un sistem de axe ortogonale, de exemplu, sistemul cartezian (Fig. 2).

Să notăm cu A_x, A_y, A_z proiecțiile lui \vec{A} de-a lungul axelor Ox, Oy, Oz . Atunci:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad (1.2)$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii direcțiilor Ox, Oy, Oz .

Mărimea vectorului se află folosind teorema lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.3)$$

De exemplu dacă: $\vec{v} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ (m/s), atunci $v_x = 7$ m/s, $v_y = -3$ m/s, și $v_z = 2$ m/s; prin urmare $v = \sqrt{49 + 9 + 4}$ m/s = $\sqrt{62}$ m/s = 7.87m/s.

¹În literatura de specialitate se folosesc și alte notații pentru versori.

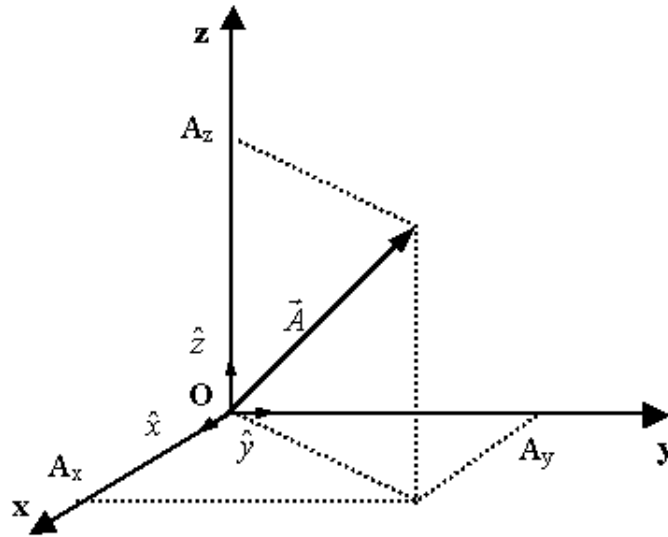


Fig. 2

1.1.3 Reprezentarea matricială

Orice vector poate fi exprimat ca o matrice cu o singură linie sau cu o singură coloană, fiecare element al acesteia reprezentând componenta (proiecția vectorului) pe o anumită direcție. De exemplu, dacă vectorul este reprezentat analitic prin relația (1.2), atunci :

$$\vec{A} = (A_x \quad A_y \quad A_z) \quad (1.4)$$

sau

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

1.2 Operații cu vectori

1.2.1 Adunarea și scăderea vectorilor

Fie \vec{A} și \vec{B} doi vectori oarecare. **Suma** $\vec{A} + \vec{B}$ este, de asemenea, un vector:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \quad (1.6)$$

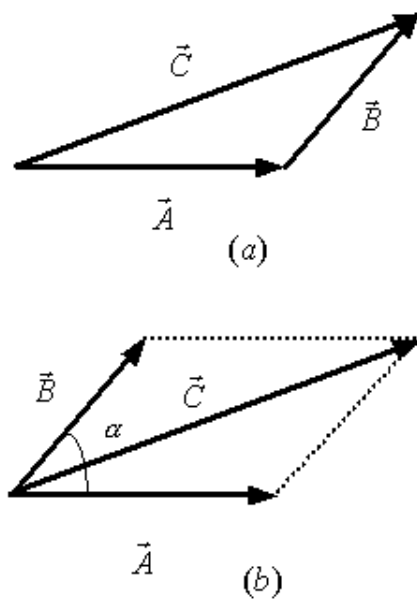


Fig. 3: (a) metoda poligonului; (b) metoda paralelogramului

Mărimea vectorului rezultat se poate determina prin oricare din modalitățile de reprezentare ale vectorilor discutate anterior.

În Fig. 3 sunt reprezentate două metode geometrice de aflare ale vectorului sumă.

Prin **regula poligonului** (Fig. 3a) vectorul rezultat a doi (sau mai mulți) vectori se află trasând segmentul ce închide conturul poligonal construit din vectorii așezați vârf-origine. Originea vectorului rezultat se află în originea primului vector iar vârful - în vârful ultimului vector al sumei.

În Fig. 3b este ilustrată adunarea a doi vectori prin metoda paralelogramului. Conform **regulii paralelogramului**, vectorul rezultat este diagonala mare a paralelogramului construit de cei doi vectori concurenți \vec{A} și \vec{B} .

Din Fig. 3 se observă că **adunarea este comutativă**. Această construcție geometrică permite calculul mărimii vectorului sumă cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizate:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha} \quad (1.7)$$

Dacă suma a doi vectori este egală cu zero, atunci vectorii sunt egali ca mărime și au sensuri opuse.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = -\vec{A} \quad (1.8)$$

Această relație definește **vectorul opus** și permite definirea operației de **scădere** a doi vectori ca adunarea dintre un vector, \vec{A} , cu vectorul opus, $(-\vec{B})$.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (1.9)$$

Să exemplificăm, în continuare, adunarea vectorilor, plecând de la reprezentarea lor analitică. În coordonate carteziane:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1.10)$$

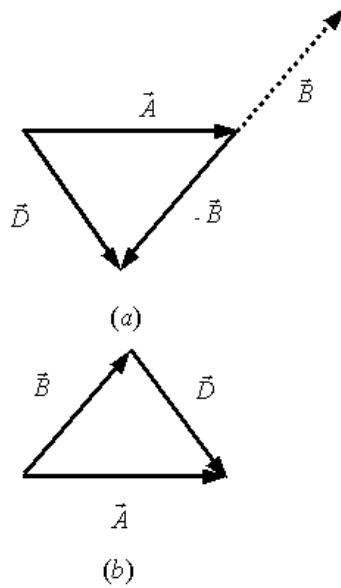


Fig. 4: Determinarea vectorului diferență, \vec{D} ; (a) prin adunarea lui \vec{A} cu vectorul opus $-\vec{B}$; (b) vectorul diferență, \vec{D} , unește vârfurile celor doi vectori \vec{A} și \vec{B} și are sensul înspre vectorul descăzut

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \quad (1.11)$$

Componentele vectorului sumă se află prin adunarea algebrică a componentelor (proiecțiilor) corespunzătoare, pe direcțiile Ox , Oy și Oz .

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \quad (1.12)$$

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \quad (1.13)$$

Această procedură analitică poate fi generalizată pentru adunarea

a n vectori \vec{R}_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dacă se cunosc proiecțiile acestor vectori pe axele sistemului de coordonate carteziene, R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} , atunci, vectorul sumă este:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \quad (1.14)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.15)$$

unde

$$R_x = \sum_{i=1}^n R_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n R_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n R_{iz} \quad (1.16)$$

1.2.2 Înmulțirea vectorilor

Există mai multe posibilități de înmulțire a vectorilor. Acestea depind de contextul problemei, rezultatul înmulțirii vectoriale fiind - în unele cazuri - mărimi vectoriale sau scalare.

Înmulțirea unui vector cu un scalar

Din înmulțirea unui vector, \vec{A} cu un scalar μ , rezultă un alt vector, \vec{A}' , de mărime μA .

$$\vec{A}' = \mu \vec{A} = \overline{\mu} \vec{A} \quad (1.17)$$

Direcția vectorului \vec{A}' este aceeași cu a vectorului \vec{A} , iar mărimea și sensul său depind de valoarea scalarului μ :

- dacă $\mu > 0$ sensul lui \vec{A}' este sensul lui \vec{A} ;
- dacă $\mu < 0$ sensul lui \vec{A}' este contrar sensului lui \vec{A} .

Un exemplu de înmulțire a unui vector cu un scalar a fost deja ilustrat în relația (1.1) și în Fig. 1.

Proprietățile adunării și înmulțirii vector-scalar.

- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
- $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$
- $(\lambda\mu)\vec{A} = \lambda(\mu\vec{A}) = \mu(\lambda\vec{A}) = \mu\lambda\vec{A}$
- $(\lambda + \mu)\vec{A} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{A}$
- $\lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$
- $0 \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot 0 = \vec{0}$

Produsul scalar

Produsul scalar a doi vectori se notează cu ” \cdot ”. Rezultatul operației de înmulțire scalară a doi vectori **este un scalar**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha \quad (1.18)$$

unde α reprezintă unghiul dintre vectorii \vec{A} și \vec{B} (Fig. 5).

Dacă vectorii \vec{A} și \vec{B} sunt perpendiculari, produsul scalar este nul, întrucât $\cos 90^\circ = 0$.

Din definiția produsului scalar se observă că acesta este **comutativ**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1.19)$$

Cu ajutorul Fig. 5 se poate da o **interpretare geometrică** a produsului scalar a doi vectori. Așa cum rezultă din figură, proiecția vectorului \vec{A} pe dreapta suport a lui \vec{B} este:

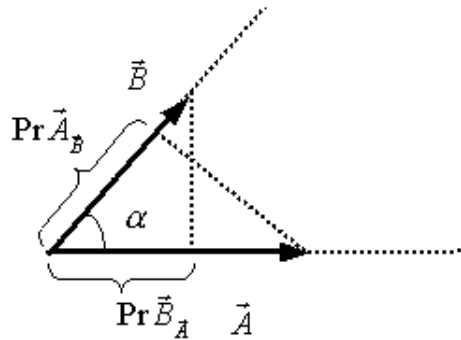


Fig. 5: Interpretarea geometrică a produsului scalar

$$Pr_{\vec{B}}\vec{A} = A \cos \alpha \quad (1.20)$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A \cos \alpha)B \quad (1.21)$$

La fel:

$$Pr_{\vec{A}}\vec{B} = B \cos \alpha \quad (1.22)$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot Pr_{\vec{A}}\vec{B} \quad (1.23)$$

Componenta unui vector pe o axă este proiecția acestuia pe direcția acelei axe. Deoarece direcția și sensul fiecărei axe este determinată de un versor corespunzător, se poate scrie:

$$A_x = A \cos(\vec{A}, \vec{i}) = \vec{A} \cdot \vec{i} \quad (1.24)$$

$$A_y = A \cos(\vec{A}, \vec{j}) = \vec{A} \cdot \vec{j} \quad (1.25)$$

$$A_z = A \cos(\vec{A}, \vec{k}) = \vec{A} \cdot \vec{k} \quad (1.26)$$

Cosinușii unghiurilor dintre vectorul \vec{A} și axele Ox, Oy, Oz se numesc **cosinuși directori**.

$$\cos(\vec{A}, \vec{i}) = \frac{A_x}{A} = \alpha_1 \quad (1.27)$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{j}) = \frac{A_y}{A} = \beta_1 \quad (1.28)$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{k}) = \frac{A_z}{A} = \gamma_1 \quad (1.29)$$

unde α_1, β_1 și γ_1 sunt cosinușii directori ai lui \vec{A} . Ca urmare:

$$\vec{A} = A \cdot (\alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \gamma_1 \vec{k}) = A \vec{e}_A \quad (1.30)$$

unde:

$$\vec{e}_A = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \gamma_1 \vec{k} \quad (1.31)$$

este versorul direcției lui \vec{A} . Într-adevăr:

$$\vec{e}_A \cdot \vec{e}_A = 1 \quad (1.32)$$

deoarece:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \quad (1.33)$$

Întrucât versorii au componentele $\vec{i}(1, 0, 0), \vec{j}(0, 1, 0), \vec{k}(0, 0, 1)$ și sunt reciproc perpendiculari, atunci produsul lor scalar va fi:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (1.34)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (1.35)$$

iar produsul scalar al vectorilor $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ și $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ se exprimă ca:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.36)$$

Exemple de mărimi definite ca produs scalar sunt: lucrul mecanic, fluxul câmpului gravitațional, al câmpului electric sau al câmpului magnetic etc.

Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori \vec{A} și \vec{B} , notat cu " \times " are ca rezultat **un vector**, \vec{C} .

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad (1.37)$$

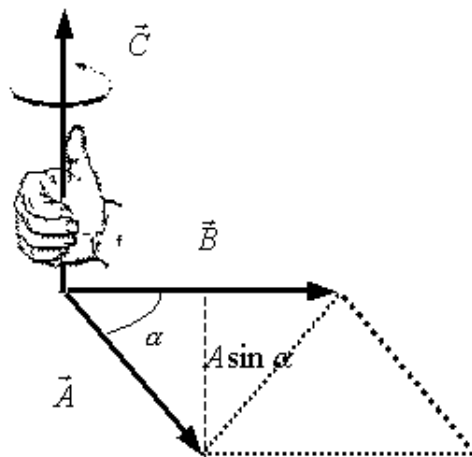


Fig. 6: Ilustrarea regulii burghiului

Prin convenție, produsul vectorial este un vector perpendicular pe planul format de \vec{A} și \vec{B} (Fig. 6). Sensul lui \vec{C} este stabilit de *regula burghiului drept*: se așează burghiul perpendicular

pe planul format de cei doi vectori și se rotește în sensul suprapunerii primului vector al produsului peste cel de-al doilea pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului rezultat.

O astfel de regulă de înmulțire ne atenționează asupra faptului că **produsul vectorial este anticomutativ**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (1.38)$$

Mărimea vectorului rezultat este dată de relația:

$$C = AB \sin \alpha \quad (1.39)$$

Cu ajutorul Fig. 6 se poate da **interpretarea geometrică a produsului vectorial**. Se constată că modulul lui \vec{C} reprezintă o jumătate din aria paralelogramului construit de cei doi vectori.

Să calculăm produsul vectorial folosind acum reprezentarea analitică:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \\ &= A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\vec{k} \times \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \times \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \times \vec{k}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Deoarece produsul vectorial a doi vectori coliniari este zero, iar:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (1.41)$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (1.42)$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (1.43)$$

se obține:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x) \\
 &= \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

Produsul mixt

Produsul mixt include ambele tipuri de înmulțiri dintre vectori. Rezultatul produsului scalar dintre vectorii \vec{C} și produsul vectorial al altor doi vectori \vec{A} și \vec{B} este un scalar, D :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = D \tag{1.45}$$

Dacă vectorii sunt cunoscuți pe componente, atunci produsul mixt se poate calcula sub forma unui determinant caracteristic:

$$D = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.46}$$

Ținând cont de semnificația geometrică a produsului vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, precum și a produsului scalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$, din Fig. 7, rezultă că mărimea lui D este egală cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori (necoplanari).

$$V = \text{aria bazei} \times \text{înălțimea} \tag{1.47}$$

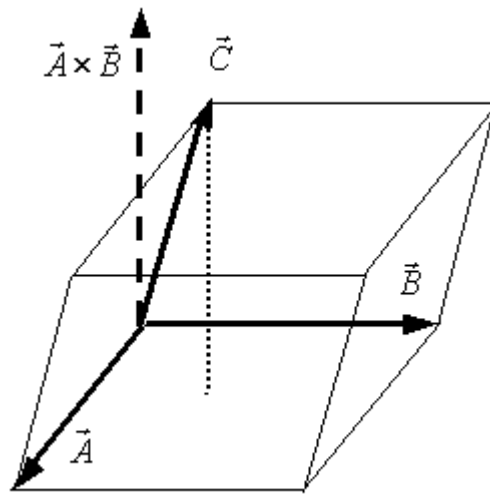


Fig.7: Interpretarea geometrică a produsului mixt

$$= \left| \vec{A} \times \vec{B} \right| C \cos(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{C}) \quad (1.48)$$

$$= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (1.49)$$

Din (1.46) se observă că produsul mixt nu-și schimbă valoarea dacă cei trei vectori sunt comutați ciclic:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (1.50)$$

Triplul produs vectorial

Rezultatul aplicării produsului vectorial între trei vectori este un vector. Deoarece efectuarea repetată a produsului vectorial între vectori este un lucru destul de dificil, acesta se calculează cu ajutorul unor produse scalare² și anume:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (1.51)$$

1.2.3 Derivarea vectorilor

Să considerăm un vector, \vec{A} , exprimat în funcție de o mărime scalară, de exemplu, s . Această dependență poate fi scrisă (în coordonate carteziene) sub forma:

$$\vec{A} = A_x(s)\vec{i} + A_y(s)\vec{j} + A_z(s)\vec{k} \quad (1.52)$$

Derivata unui vector în raport cu un scalar poate fi scrisă în același mod ca și derivata unei funcții scalare, adică:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s} \quad (1.53)$$

În cazul în care funcția scalară s este, de exemplu, timpul t , derivata vectorului \vec{A} devine:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} \quad (1.54)$$

Această relație definește **viteza instantanee a vectorului \vec{A}** .

Procedura matematică de diferențiere a unei funcții vectoriale este similară, așadar, cu cea pentru funcții scalare.

²Această regulă este ușor de reținut sub numele ”**bac minus cab**”.

De exemplu:

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \pm \frac{d\vec{B}}{ds} \quad (1.55)$$

$$\frac{d}{ds}(f(s)\vec{A}(s)) = \frac{df}{ds}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{ds} \quad (1.56)$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} \quad (1.57)$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{ds} \quad (1.58)$$

Toate aceste reguli vor fi folosite în cadrul cinematicii și dinamicii punctului material și ale sistemelor de puncte materiale.

1.2.4 Integrarea vectorilor

Trebuie să facem, mai întâi, distincția netă dintre o **funcție scalară**³ de **variabilă vectorială**, de exemplu:

$$u(\vec{r}) = u(x, y, z) \quad (1.59)$$

și o **funcție vectorială**⁴ de **variabilă vectorială**, de exemplu:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k} \quad (1.60)$$

Ambele funcții sunt definite în orice punct descris de vectorul de poziție \vec{r} și sunt exprimate în sistemul de referință cartezian (Ox, Oy, Oz) .

³Exemple de funcții scalare: densitatea, temperatura, energia potențială, etc.

⁴Exemple de funcții vectoriale: viteza, intensitatea câmpului gravitațional, electric, etc.

Să considerăm o curbă Γ , în spațiul pe care este definită în orice punct funcția vectorială. Integrala funcției vectoriale \vec{a} , de-a lungul curbei Γ , se definește ca:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz), \quad (1.61)$$

unde $d\vec{r}$ reprezintă variația vectorului de poziție în coordonate carteziene:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (1.62)$$

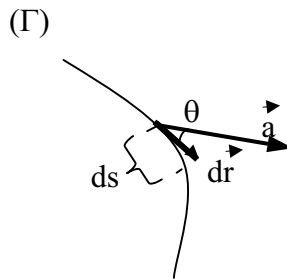


Fig. 8: Ilustrarea procesului de integrare a vectorului \vec{a} de-a lungul conturului Γ

O alternativă de exprimare a expresiei (1.61) este în funcție de distanța s măsurată de-a lungul curbei Γ față de un punct fix (Fig.

8). Dacă notăm cu θ unghiul dintre direcția lui \vec{a} și tangenta la curbă în orice punct, atunci:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} a \cos \theta ds \quad (1.63)$$

1.3 Operatori vectoriali diferențiali

Operatorii diferențiali ce vor fi definiți în cele ce urmează permit exprimarea locală (punctuală) a legilor fizicii. Acești operatori vectoriali (**gradient, divergență și rotor**) pot fi exprimați cu ajutorul operatorului diferențial notat " $\vec{\nabla}$ "⁵, numit "**nabla**".

În coordonate carteziene, operatorul "nabla" are expresia⁶:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.64)$$

Operatorul

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

se numește **operatorul Laplace** sau "**laplaceian**".

În funcție de modul prin care acest operator "se aplică" unei mărimi fizice scalare sau vectoriale se obțin trei situații distincte:

⁵De cele mai multe ori se omite scrierea lui ∇ cu vector deasupra.

⁶Expresia operatorului ∇ depinde de sistemul de coordonate ales

- **gradient** - dacă se aplică unei funcții scalare
- **divergență** - dacă se aplică prin produs scalar unei funcții vectoriale
- **rotor** - dacă se aplică prin produs vectorial unei funcții vectoriale

Expresiile operatorilor vectoriali depind de sistemul de coordonate în care se definesc. Pentru simplitate, vom considera în cele ce urmează doar sistemul cartezian.

1.3.1 Operatorul gradient

Definiție

Operatorul gradient se aplică unor funcții scalare, transformându-le în mărimi vectoriale. Dacă notăm funcția scalară cu $\varphi = \varphi(x, y, z)$ atunci, în coordonate carteziene, expresia *gradientului*⁷ mărimii scalare este:

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \quad (1.65)$$

Semnificația fizică

Să considerăm că valorile funcției scalare φ nu depind, în primă aproximație, decât de coordonatele punctului în care aceasta se evaluează.

Se definește noțiunea de **suprafață de "nivel" constant** sau (**suprafață echipotențială** în cazul în care funcția φ reprezintă

⁷Operatorul gradient este un vector, de aceea, pentru sublinierea acestui lucru, am marcat semnul vector deasupra. În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii vom omite acest semn, fără a uita însă caracteristicile vectoriale ale operatorului.

un potențial), locul geometric al punctelor pentru care funcția φ are aceeași valoare (Fig. 9):

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (1.66)$$

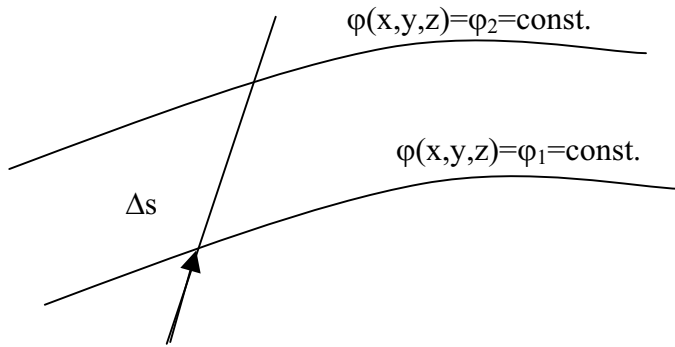


Fig. 9: Suprafețe echipotențiale

Variația funcției între două suprafețe de nivel constant este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z) \quad (1.67)$$

Din Fig. 9 se observă că valoarea $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)$ a variației funcției, raportată la distanța dintre cele două suprafețe, depinde de orientarea segmentului Δs .

Se definește derivata după o direcție a funcției scalare φ , prin relația:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad (1.68)$$

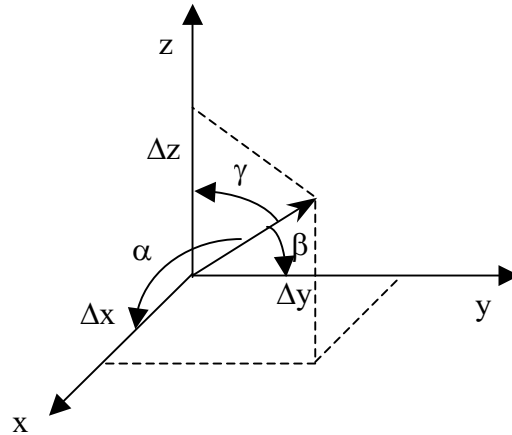


Fig. 10: Orientarea segmentului Δs în raport cu un sistem de axe carteziene.

Dacă fixăm orientarea segmentului Δs în raport cu un sistem de axe carteziene (Fig.10) și ținem cont de faptul că funcția φ depinde de variabila s prin intermediul coordonatelor x, y, z , se obține:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} \right) \quad (1.69)$$

Relația devine:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.70)$$

unde:

$$\cos \alpha = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad (1.71)$$

$$\cos \beta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} \quad (1.72)$$

$$\cos \gamma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad (1.73)$$

Expresia (1.70) corespunde produsului scalar:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad } \varphi \cdot \hat{e}_s \quad (1.74)$$

unde:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.75)$$

sau

$$\text{grad } \varphi = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (1.76)$$

Se observă că **mărimea gradientului** poate fi definită ca:

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \quad (1.77)$$

Să considerăm în continuare, un plan tangent în punctul P , (π), la suprafața de nivel constant $\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const}$ (Fig. 11). Toate punctele din planul (π) din vecinătatea punctului P sunt caracterizate de:

$$\Delta \varphi \approx 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (1.78)$$

Pentru orice direcție \vec{e}_{s_1} ; \vec{e}_{s_2} ; etc. din acest plan:

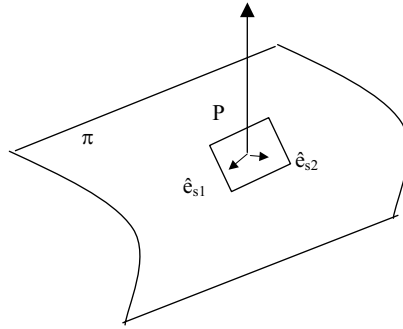


Fig. 11: Orientarea vectorului gradient

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{e}_{s_1} = 0 \quad (1.79)$$

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{e}_{s_2} = 0 \quad (1.80)$$

Ca urmare, $\text{grad } \varphi$ este orientat perpendicular pe oricare două direcții din planul (π). Conform teoremei celor trei perpendiculare, $\vec{\nabla} \varphi$ este perpendicular pe planul format de direcția ei. Deci, direcția gradientului este perpendiculară pe suprafețele de nivel constant, în lungul normalei în punctul respectiv. Prin convenție, se consideră că sensul vectorului $\vec{\nabla} \varphi$ este acela în care φ este crescător. Deci, cu alte cuvinte, vectorul gradient "*tinteste*" în direcția celei mai rapide creșteri, în spațiu, a lui φ .

În concluzie, principalele proprietăți ale gradientului unei funcții scalare ($\text{grad} \varphi$) sunt:

- este o funcție vectorială definită în orice punct (*"funcție de punct"*)
- indică direcția și sensul celei mai rapide creșteri a funcției scalare
- are mărimea dată de derivata după direcția celei mai rapide creșteri a funcției
- este orientat perpendicular pe suprafețele "echipotențiale" $\varphi = \text{const.}$, oricare ar fi mărimea fizică φ , căreia i se aplică

Vom discuta mai amănunțit semnificația fizică a acestui operator, în cazul definirii funcției potențial scalar.

1.3.2 Divergență

Definiție

Operatorul **divergență** se aplică funcțiilor vectoriale prin operația de înmulțire scalară.

Dacă notăm funcția vectorială cu \vec{a} , atunci, în coordonate carteziene $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ și expresia divergenței este:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.81)$$

Semnificația fizică

Pentru a ilustra semnificația fizică a operatorului divergență, ne vom folosi de un exemplu din mecanica fluidelor. Se definește în acest caz, *intensitatea curentului masic*, I , cantitatea de fluid care trece printr-o suprafață dS în unitatea de timp:

$$I = \frac{dm}{dt} \quad (1.82)$$

Masa dm poate fi scrisă în funcție de valoarea vitezei unei "particule" de fluid în regiunea suprafeței infinitezimale ds . Suprafața

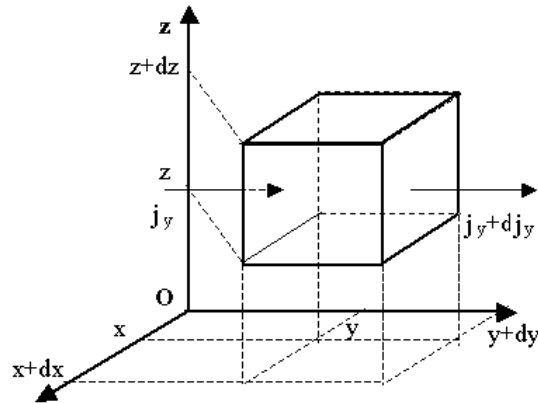


Fig. 12: Ilustrarea interpretării fizice a divergenței

”văzută” efectiv de fluidul în curgere este $dS_n = dS \cos \alpha$. Cantitatea de fluid ce trece într-un timp dt prin suprafața dS sau (dS_n) este cuprinsă într-un cilindru de arie a bazei dS_n și de înălțime $v \cdot dt$. Ca urmare:

$$dm = \rho dS_n v dt = \rho dS v dt \cos \alpha \quad (1.83)$$

unde ρ este densitatea volumică a fluidului. Ca urmare:

$$I = \frac{dm}{dt} = \rho dS v \cos \alpha \quad (1.84)$$

Se definește, de asemenea, densitatea curentului masic, j prin relația:

$$j = \frac{dm}{dS_n dt} = \rho v \quad (1.85)$$

Constatăm că, întrucât viteza este o mărime vectorială, iar ρ - un scalar, \vec{j} este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.86)$$

Având în vedere că \vec{v} se poate scrie, în coordonate carteziene, sub forma:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.87)$$

rezultă că:

$$\vec{j} = j_x \vec{i} + j_y \vec{j} + j_z \vec{k} \quad (1.88)$$

unde:

$$j_x = \rho v_x, j_y = \rho v_y, j_z = \rho v_z. \quad (1.89)$$

Să analizăm în continuare, curgerea unui fluid în raport cu un referențial cartezian $Oxyz$. Mărimea vectorială generică \vec{a} din relația (1.81) va fi acum \vec{j} . Ne vom folosi de Fig. 12 și vom începe discuția noastră cu direcția Oy din motive de vizibilitate mai bună.

Densitatea de curent pe fața de intrare în paralelipipedul de volum elementar dV este $j_y(y)$, iar cea de ieșire $j_y(y + dy)$. Cantitatea de fluid ce intră în volumul elementar dV este:

$$dm(y) = \rho dx dz v_y(y) dt \quad (1.90)$$

iar cea care iese:

$$dm(y + dy) = \rho dx dz v_y(y + dy) dt \quad (1.91)$$

Dacă, eventual, $dm(y)$ este diferit de $dm(y + dy)$, atunci putem vorbi de o masă *netă* de fluid care "izvorăște" sau "dispare", exprimată ca:

$$dm_y = dm(y + dy) - dm(y) = \rho dx dz dt [v_y(y + dy) - v_y(y)] \quad (1.92)$$

Observații:

- am considerat mai sus că fluidul este incompresibil, deci $\rho(y) = \rho(y + dy) = \rho$
- dacă $dm(y + dy) > dm(y)$ se spune că dV se comportă (după această direcție y) ca un *izvor*. În caz contrar, dV se comportă ca un *puț* sau *dren*

Putem exprima pe $v_y(y + dy)$ sub forma unei dezvoltări în serie Taylor:

$$v_y(y + dy) = v_y(y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) (dy)^2 + \dots \quad (1.93)$$

Dacă viteza de variație a lui v_y cu y nu este foarte mare, atunci, într-o primă aproximație, putem considera că:

$$v_y(y + dy) = v_y(y) + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \quad (1.94)$$

astfel încât:

$$dm_y = \rho dx dz dt \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \quad (1.95)$$

Relații similare vor putea fi scrise cu ușurință și pentru direcțiile Ox și Oz , astfel încât:

$$dm = dm_x + dm_y + dm_z \quad (1.96)$$

$$= \rho dx dy dz dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1.97)$$

$$= \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dV dt \quad (1.98)$$

$$= \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dV dt \quad (1.99)$$

Așadar

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{dm}{dV dt} \quad (1.100)$$

Întrucât termenul I din relația (1.100) se poate scrie ca un produs scalar între operatorul $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i}, \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}, \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$ și vectorul $\vec{j}(j_x, j_y, j_z)$, rezultă că:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \text{div} \vec{j} = \frac{dm}{dV dt} \quad (1.101)$$

Cu alte cuvinte, $\text{div} \vec{j}$ reprezintă masa de fluid izvorâtă dintr-un volum elementar dV în unitatea de timp, raportată la valoarea lui dV . Se spune că $\text{div} \vec{j}$ reprezintă *productivitatea* specifică de fluid a "izvorului" elementar dV . Evident, cu cât izvorul va fi mai puternic, cu atât $\text{div} \vec{j}$ care îl caracterizează va fi mai mare. De altfel, termenul **divergență** provine de la cuvântul latin "divergere", care înseamnă "a izvorî". Având în vedere că $dm = \vec{j} \cdot \vec{dS}$, în care dS este suprafața care înconjoară volumul elementar dV , prin integrare pe întreg volumul unei surse macroscopice de fluid vom putea scrie:

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV \quad (1.102)$$

care reprezintă **teorema lui Green-Gauss-Ostrogradski**. Această ultimă relație stabilește o legătură între o integrală de suprafață a lui \vec{j} și una de volum a unei funcții de \vec{j} .

1.3.3 Rotor

Definiție

Operatorul **rotor** se aplică funcțiilor vectoriale prin operația de produs vectorial. Dacă aplicăm rotorul funcției vectoriale $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ se obține:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.103)$$

Interpretarea fizică

Fie un vector \vec{A} caracterizat prin componentele A_x, A_y, A_z în raport cu un sistem de referință cartezian. Să considerăm o direcție oarecare descrisă de versorul \vec{n} .

În planul perpendicular pe versorul \vec{n} , alegem un contur infinitesimal închis dl , care mărginește o suprafață mică ΔS . De obicei, sensul de parcurgere al conturului se stabilește astfel încât sensul pozitiv al versorului \vec{n} să coincidă cu cel determinat prin regula burghiului drept.

Operatorul diferențial rot este un vector a cărui proiecție pe direcția lui \vec{n} este definită prin relația:

$$rot_n \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (1.104)$$

Să considerăm în cele ce urmează că vectorul \vec{A} este viteza \vec{v} a unui punct (element de masă) dintr-un corp rigid care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe de rotație coliniare cu versorul \hat{n} . În mod evident că traiectoria punctului considerat este un cerc de rază r cu centrul pe axa de rotație iar viteza $v = \omega r$ este orientată tangent la traiectorie. Conturul ce încheie elementul de suprafață $\Delta S = \pi r^2$ este $\oint dl = 2\pi r$.

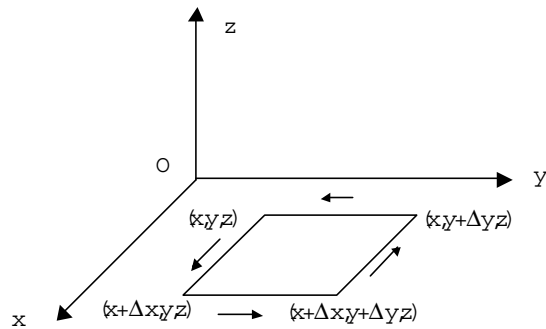


Fig. 13: Definirea operatorului rot în termeni de coordonate

Conform definiției 1.104 se obține:

$$rot_n \vec{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega \quad (1.105)$$

Astfel, rotorul vitezei liniare a punctelor unui solid rigid aflat în mișcare de rotație este dublul vitezei unghiulare.

Din punct de vedere al calculului matematic este mult mai convenabilă definirea operatorului rot în termeni de coordonate.

Să găsim proiecțiile vectorului rot într-un sistem de coordonate cartezian, de exemplu de-a lungul axei Oz .

Conturul pe care se integrează este un dreptunghi cu laturile $\Delta x, \Delta y$ indicat în Fig. 13. Se obține:

$$\begin{aligned} \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x,y,z) dx + \\ &\int_{(x+\Delta x,y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} A_y(x+\Delta x,y,z) dy \\ &\int_{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)}^{(x,y+\Delta y,z)} A_x(x,y+\Delta y,z) dx + \\ &\int_{(x,y+\Delta y,z)}^{(x,y,z)} A_y(x,y,z) dy \end{aligned} \quad (1.106)$$

Considerând că $\Delta x, \Delta y$ pot fi oricât de mici dorim, putem dezvoltăm termenii A_x, A_y în serii Taylor:

$$A_x(x, y + \Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \dots \quad (1.107)$$

$$A_y(x + \Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + (1.108)$$

Să revenim în relația (1.106) în care, pentru claritate, să calculăm suma între prima și a treia integrală, respectiv suma între a doua și a patra integrală. După inversarea limitelor unei integrale și apariția semnului minus, se obține:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x, y, z) dx - \\ &- \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \left[A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \right] dx \\ &= - \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x \end{aligned} \quad (1.109)$$

În mod similar se obține:

$$I_2 = - \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (1.110)$$

Ca urmare, conform definiției (1.104), proiecția vectorului $rot \vec{A}$ pe axa Oz este:

$$\left(rot \vec{A} \right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1.111)$$

În mod similar se obțin și celelalte proiecții (considerând dreptunghiuri cu laturile $\Delta y, \Delta z$ respectiv $\Delta z, \Delta x$ și repetând procedura matematică):

$$\left(\text{rot}\vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1.112)$$

$$\left(\text{rot}\vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1.113)$$

Din aceste relații rezultă definiția vectorului rotor în coordonate carteziene:

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (1.114)$$

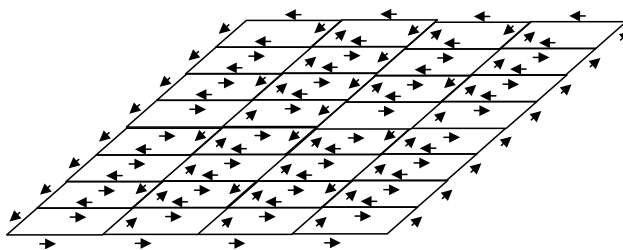


Fig. 14: Ilustrarea teoremei lui Stokes-Ampère

Să calculăm fluxul vectorului $\text{rot}\vec{A}$ printr-o suprafață oarecare mărginită de un contur închis, divizând suprafața considerată în mici elemente de suprafață ΔS_i .

$$\int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \sum_{(i)} \int_{\Delta S_i} \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.115)$$

Cum ΔS_i este foarte mic se obține în primă aproximație, folosind relația de definiție (1.104), următoarele expresii pentru fiecare element de suprafață:

$$\int_{\Delta S_i} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_i} (\text{rot} \vec{A})_n dS \approx (\text{rot} \vec{A})_n \Delta S_i \approx \oint_i \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.116)$$

Ca urmare:

$$\int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \sum_{(i)} \oint_i \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.117)$$

Conform Fig. 14 se observă că integralele de pe contururile ce mărginesc două suprafețe vecine sunt opuse ca semn (deoarece sunt parcurse în ambele sensuri) și ca urmare se anulează reciproc. Singurii termeni ce rămân necompensați sunt cei de pe conturul exterior ce mărginește suprafața considerată. Considerând suprafețele ΔS_i din ce în ce mai mici se obține relația:

$$\int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.118)$$

Această relație este cunoscută ca **teorema lui Stokes-Ampère**.

1.4 Probleme

1.1 Fie vectorii:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{B} &= -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{C} &= 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Determinați:

- a). mărimile celor trei vectori;
- b). reprezentați grafic vectorii;
- c). valoarea numerică a vectorului $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$;
- d). versorii celor trei vectori;
- e). produsele scalare: $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$, $\vec{B} \cdot \vec{C}$;
- f). produsele vectoriale $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$, $\vec{B} \times \vec{C}$; mărimea lor și cosinusul unghiurilor dintre aceste perechi;
- g). Vectorii $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sunt coplanari?
- h). produsul $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$.

Rezolvare:

a. Mărimile celor trei vectori sunt:

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{9 + 16 + 25} = 7.0711 \\ |\vec{B}| &= \sqrt{1 + 16 + 4} = 4.5826 \\ |\vec{C}| &= \sqrt{4 + 1 + 1} = 2.4495 \end{aligned}$$

b. Reprezentarea grafică este dată în Fig. 1.1.

c. Vectorul:

$$\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = (3 - 1 - 2)\vec{i} + (4 + 4 + 1)\vec{j} + (5 - 2 - 1)\vec{k} = 9\vec{j} + 2\vec{k}$$

are valoarea numerică:

$$|\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}| = \sqrt{81 + 4} = 9.2195$$

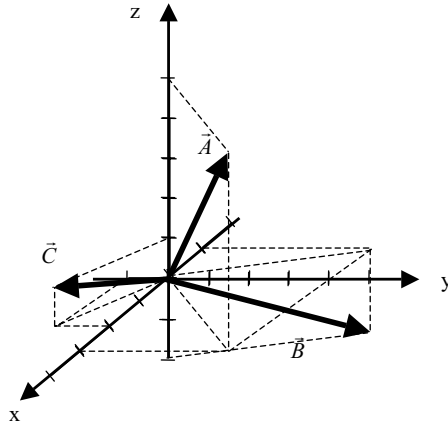


Fig. 1.1

d. Versorii direcțiilor celor trei vectori sunt:

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{3}{7.07}\vec{i} + \frac{4}{7.07}\vec{j} + \frac{5}{7.07}\vec{k} = 0.42\vec{i} + 0.56\vec{j} + 0.71\vec{k}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} = -\frac{1}{4.58}\vec{i} + \frac{4}{4.58}\vec{j} - \frac{2}{4.58}\vec{k} = 0.22\vec{i} + 0.87\vec{j} + .443\vec{k}$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{2}{2.45}\vec{i} - \frac{1}{2.45}\vec{j} + \frac{1}{2.45}\vec{k} = 0.82\vec{i} + 0.41\vec{j} + 0.41\vec{k}$$

e.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -3 + 16 - 10 = 3$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 6 - 4 + 5 = 7$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = -2 - 4 - 2 = -8$$

f.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -28\vec{i} + \vec{j} + 16\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 7\vec{j} - 11\vec{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

Mărimea vectorilor este:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{28^2 + 1 + 16^2} = 32.265$$

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = \sqrt{9^2 + 7^2 + 11^2} = 15.843$$

$$|\vec{B} \times \vec{C}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2} = 7.874$$

iar unghiurile corespunzătoare dintre fiecare pereche de vectori astfel definiți:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) &= \frac{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C})}{|\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{A} \times \vec{C}|} \\ &= \frac{-28 \cdot 9 + 1 \cdot 7 - 16 \cdot 11}{32.265 \cdot 15.843} = -0.82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \times \vec{C}) &= \frac{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}{|\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{B} \times \vec{C}|} \\ &= \frac{-28 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 16 \cdot 7}{32.265 \cdot 7.874} = -0.67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\vec{A} \times \vec{C}, \vec{B} \times \vec{C}) &= \frac{(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}{|\vec{A} \times \vec{C}| \cdot |\vec{B} \times \vec{C}|} \\ &= \frac{9 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 11 \cdot 7}{15.843 \cdot 7.874} = 0.59\end{aligned}$$

g. Pentru a vedea dacă vectorii $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sunt coplanari, se calculează produsul mixt:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = -41$$

Deoarece valoarea acestui produs este diferită de zero înseamnă că vectorii nu sunt coplanari.

h. Pentru produsul dublu vectorial se folosește regula "bac minus cab"

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} &= \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \\ &- \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = 7(-\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) - 3(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -13\vec{i} - 31\vec{j} - 17\vec{k}\end{aligned}$$

1.2 Fie vectorii \vec{A} și \vec{B} definiți de următoarele expresii:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= ae^{-kt}\vec{i} + bt\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{B} &= (c \sin \omega t)\vec{i} + (d \cos \omega t)\vec{j}\end{aligned}$$

unde a, b, c, k, ω – constante iar t – timpul. Calculați:

a). $\frac{d\vec{A}}{dt}, \frac{d\vec{B}}{dt}; \left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right|; \left| \frac{d\vec{B}}{dt} \right|;$

$$\text{b). } \left| \vec{A} \right|; \left| \vec{B} \right|; \frac{d}{dt} \left| \vec{A} \right|; \frac{d}{dt} \left| \vec{B} \right|;$$

$$\text{c). } \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B});$$

$$\text{d). } \frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}).$$

Rezolvare:

a. Folosim regulile de derivare ale vectorilor:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(ae^{-kt})\vec{i} + \frac{d}{dt}(bt)\vec{j} = -kae^{-kt}\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d}{dt}(c \sin \omega t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(d \cos \omega t)\vec{j} = c\omega \cos \omega t\vec{i} - d\omega \sin \omega t\vec{j}$$

$$\left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| = \sqrt{(-kae^{-kt})^2 + b^2}$$

$$\left| \frac{d\vec{B}}{dt} \right| = \sqrt{(c\omega \cos \omega t)^2 + (d\omega \sin \omega t)^2}$$

b.

$$\left| \vec{A} \right| = \sqrt{(ae^{-kt})^2 + (bt)^2 + 1}$$

$$\left| \vec{B} \right| = \sqrt{(c \sin \omega t)^2 + (d \cos \omega t)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{A} \right| = \frac{d}{dt} \sqrt{(ae^{-kt})^2 + (bt)^2 + 1} = \frac{-a^2 e^{2(-kt)} k + b^2 t}{\sqrt{a^2 e^{2(-kt)} + b^2 t^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dt} \left| \vec{B} \right| = \frac{d}{dt} \sqrt{(c \sin \omega t)^2 + (d \cos \omega t)^2} = \frac{\omega}{2} \frac{c^2 - d^2}{\sqrt{c^2 \sin^2 \omega t + d^2 \cos^2 \omega t}}$$

După cum se constată:

$$\left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| \neq \frac{d}{dt} |\vec{A}|$$

$$\left| \frac{d\vec{B}}{dt} \right| \neq \frac{d}{dt} |\vec{B}|$$

c.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \frac{d}{dt} (ae^{-kt}c \sin \omega t + btd \cos \omega t) \\ &= (ake^{-kt}c + btd\omega) \sin \omega t + (\omega ae^{-kt}c + bd) \cos \omega t \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ae^{-kt} & bt & 1 \\ c \sin \omega t & d \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \omega d (\sin \omega t) \vec{i} + c (\cos \omega t) \omega \vec{j} - \\ &- (ake^{-kt}d \cos \omega t + ae^{-kt}d\omega \sin \omega t \\ &+ c\omega \cos \omega t bt + cb \sin \omega t) \vec{k} \end{aligned}$$

1.3 Calculați mărimea gradientul funcției:

$$f(x, y, z) = xy^2 + yx^2 + xyz$$

Rezolvare:

Conform definiției operatorului gradient, se obține:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Derivatele parțiale ale funcției scalare f în raport cu cele trei coordonate sunt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + yx^2 + xyz) = y^2 + 2yx + yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + yx^2 + xyz) = 2yx + x^2 + xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 + yx^2 + xyz) = yx\end{aligned}$$

Ca urmare mărimea vectorului gradient este:

$$|\nabla f| = \sqrt{(y^2 + 2yx + yz)^2 + (2yx + x^2 + xz)^2 + (yx)^2}$$

1.4 Calculați divergența vectorului:

$$\vec{A} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} + 4y\vec{k}$$

Rezolvare:

Conform definiției operatorului divergență, se obține:

$$\begin{aligned}div \vec{r} &= \nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(2) + \frac{\partial}{\partial z}(4y) \\ &= 4\end{aligned}$$

Rezultatul aplicării operatorului divergență unei mărimi vectoriale este un scalar.

1.5 Determinați rotorul funcției vectoriale:

$$\vec{F} = (4abyz^2 - 10bx^2y^2)\vec{i} + (9abxz^2 - 6bx^3y)\vec{j} + 8abxyz\vec{k}$$

unde a, b, c – constante.

Rezolvare:

Conform definiției operatorului divergență, se obține:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4abyz^2 - 10bx^2y^2 & 9abxz^2 - 6bx^3y & 8abxyz \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}(8abxyz) - \frac{\partial}{\partial z}(9abxz^2 - 6bx^3y) \right] \\ &\quad - \vec{j} \left[\frac{\partial}{\partial x}(8abxyz) - \frac{\partial}{\partial z}(4abyz^2 - 10bx^2y^2) \right] \\ &\quad + \vec{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(9abxz^2 - 6bx^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(4abyz^2 - 10bx^2y^2) \right] \\ &= -10abxz\vec{i} + (5abz^2 + 2bx^2y)\vec{k} \end{aligned}$$

Capitolul 2

Mecanica clasică

2.1 Cinematica punctului material

Cinematica studiază deplasările corpurilor în funcție de timp, fără a ține cont de cauza care produce mișcarea. Deplasarea unui corp față de alte corpuri se raportează la un **sistem de referință** solidar legat de corpurile alese drept repere.

Un principiu fundamental al Mecanicii newtoniene este *principiul caracterului absolut al măsurii timpului*, adică măsura timpului este independentă de sistemul de referință ales, față de care se studiază mișcarea corpului. Cu alte cuvinte, dacă avem două fenomene care sunt simultane față de un sistem de referință, ele vor fi simultane față de orice alt sistem de referință; deci, simultaneitatea a două fenomene are un caracter absolut în Mecanica newtoniană.

În Mecanică, un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate în timpul mișcării sale, se numește **punct material** sau **particulă** și

se reprezintă grafic printr-un punct geometric.

Fie un punct material care se deplasează în timp; alegem ca sistem de referință sistemul cartezian $(Oxyz)$. Coordonatele x , y și z ale punctului material și respectiv vectorul de poziție \vec{r} sunt funcții de timp:

$$\vec{r}(t) : \quad x(t) \quad y(t) \quad z(t) \quad (2.1)$$

Funcția $\vec{r}(t)$ se numește **legea de mișcare** a punctului material. Totalitatea pozițiilor succesive ale punctului material în timp formează o curbă numită **trajectoria** particulei și este caracterizată prin **ecuațiile parametrice**:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (2.2)$$

Mărimile cinematice care caracterizează mișcarea unui punct material sunt viteza și accelerația. Se definește **viteza medie** ca fiind variația vectorului deplasare raportată la intervalul de timp cât are loc deplasarea:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t' - t} = \frac{\vec{r}'(t') - \vec{r}'(t)}{t' - t} \quad (2.3)$$

și respectiv **viteza momentană**:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}'(t') - \vec{r}'(t)}{t' - t} \quad (2.4)$$

Observație: vom folosi în continuare notația Leibnitz pentru derivata în raport cu timpul a unei mărimi, adică cu un punct deasupra pentru derivata de ordin întâi și respectiv cu două puncte pentru derivata de ordin doi.

Deci, viteza particulei este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (2.5)$$

și are componentele:

$$\dot{\vec{r}}: \quad \dot{x}(t) \quad \dot{y}(t) \quad \dot{z}(t) \quad (2.6)$$

iar **acclerația** este derivata vitezei în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (2.7)$$

și are componentele:

$$\ddot{\vec{r}}: \quad \ddot{x}(t) \quad \ddot{y}(t) \quad \ddot{z}(t) \quad (2.8)$$

Fie două sisteme de referință S și S' (Fig.1), care se mișcă *arbitrar* unul față de celălalt. Fie un punct material P aflat în mișcare față de cele două sisteme de referință. Mărimile cinematice similare față de cele două sisteme vor fi notate cu aceleași litere, fără și respectiv cu accent. Între vectorii de poziție ai particulei, \vec{r} (față de S) și \vec{r}' (față de S') este verificată relația evidentă:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \quad (2.9)$$

unde

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z \quad (2.10)$$

iar \vec{e}_x , \vec{e}_y și \vec{e}_z reprezintă versorii axelor de coordonate ale sistemului S' , *dependenți de timp*. Vom deriva relația (2.1.9) în raport cu timpul:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + x'\dot{\vec{e}}_x + y'\dot{\vec{e}}_y + z'\dot{\vec{e}}_z + \dot{x}'\vec{e}_x + \dot{y}'\vec{e}_y + \dot{z}'\vec{e}_z \quad (2.11)$$

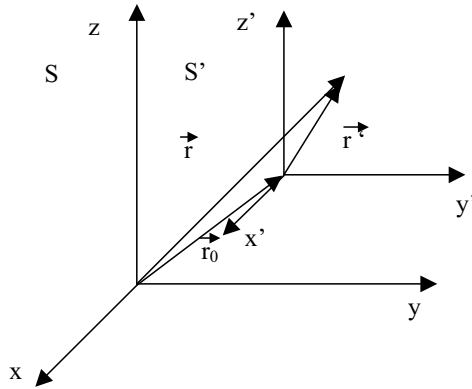


Fig.1

În membrul stâng al identității (2.11) vectorul $\dot{\vec{r}}$ reprezintă viteza particulei față de sistemul de referință fix S , și este numită convențional **viteză absolută**. În membrul drept, suma primilor patru termeni reprezintă viteza particulei dacă ea ar fi imobilă față de sistemul S' , se numește **viteză de transport** a particulei și ea este nulă dacă sistemul S' nu se mișcă față de S . Suma ultimilor trei termeni din membrul drept reprezintă viteza particulei față de sistemul mobil S' și se numește **viteză relativă**. Așadar, relația (2.11) se poate scrie sub forma:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{transp} + \vec{v}_{rel} \quad (2.12)$$

unde

$$\vec{v}_{abs} = \dot{\vec{r}} \quad (2.13)$$

$$\vec{v}_{transp} = \dot{\vec{r}}_o + x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z \quad (2.14)$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z \quad (2.15)$$

Observație: viteza de transport a particulei se compune din viteza $\dot{\vec{r}}_o$ a originii sistemului mobil S' și din **viteza de rotație** $\vec{\omega} \times \vec{r}' = x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z$ a particulei solidar legate de S' , în jurul punctului O' , presupus fix. Relația (2.12) se numește **formula de compunere a vitezelor în Cinematica newtoniană**.

Vom deriva încă o dată, în raport cu timpul, identitatea (2.11):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = & \ddot{\vec{r}}_o + x''\vec{e}'_x + y''\vec{e}'_y + z''\vec{e}'_z + \\ & \ddot{x}'\vec{e}'_x + \ddot{y}'\vec{e}'_y + \ddot{z}'\vec{e}'_z + \\ & 2(\dot{x}'\dot{\vec{e}}'_x + \dot{y}'\dot{\vec{e}}'_y + \dot{z}'\dot{\vec{e}}'_z) \end{aligned} \quad (2.16)$$

În membrul stâng al identității (2.16) vectorul $\ddot{\vec{r}}$ reprezintă accelerația particulei față de sistemul de referință fix S , numită **accelerație absolută**. În membrul drept, suma primilor patru termeni reprezintă accelerația particulei dacă aceasta ar fi solidar legată de sistemul mobil S' și se numește **accelerație de transport**. Suma următorilor trei termeni reprezintă accelerația particulei față de sistemul mobil S' și se numește **accelerație relativă**, iar suma ultimilor trei termeni se numește **accelerație complementară** sau **accelerație Coriolis**. Cu notațiile:

$$\vec{a}_{abs} = \ddot{\vec{r}} \quad (2.17)$$

$$\vec{a}_{transp} = \ddot{\vec{r}}_o + x''\vec{e}'_x + y''\vec{e}'_y + z''\vec{e}'_z \quad (2.18)$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}'\vec{e}'_x + \ddot{y}'\vec{e}'_y + \ddot{z}'\vec{e}'_z \quad (2.19)$$

$$\vec{a}_{compl} = 2(\dot{x}'\dot{\vec{e}}'_x + \dot{y}'\dot{\vec{e}}'_y + \dot{z}'\dot{\vec{e}}'_z) \quad (2.20)$$

relația (2.16) se poate scrie sub forma:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{transp} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{compl} \quad (2.21)$$

ceea ce reprezintă **formula de compunere a accelerațiilor în Cinematica newtoniană**.

2.2 Transformările Galilei

În continuare, vom numi **particulă liberă** o particulă asupra căreia nu acționează nici un alt corp. Experiența arată că există sisteme de referință privilegiate pentru care este adevărată următoarea afirmație: orice particulă liberă se mișcă cu viteză constantă față de aceste sisteme, adică se deplasează rectiliniu și uniform (principiul inerției). Sistemele de referință pentru care este valabilă această afirmație se numesc **sisteme inerțiale**.

Să studiem în continuare mișcarea unei particule libere față de două sisteme de referință inerțiale S (fix) și S' (mobil), deci care se mișcă cu viteză constantă atât față de S cât și față de S' , adică:

$$\vec{a}_{abs} = 0 \quad ; \quad \vec{a}_{rel} = 0 \quad (2.22)$$

Conform legii de compunere a accelerațiilor pentru o particulă (2.21), va rezulta:

$$\vec{a}_{transp} + \vec{a}_{compl} = 0 \quad (2.23)$$

ceea ce va conduce la:

$$\ddot{\vec{r}}_o = 0 \quad ; \quad \dot{\vec{e}}'_x = 0 \quad ; \quad \dot{\vec{e}}'_y = 0 \quad ; \quad \dot{\vec{e}}'_z = 0 \quad (2.24)$$

Cerințele relației (2.24) exprimă faptul că originea O' se deplasează rectiliniu și uniform față de S , iar axele sistemului S' nu se rotesc

în jurul originii O' . Mișcarea sistemului de referință, în decursul căreia axele rămân paralele cu ele însele se numește **mișcare de translație**. Deci, sistemul inerțial S' are o mișcare de translație rectilinie și uniformă față de sistemul inerțial S .

Observație: pentru a menține starea de mișcare rectilinie și uniformă sau de repaus relativ a unei particule libere, față de un sistem de referință inerțial, spațiul și timpul în sistemul inerțial trebuie să satisfacă anumite caracteristici:

- spațiul să fie *omogen*, adică toate punctele din spațiu să fie echivalente
- spațiul să fie *izotrop*, adică traiectoriile particulelor libere aflate în mișcare să fie rectilinii indiferent de direcțiile în care are loc mișcarea
- timpul să fie *uniform*, adică particulele libere să parcurgă spații egale în intervale egale de timp

Vom introduce noțiunea de **eveniment**, prin care se înțelege un fenomen produs într-un anumit punct geometric, la un anumit moment de timp. Un eveniment este caracterizat prin patru coordonate spațio-temporale: trei coordonate spațiale x , y și z ale punctului unde are loc fenomenul și o coordonată temporală t , desemnând momentul producerii lui. Noțiunea de eveniment va fi frecvent folosită mai ales în Cinematica relativistă.

Coordonatele spațio-temporale (\vec{r}, t) caracterizează mișcarea absolută, coordonatele spațio-temporale (\vec{r}', t) caracterizează mișcarea relativă, iar \vec{r}_o caracterizează mișcarea de transport a sistemului S' față de S , S' aflându-se în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza \vec{v} față de S .

Între coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment față de cele două sisteme de referință există relația evidentă:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \quad (2.25)$$

unde $\vec{r}_o = vt'$ reprezintă ecuația ce caracterizează mișcarea uniformă a sistemului S' față de S . Conform principiului fundamental al Mecanicii newtoniene al caracterului absolut al măsurii timpului, timpul se scurge la fel în ambele sisteme de referință, adică:

$$t = t' \quad (2.26)$$

Relațiile (2.25) și (2.26) reprezintă **transformările Galilei** care exprimă coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment față de un sistem de referință inerțial în funcție de coordonatele spațio-temporale ale aceluiași eveniment față de un alt sistem de referință inerțial aflat în mișcare rectilinie și uniformă față de primul, în Mecanica newtoniană. Pentru cazul particular în care $\vec{v}||Ox$ vom obține **transformările Galilei speciale directe**:

$$\begin{aligned} x' &= x - v t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (2.27)$$

și respectiv **transformările Galilei speciale inverse**:

$$\begin{aligned} x &= x' + v t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (2.28)$$

Consecințele transformărilor Galilei (speciale) se referă la:

- legea de compunere a vitezelor în Mecanica newtoniană, adică:

$$v_{rel} = v_{abs} - v \quad (2.29)$$

- invarianța lungimilor în orice sistem de referință inerțial, adică:

$$l' = l \quad (2.30)$$

unde l' reprezintă lungimea unei bare măsurată în sistemul S' iar l reprezintă lungimea aceleiași bare măsurată în sistemul S .

Observație: Transformările Galilei speciale au avantajul că au o formă foarte simplă și conțin caracteristica esențială a relației dintre sistemele de referință inerțiale S și S' , anume că ele au unul față de celălalt o mișcare de translație rectilinie și uniformă.

2.3 Principiile dinamicii newtoniene

Dinamica studiază mișcarea corpurilor plecând de la cauza care o produce. Principiile Dinamicii sunt propoziții cu caracter general, obținute pe baza a numeroase date experimentale.

Principiul inerției (legea întâi a lui Newton) afirmă că orice particulă, în absența acțiunii altor corpuri, se mișcă rectiliniu și uniform; deci, o particulă liberă se deplasează cu viteză constantă. Principiul inerției este verificat prin contrazicere, adică nu s-a observat experimental că, dacă este îndeplinită condiția din principiu mișcarea să nu tindă la una rectilinie.

Observație: apare noțiunea de **inertie** care reprezintă tendința unui corp de a nu-și modifica viteza în cazul când nu există acțiuni exterioare.

Principiul manifestării acțiunii (legea a doua a lui Newton) afirmă că, în condiții exterioare date, produsul dintre masa și accelerația unei particule este o funcție vectorială ce depinde de poziția particulei, viteza sa și de timp:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (2.31)$$

Observații:

- Apare noțiunea de **masă**; prin experiențe de ciocnire se demonstrează că fiecare particulă este caracterizată de o mărime scalară pozitivă, specifică și invariantă (în Mecanica newtoniană) care reprezintă masa particulei.
- Funcția vectorială \vec{F} reprezintă forța cu care corpurile acționează asupra particulei, iar dependența $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ se numește **legea forței** sau **expresia forței**. Forța \vec{F} este o mărime vectorială măsurabilă al cărui modul exprimă intensitatea acțiunii asupra particulei, iar direcția și sensul ei redau orientarea acțiunii
- Principiul doi stabilește dependența generală a forței de variabilele cinematice \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ și t , dar nu dă o prescripție pentru forma concretă a acestei dependențe.
- Relația (2.31) reprezintă **ecuația fundamentală a Dinamicii**

Principiul independenței acțiunilor afirmă că exercitarea simultană a mai multor acțiuni asupra unei particule nu modifică legile forțelor; efectul asupra particulei este exprimat prin suma

forțelor individuale:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_n \vec{F}_n(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (2.32)$$

Principiul acțiunii și reacțiunii (legea a treia a lui Newton) afirmă că două corpuri acționează unul asupra celuilalt în așa fel încât forțele corespunzătoare sunt egale ca mărime și de sens contrar:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.33)$$

unde \vec{F}_{12} reprezintă **acțiunea** corpului 1 asupra corpului 2, iar \vec{F}_{21} reprezintă **reacțiunea** corpului 2 asupra corpului 1.

Principiul relativității a lui Galilei afirmă că, pornind de la situații inițiale similare, evoluția unui ansamblu de particule izolat (nu acționează nici o forță din exterior asupra ansamblului) este aceeași în orice sistem de referință inerțial.

O consecință deosebit de importantă a acestui principiu se obține exprimând legea a doua a lui Newton pentru o particulă care face parte dintr-un ansamblu izolat, față de sistemele inerțiale S și S' :

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \text{față de } S \\ m\ddot{\vec{r}}' &= \vec{F}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t') \quad \text{față de } S' \end{aligned} \quad (2.34)$$

Se observă că legea forței este aceeași în ambele sisteme de referință, conform principiului relativității a lui Galilei. Legătura dintre

sistemele inerțiale este dată de transformarea Galilei (2.25), care derivată de două ori conduce la relația:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \quad (2.35)$$

adică accelerațiile particulei în sistemul S și S' sunt identice. Conform relației (2.34) rezultă:

$$\vec{F}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (2.36)$$

Folosind relațiile de transformare Galilei, egalitatea (2.36) devine:

$$\vec{F}(\vec{r} - \vec{v}t, \dot{\vec{r}} - \vec{v}, t) \equiv \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (2.37)$$

identitate ce exprimă **invarianța expresiei forței** exercitate asupra unei particule dintr-un ansamblu izolat, la schimbarea sistemului de referință inerțial. Cu alte cuvinte, dacă avem la dispoziție o mulțime infinită de sisteme de referință inerțiale, conform principiului relativității a lui Galilei nici unul din aceste sisteme nu este privilegiat în descrierea mișcării unei particule libere și toate principiile Mecanicii au aceeași formă față de orice sistem de referință inerțial.

În concluzie, Dinamica studiază mișcarea corpurilor pornind de la expresiile, presupuse cunoscute, ale forțelor exercitate asupra lor. Bazându-ne pe principii, să vedem cum se formulează concret problemele Dinamicii.

Fie un punct material de masă m sollicitat de forța $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ce reprezintă o acțiune exterioară cunoscută. Problema de dinamică constă în determinarea mișcării particulei, iar rezolvarea ei se face cu ajutorul ecuației diferențiale vectoriale (2.31) pentru vectorul

de poziție \vec{r} al particulei, ca funcție de timp. Această ecuație vectorială, scrisă pe componente revine la un sistem de trei ecuații diferențiale de ordin doi, în formă normală, pentru funcțiile $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Acestui sistem de ecuații diferențiale i se asociază **condițiile inițiale**:

$$\begin{aligned} x(t_o) &= x_o & \dot{x}(t_o) &= v_{ox} \\ y(t_o) &= y_o & \dot{y}(t_o) &= v_{oy} \\ z(t_o) &= z_o & \dot{z}(t_o) &= v_{oz} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sistemul de ecuații diferențiale (2.38) împreună cu condițiile inițiale (2.39) formează o **problemă Cauchy** care ne oferă, conform matematicii, o soluție unică de forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

obținându-se **legea de mișcare** a particulei:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (2.41)$$

determinată de condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_o) &= \vec{r}_o \\ \dot{\vec{r}}(t_o) &= \vec{v}_o \end{aligned} \quad (2.42)$$

Numim **stare mecanică** la momentul t a unui punct material, ansamblul $\{\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\}$ format din vectorul său de poziție și viteza sa în acel moment. Condițiile inițiale (2.42) definesc starea mecanică a particulei la momentul t_o .

Deci, în ipoteza că expresia forței este cunoscută, starea mecanică a unei particule la un moment dat **determină univoc** legea ei de de mișcare. Principal este suficient să cunoaștem starea mecanică la un moment t_o pentru a deduce, fără nici o ambiguitate, starea mecanică a particulei la orice alt moment. Legea de mișcare poate fi găsită efectiv prin integrarea ecuației diferențiale (2.31), care se numește **ecuația de mișcare** a particulei.

Observație: până acum s-a discutat modul în care legile lui Newton guvernează mișcarea punctelor materiale în sistemele de referință inerțiale. Este necesar să facem câteva considerații de dinamică privind **sistemele de referință neinertiale** (sisteme pentru care nu mai este valabil principiul inerției). Față de sistemele neinertiale, legea a doua a lui Newton are un enunț similar aceluia față de sistemele inerțiale, cu deosebirea majoră că forței care descrie acțiunea fizică a altor corpuri asupra particulei trebuie să i se adauge **forțele de inerție**, anume forța de transport și forța Coriolis. Celelalte legi ale lui Newton (principiul inerției, independenței acțiunilor, acțiunii și reacțiunii) rămân neschimbate în ce privește traducerea proprietăților acțiunilor fizice prin însușiri ale legilor forțelor.

Remarcăm că, în general, ecuația de mișcare a unei particule într-un sistem de referință neinertial este considerabil mai complicată decât ecuația de mișcare scrisă față de un sistem inertial. În consecință, legea de mișcare a particulei este mai greu de calculat. Deși aceste considerații arată că sistemele inerțiale sunt privile-

giate, totuși în multe cazuri sunt folosite sistemele de referință neinertiale.

2.4 Interacțiunile fundamentale

Cele cinci principii ale Dinamicii, împreună cu principiul caracterului absolut al măsurii timpului alcătuiesc sistemul de principii fizice fundamentale, pornind de la care se dezvoltă logic întreaga Mecanică newtoniană. Principiile Mecanicii newtoniene sunt conforme cu realitatea pentru un domeniu foarte întins de mișcări ale corpurilor. Domeniile în care ele încetează să fie valabile sunt:

- mișcările corpurilor cu viteze apropiate de viteza luminii, care sunt descrise corect pe baza principiilor Teoriei relativității
- mișcările particulelor la scară atomică și nucleară a căror descriere este guvernată de principiile Mecanicii cuantice

În afară de informația fizică generală conținută în principii, în Mecanica newtoniană se mai introduce informația fizică sub forma legilor de forță ale interacțiilor care apar în diferite probleme concrete. Forțele din Mecanică corespund unor interacții fizice complexe, dar oricât de complexe ar fi există o anumită suprapunere de **interacțiuni fundamentale**.

În prezent, se cunosc patru clase de interacțiuni fundamentale pe care le vom enumera în ordinea intensității crescânde.

Interacțiunile gravitaționale sunt cele mai slabe, dar cele mai generale: orice pereche de corpuri care au mase interacționează gravitațional. Legea de forță a acestei interacțiuni a fost dedusă de Newton (1687). Forța gravitațională dintre două particule este atractivă, proporțională cu produsul maselor și invers

proporțională cu pătratul distanței dintre particule:

$$\vec{F}_{grav} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.43)$$

cunoscută sub numele de **legea gravitației universale**. Γ este **constanta gravitațională universală** și a fost determinată experimental, cu precizie, de către Cavendish (1798):

$$\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}.$$

Observații:

- mișcarea corpurilor cerești este determinată în principal de interacțiunea lor gravitațională și deci este guvernată de legea gravitațională universală (2.43)
- la scară terestră, prezintă importanță atracția gravitațională a Pământului asupra oricărui alt corp; forța corespunzătoare, în vecinătatea suprafeței terestre se numește **greutatea** corpurilor; interacțiunea gravitațională a corpurilor la suprafața Pământului este complet neglijabilă față de celelalte interacțiuni ale lor.

Interacțiunile electromagnetice sunt mult mai puternice decât cele gravitaționale, dar se manifestă numai între particulele care posedă **sarcină electrică**. Legea de forță a interacțiunii electromagnetice dintre două corpuri încărcate nemișcate a fost stabilită de Coulomb (1785). **Forța coulombiană** dintre două particule încărcate este proporțională cu produsul sarcinilor q_1 și q_2 ale particulelor, invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele și este atractivă sau repulsivă, după cum sarcinile au semne contrare sau au același semn:

$$\vec{F}_{Coulomb} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.44)$$

Factorul de proporționalitate k este pozitiv, iar valoarea lui rezultă din alegerea unităților de măsură:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \quad (2.45)$$

O particulă cu sarcina q aflată în mișcare cu viteza \vec{v} într-un câmp electromagnetic extern, este supusă **forței Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.46)$$

unde \vec{E} este intensitatea câmpului electric iar \vec{B} este inducția câmpului magnetic la un moment dat și în punctul în care se găsește particula în acel moment.

Observație: majoritatea fenomenelor din natură sunt datorate interacțiunilor electromagnetice; astfel, structura stabilă a atomilor și moleculelor, coeziunea corpurilor, frecările, reacțiile chimice, procese biologice constituie exemple ale suprapunerii tot mai complexe a interacțiilor electromagnetice.

Teoria sistematică a interacțiunilor electromagnetice și a efectelor lor macroscopice este studiată de Electrodinamica clasică, iar studiul aprofundat al interacțiunilor electromagnetice pure dintre particulele elementare formează obiectul Electrodinamicii cuantice.

Interacțiunile slabe și tari se manifestă numai la scară nucleară, la distanțe cel mult de ordinul 10^{-15} m. Interacțiunile slabe sunt cele care produc reacții de tipul emisiei β a unor nuclee radioactive; aceste interacții au o intensitate de 10^9 ori mai mică decât aceea a celor electromagnetice. Interacțiunile tari leagă

strâns protonii și neutronii în nucleele atomice, asigurând stabilitatea nucleelor. Interacțiunile tari sunt de circa 10^3 ori mai intense decât cele electromagnetice.

2.5 Teoremele generale ale Mecanicii pentru un punct material

Teoremele generale ale Mecanicii sunt consecințele principiilor Dinamicii, care înlesnesc abordarea problemei mișcării unei particule sau sistem de particule. Vom considera în continuare un punct material de masă m și solicitat de forța $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, dată într-un sistem de referință inerțial S .

2.5.1 Teorema impulsului

Se numește **impuls** al unei particule, produsul dintre masa m și viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ a particulei. Impulsul se notează cu \vec{p} iar unitatea de măsură în sistemul internațional de unități este $[p]_{SI} = kg \ m/s$ sau $N \cdot s$:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.47)$$

Dacă vom deriva în raport cu timpul relația de definiție (2.47) vom obține:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (2.48)$$

Această formulă ne arată că derivata în raport cu timpul a impulsului este egală cu forța totală exercitată asupra particulei și reprezintă **teorema impulsului** pentru un punct material. Acest

rezultat nu este decât o definiție alternativă a forței, care folosește noțiunea de impuls, cele două definiții:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.49}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

fiind echivalente atunci când masa este constantă.

O consecință imediată a formulei (2.48) se referă la cazul când forța totală care acționează asupra particulei este nulă; atunci și numai atunci, impulsul total al particulei se conservă în timp:

$$\vec{F} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{p}(t) \equiv \vec{p}(t_0) \tag{2.50}$$

Această concluzie este numită **legea de conservare a impulsului**. Din punct de vedere matematic, componentele constante p_x , p_y și p_z ale impulsului particulei libere sunt **integrale prime** ale ecuației de mișcare (2.31), adică integrale prime ale sistemului de ecuații diferențiale (2.38).

2.5.2 Teorema momentului cinetic

Momentul impulsului sau **momentul cinetic (orbital)** al unei particule este definit ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție \vec{r} și impulsul \vec{p} al particulei:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [l]_{SI} = J \cdot s \tag{2.51}$$

Vom calcula în continuare derivata în raport cu timpul a momentului cinetic folosindu-ne și de formula (2.48):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} + m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{M} \\ \rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} &= \vec{M}\end{aligned}\quad (2.52)$$

unde $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ reprezintă **momentul forței**. Relația (2.52) exprimă **teorema momentului cinetic**: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unei particule este egală cu momentul forței exercitate asupra particulei.

O consecință a teoremei momentului cinetic se referă la cazul când momentul forței totale care acționează asupra particulei este nul; atunci și numai atunci, momentul cinetic al particulei se conservă în timp:

$$\vec{M} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{l}(t) \equiv \vec{l}(t_o) \quad (2.53)$$

Acest rezultat se numește **teorema de conservare a momentului cinetic**. Componentele constante l_x , l_y și l_z ale momentului cinetic sunt integrale prime ale ecuației de mișcare (2.31) și sunt complet determinate de starea mecanică a particulei la momentul t_o .

Observație: momentul forței totale ce acționează asupra unei particule poate fi nul în următoarele cazuri:

- $\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{M} = \vec{0} \rightarrow \vec{l} = \text{const.}$
- $\vec{F} \neq \vec{0}$; acest lucru se întâmplă atunci când forța este o **forță centrală**, adică direcția forței ce acționează asupra particulei trece printr-un punct fix dat numit **centru de forță** (Fig. 2).

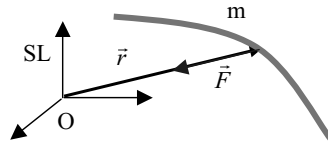


Fig. 2

Expresia unei forțe centrale este:

$$\vec{F} = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.54)$$

deci are direcția vectorului de poziție. Momentul acestei forțe centrale va fi:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0} \\ &\rightarrow \vec{l} = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.5.3 Teorema energiei cinetice

Energia cinetică este o mărime scalară nenegativă definită prin semiprodusul dintre masa și pătratul vitezei particulei:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\vec{v} \quad (2.56)$$

Fie o porțiune din traiectoria unei particule cuprinsă între punctele A_1 și A_2 (Fig.3) în care particula se găsește la momentele t_1 și respectiv t_2 . În intervalul de timp elementar dt , particula parcurge

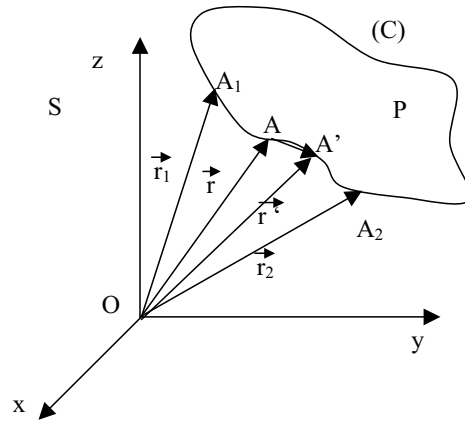


Fig.3

arcul AA' având vectorul deplasare:

$$\vec{AA'} = d\vec{r} = \vec{v}dt \quad (2.57)$$

Fie $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ forța ce acționează asupra particulei în punctul A . Produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F|\vec{r}'| \cos \theta \quad (2.58)$$

se numește **lucrul mecanic elementar** al forței \vec{F} corespunzător deplasării elementare $d\vec{r}$ a particulei. Unghiul θ este unghiul dintre forță și direcția deplasării. Semnificația liniuței transversale

de pe litera d în ecuația (2.58) este că expresia diferențială dL nu este în general diferențială totală a vreunei funcții de poziția particulei.

Observații:

- dacă forța este perpendiculară pe direcția deplasării ($\vec{F} \perp d\vec{r}$) atunci lucrul mecanic elementar este nul
- dacă forța nu este perpendiculară pe direcția deplasării, atunci lucrul mecanic elementar poate fi pozitiv și se numește **lucrul mecanic primit** de particulă sau **lucrul mecanic motor**, sau poate fi negativ și atunci se numește **lucrul mecanic cedat** de particulă sau **lucrul mecanic rezistent**
- lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} în unitatea de timp este numit **puterea** forței \vec{F} care se exercită asupra particulei, la momentul t :

$$\frac{dL}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.59)$$

Puterea poate fi pozitivă (**putere primită**), negativă (**putere cedată**) sau nulă.

Lucrul mecanic total corespunzător deplasării particulei în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ se numește **lucrul mecanic integral** și este definit prin relația:

$$L[t_1, t_2] \equiv \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r} \quad (2.60)$$

Dacă vom utiliza în continuare legea de mișcare a particulei $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vom putea transforma integrala (2.60) într-o integrală după

timp (integrală Riemann):

$$L[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t), \vec{v}(t), t] \vec{v}(t) dt \quad (2.61)$$

Vom deriva în continuare energia cinetică a particulei în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \vec{v} \right) = \frac{1}{2} m [\vec{v} \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{v}} \vec{v}] = m \vec{v} \dot{\vec{v}} = \vec{v} \vec{F} = \frac{dL}{dt} \\ \rightarrow \frac{dE_c}{dt} &= \frac{dL}{dt} \Rightarrow dE_c = dL \end{aligned} \quad (2.62)$$

Relația (2.62) arată că derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unei particule este egală cu puterea forței exercitate asupra particulei, sau variația energiei cinetice a particulei într-un interval infinitesimal dt este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat în acest interval de timp de forța exercitată asupra particulei. Afirmările de mai sus sunt enunțuri echivalente ale **teoremei energiei cinetice**, în **forma diferențială**. **Forma integrală** a acestei teoreme se exprimă prin relația:

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t), \vec{v}(t), t] \vec{v}(t) dt \\ \rightarrow E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= L[t_1, t_2] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Deci, variația energiei cinetice a unei particule în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este egală cu lucrul integral al forței exercitate asupra particulei.

2.5.4 Energia potențială. Energia mecanică. Teorema de conservare a energiei mecanice

Fie cazul particular când forța ce acționează asupra particulei nu depinde decât de poziția particulei (nu și explicit de timp), deci particula se mișcă sub acțiunea unui **câmp de forțe static**:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \quad (2.64)$$

Vom considera de asemenea că lucrul mecanic al acestei forțe nu depinde de drumul urmat de particulă (câmpuri speciale de forțe). Din punct de vedere al Analizei matematice, condiția necesară și suficientă ca integrala curbilinie a unei funcții vectoriale $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (lucrul mecanic) să fie independentă de curba care unește două puncte date și să depindă numai de aceste puncte, se poate exprima prin următoarele două afirmații echivalente:

- există o funcție $U = U(\vec{r})$, determinată până la o constantă aditivă, care satisface identic egalitățile:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Totodată este adevărată relația:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{F} d\vec{r} = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \quad (2.66)$$

unde integrala curbilinie se ia pe un drum arbitrar

• Funcțiile $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ și $F_z(x, y, z)$ verifică identitățile:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad (2.67)$$

Proprietățile (2.65) și (2.67) scrise sub formă vectorială devin:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (2.68)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.69)$$

Dacă funcția vectorială $\vec{F}(\vec{r})$, cu proprietatea (2.68) este un câmp de forțe, atunci mărimea $U(x, y, z)$ se numește **energia potențială** a particulei în punctul de coordonate x, y, z și este un câmp scalar.

Dacă câmpul de forțe $\vec{F}(\vec{r})$ derivă dintr-o energie potențială $U(\vec{r})$, atunci lucrul mecanic elementar al forței este diferențiala totală a unei funcții de coordonate:

$$\begin{aligned} dL &= \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -dU(x, y, z) \\ \rightarrow dL &= -dU \end{aligned} \quad (2.70)$$

Deoarece particula se mișcă, energia ei potențială depinde de timp prin intermediul coordonatelor particulei. Prin împărțirea identității (2.70) la intervalul de timp dt , corespunzător deplasării $d\vec{r}$, se obține expresia puterii forței:

$$\vec{F}\vec{v} = -\frac{dU}{dt} \quad (2.71)$$

Dacă vom ține cont acum de expresia matematică a teoremei energiei cinetice, vom obține următorul rezultat:

$$\frac{d}{dt}(E_{cin} + U) = 0 \quad (2.72)$$

$$d(E_{cin} + U) = 0 \quad (2.73)$$

Suma dintre energia cinetică și energia potențială a particulei:

$$E \equiv E_{cin} + U \quad (2.74)$$

se numește **energia mecanică** a particulei. Relațiile (2.72) și (2.73) reprezintă **forma diferențială a legii conservării energiei mecanice**, care se enunță astfel: în cursul mișcării unei particule într-un câmp de forțe static al cărui lucru mecanic nu depinde de drumul urmat, energia mecanică a particulei nu variază în timp. **Forma integrală a legii conservării energiei** se obține din relația (2.66) și forma (2.63) a teoremei energiei cinetice:

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \\ \rightarrow (E_{cin} + U)_{t_2} &= (E_{cin} + U)_{t_1} \end{aligned} \quad (2.75)$$

În consecință, atunci când o particulă se mișcă într-un câmp de forțe static, derivat dintr-o energie potențială se definește energia mecanică a particulei cu proprietatea esențială că se conservă în timp. Mărimea conservată E este complet determinată de starea inițială a particulei:

$$E[\vec{r}(t), \vec{v}(t)] \equiv E(\vec{r}_o, \vec{v}_o) = \frac{1}{2}m\vec{v}_o^2 + U(\vec{r}_o) \quad (2.76)$$

Observații

- din punct de vedere matematic, energia este o integrală primă a ecuației de mișcare (2.31)
- se disting două feluri de forțe: forțe pentru care se poate formula legea conservării energiei, numite **forțe conservative** și forțe care nu au această proprietate, numite **forțe neconservative**

2.6 Teoremele generale ale Mecanicii pentru un sistem de puncte materiale

Fie un sistem de N puncte materiale ($N > 1$) de mase m_i ($i = \overline{1, N}$) fiecare. Presupunem cunoscute toate forțele, exterioare și interioare, exercitate asupra particulelor din ansamblul considerat.

Vom defini **centrul de masă** al sistemului de puncte materiale, ca fiind punctul geometric caracterizat de vectorul de poziție (Fig. 4):

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ &\rightarrow \vec{R} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i\end{aligned}\quad (2.77)$$

unde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ reprezintă **masa totală** a sistemului de puncte materiale.

Observație: vectorul de poziție \vec{R} al centrului de masă este suma ponderată a vectorilor de poziție ai tuturor particulelor din sistem, cu ponderi egale cu rapoartele dintre masele particulelor individuale și masa totală a sistemului, $\frac{m_i}{M}$.

Vom defini **viteza centrului de masă** privit ca un punct fic-

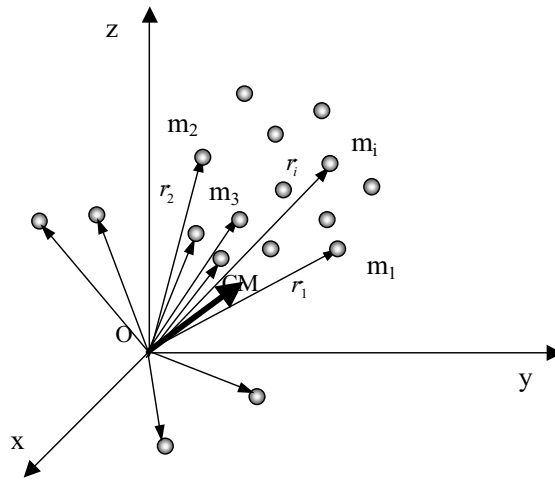


Fig. 4

tiv, ca fiind:

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.78)$$

iar accelerația centrului de masă:

$$\dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (2.79)$$

2.6.1 Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Prin definiție, **impulsul \vec{P} al sistemului de particule** este egal cu suma impulsurilor particulelor constituente:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (2.80)$$

Vom nota în continuare prin \vec{F}_{ext} ca fiind forța totală exterioară ce acționează asupra sistemului de particule și care este egală cu suma forțelor exterioare $\vec{F}_{ext,i}$ ce acționează asupra fiecărei particule, iar prin \vec{F}_{int} - forța totală interioară ce acționează asupra sistemului de particule și care este egală cu suma forțelor interioare $\vec{F}_{int,i}$ ce acționează asupra fiecărei particule (Fig. 5):

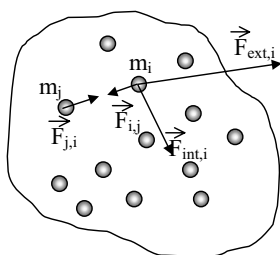


Fig. 5

$$\vec{F}_{ext} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} \quad (2.81)$$

$$\vec{F}_{int} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} \quad (2.82)$$

Forța care acționează asupra fiecărei particule i a sistemului va fi:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i} \quad (2.83)$$

iar ecuația de mișcare va fi, conform principiului doi al Mecanicii:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t) \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.84)$$

Scrise pe componente, cele N ecuații diferențiale vectoriale (2.84) revin la un sistem de $3N$ ecuații diferențiale de ordinul doi, pentru componentele vectorilor de poziție ai tuturor particulelor \vec{r}_i , ca funcții de timp. Acestui sistem îi asociem următoarele $6N$ condiții inițiale:

$$\vec{r}_i(t_o) = \vec{r}_{oi} \quad (2.85)$$

$$\dot{\vec{r}}_i(t_o) = \vec{v}_{oi}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (2.84) și condițiile inițiale (2.85) alcătuiesc o problemă Cauchy care ne oferă o soluție unică:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \quad i = \overline{1, N} \quad (2.86)$$

Această soluție reprezintă **legea de mișcare a sistemului de particule** determinată de condițiile inițiale (2.85). Ansamblul

vectorilor de poziție ai tuturor particulelor la un moment dat t $\{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)\}$, definește **configurația sistemului** în momentul respectiv. Numărul parametrilor care determină complet configurația unui sistem de particule se numește **numărul grade-
lor de libertate** ale sistemului. În cazul sistemului analizat până acum, numărul gradelor de libertate este $3N$. Ansamblul vectorilor de poziție și vitezelor tuturor particulelor la momentul t , $\{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t); \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N\}$ definește **starea mecanică a sistemului de puncte materiale** la momentul t . Prin urmare, condițiile inițiale (2.85) fixează starea mecanică la momentul t_o a sistemului, iar legea de mișcare (2.86) va reprezenta **evoluția în timp** a configurației sistemului de particule.

În continuare vom deriva, în raport cu timpul, relația (2.80):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &\equiv \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} \\ &= \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Dar, în virtutea principiului independenței acțiunilor și a principiului acțiunii și reacțiunii, rezultanta forțelor interioare este întotdeauna nulă, pentru un sistem de particule (forțele interioare acționează asupra fiecărei perechi de particule și sunt egale și de sens contrar). Ca urmare, relația (2.87) devine:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad (2.88)$$

ceea ce exprimă **teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale**: derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egală cu rezultanta tuturor forțelor exterioare exercitate asupra particulelor.

O consecință a acestei teoreme se referă la cazul în care rezultanta forțelor exterioare este nulă; atunci și numai atunci, impulsul total al sistemului de particule se conservă:

$$\vec{F}_{ext} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{P}(t) \equiv \vec{P}(t_o) \quad (2.89)$$

Această ultimă relație exprimă **legea de conservare a impulsului total**. Din punct de vedere matematic, componentele P_x , P_y și P_z sunt integrale prime ale ecuațiilor diferențiale (2.84) și sunt complet determinate de starea mecanică la momentul t_o , (2.85) a ansamblului de puncte materiale. În particular, impulsul total al unui sistem de puncte materiale izolat este constant.

Din definițiile (2.80) și respectiv (2.78) rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \\ \rightarrow M \ddot{\vec{R}} &= \vec{P} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Derivând în raport cu timpul relația (2.90) și folosind teorema impulsului (2.88), obținem:

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} \quad (2.91)$$

Relațiile (2.90) și (2.91) arată că impulsul centrului de masă al unui sistem de particule este impulsul total al sistemului, iar forța asupra centrului de masă este rezultanta tuturor forțelor exterioare exercitate asupra particulelor din sistem. Dacă se presupune cunoscută forța exterioară \vec{F}_{ext} , atunci ecuația (2.91) reprezintă ecuația de mișcare a centrului de masă și poate fi integrată, specificându-se starea mecanică la momentul inițial t_o :

$$\vec{R}(t_o) = \vec{R}_o$$

(2.92)

$$\dot{\vec{R}}(t_o) = \vec{V}_o$$

2.6.2 Teorema momentului cinetic total pentru un sistem de puncte materiale

Momentul cinetic total \vec{L} al sistemului de particule este suma momentelor cinetice individuale ale particulelor:

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{l}_i \quad (2.93)$$

Vom defini **momentul rezultant al forțelor exterioare**:

$$\vec{M}_{ext} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{M}_{ext,i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} \quad (2.94)$$

și **momentul rezultant al forțelor interioare**:

$$\vec{M}_{int} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{M}_{int,i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{int,i} \quad (2.95)$$

Derivăm în raport cu timpul relația (2.93):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{M}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times (\vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i}) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_{int,i} \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{M}}_{ext,i} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{M}}_{int,i} = \dot{\vec{M}}_{ext} + \dot{\vec{M}}_{int} \\ \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} &= \dot{\vec{M}}_{ext} + \dot{\vec{M}}_{int} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Formula (2.96) reprezintă **teorema momentului cinetic**: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egală cu suma celor două momente rezultante, al forțelor exterioare și al forțelor interioare.

O consecință a acestei teoreme se referă la cazul în care suma momentelor rezultante este nulă; atunci și numai atunci, momentul cinetic total se conservă:

$$\vec{M}_{ext} + \vec{M}_{int} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{L}(t) \equiv \vec{L}(t_0) \quad (2.97)$$

Observație

Definim un sistem de particule ca fiind un **sistem conservativ** atunci când forțele de interacțiune între toate perechile de particule nu depind de vitezele relative ale acestora, adică au forma:

$$\vec{F}_{i,j}(\vec{r}_{i,j}) = f_{i,j}(r_{i,j}) \frac{\vec{r}_{i,j}}{r_{i,j}} \quad (2.98)$$

unde $\vec{r}_{i,j} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ este vectorul poziției relative a particulelor i și j . Deci, pentru un sistem conservativ de particule este valabilă egalitatea:

$$\vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = \vec{0} \quad (2.99)$$

Vom calcula acum momentul forțelor interioare pentru un sistem conservativ de particule:

$$\vec{M}_{int} = \sum_i^N \vec{M}_{int,i} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{int,i} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \sum_{j,j \neq i} \vec{F}_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}) \\
&= \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j} = \sum_{i,j} \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = \vec{0} \\
\rightarrow \vec{M}_{int} &= \vec{0} \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Astfel, pentru un sistem conservativ de particule, mometul rezultat al forțelor interioare este întotdeauna nul. Ca urmare, legea momentului cinetic pentru un sistem conservativ este:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \tag{2.101}$$

iar legea de conservare a momentului cinetic total va avea forma:

$$\vec{M}_{ext} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{L}(t) \equiv \vec{L}(t_o) \tag{2.102}$$

Componentele constante L_x , L_y și L_z ale momentului cinetic total sunt integrale prime ale sistemului de ecuații de mișcare (2.84) și sunt complet determinate de starea mecanică la mometul t_o (2.85).

2.6.3 Teorema energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale. Conservarea energiei mecanice

Energia cinetică totală pentru un sistem de puncte materiale este defintă ca suma energiilor cinetice individuale ale tuturor particulelor:

$$E_{cin} \equiv \sum_{i=1}^N E_{cin,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \tag{2.103}$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forțelor exterioare:

$$dL_{ext} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} \cdot d\vec{r}_i \quad (2.104)$$

iar **lucrul mecanic elementar al forțelor interioare** este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forțelor interioare:

$$dL_{int} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i \quad (2.105)$$

Diferențiala energiei cinetice totale, plecând de la definiția (2.103), va fi:

$$\begin{aligned} dE_{cin} &= \sum_{i=1}^N dE_{cin,i} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i}) d\vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i = dL_{ext} + dL_{int} \\ \rightarrow dE_{cin} &= dL_{ext} + dL_{int} \end{aligned} \quad (2.106)$$

ceea ce reprezintă **teorema energiei cinetice** pentru un sistem de particule, sub **formă diferențială** adică, variația energiei cinetice totale a unui sistem de particule într-un interval de timp infinitesimal dt este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare efectuate de forțele exterioare și de forțele interioare. Dacă se integrează expresia (2.106) se va obține **forma integrală a teoremei energiei cinetice**:

$$E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) = L_{ext}[t_1, t_2] + L_{int}[t_1, t_2] \quad (2.107)$$

unde $L_{ext}[t_1, t_2]$ și respectiv $L_{int}[t_1, t_2]$ reprezintă lucrul mecanic integral al forțelor exterioare, respectiv interioare.

Vom considera în continuare un sistem de particule conservativ. Ținând cont de expresia (2.98) a forțelor interioare, atunci lucrul mecanic elementar al forțelor interioare:

$$dL_{int} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i = -d \sum_{i,j} U_{ij} \quad (2.108)$$

unde

$$U_{int} = \sum_{i,j} U_{ij}(r_{i,j}) \quad (2.109)$$

reprezintă **energia potențială a forțelor interioare**. Astfel, lucrul mecanic elementar al forțelor interioare va fi:

$$dL_{int} = -dU_{int} \quad (2.110)$$

iar lucrul mecanic integral al forțelor interioare nu depinde decât de configurațiile inițială și finală ale sistemului:

$$L_{int}[t_1, t_2] = -[U_{int}(t_2) - U_{int}(t_1)] \quad (2.111)$$

Dacă vom înlocui acest rezultat în expresia matematică a teoremei energiei cinetice (2.106) vom obține:

$$d(E_{cin} + U_{int}) = dL_{ext} \quad (2.112)$$

Suma dintre energia cinetică totală și energia potențială a forțelor interioare se numește **energia mecanică internă** a sistemului conservativ:

$$E_{int} = E_{cin} + U_{int} \quad (2.113)$$

În orice interval de timp în care lucrul mecanic al forțelor exterioare este identic nul și numai atunci, energia internă a sistemului se conservă în timp:

$$L_{ext}[t_1, t_2] \equiv 0 \leftrightarrow E_{int}(t_0) \equiv E_{int}(t_1) \quad (2.114)$$

ceea ce reprezintă **teorema de conservare a energiei mecanice interne**.

Analog, dacă se analizează cazul în care asupra sistemului conservativ acționează numai forțe exterioare conservative:

$$\vec{F}_{ext,i}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}U_{ext,i}(\vec{r}_i) \quad (2.115)$$

atunci suma:

$$U_{ext}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_{ext,i}(\vec{r}_i) \quad (2.116)$$

reprezintă **energia potențială a forțelor exterioare**. Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare conservative este egal cu diferențiala totală a energiei potențiale a forțelor exterioare $-dU_{ext}$:

$$dL_{ext} = -dU_{ext} \quad (2.117)$$

Deci, lucrul mecanic integral al forțelor exterioare în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ depinde doar de configurațiile inițială și finală ale sistemului conservativ:

$$L_{ext}[t_1, t_2] = -[U_{ext}(t_2) - U_{ext}(t_1)] \quad (2.118)$$

Pornind de la expresia (2.117), și dacă vom ține cont și de teorema energiei mecanice interne (2.112) atunci vom obține identitatea:

$$d(E_{cin} + U_{int} + U_{ext}) = 0 \quad (2.119)$$

Vom defini **energia potențială totală** a sistemului suma dintre energia potențială a forțelor exterioare și energia potențială a forțelor interioare:

$$U \equiv U_{int} + U_{ext} \quad (2.120)$$

iar suma dintre energia potențială totală și energia cinetică totală se numește **energia mecanică totală** a sistemului de puncte materiale:

$$E \equiv E_{cin} + U = E_{cin} + U_{int} + U_{ext} = E_{int} + U_{ext} \quad (2.121)$$

Relația (2.119) exprimă sub formă diferențială **legea de conservare a energiei totale** pentru un sistem de particule conservativ, aflat într-un câmp de forțe exterioare conservative, adică:

$$E(t) \equiv E(t_o) \quad (2.122)$$

Energia totală este o integrală primă a sistemului ecuațiilor de mișcare (2.84) și este complet determinată de starea mecanică inițială, la momentul t_o .

2.6.4 Teoremele lui König

Să analizăm în continuare cum se descompune mișcarea unui sistem de particule față de două sisteme de referință S și S' . Fie un sistem de referință S' cu originea plasată în centrul de masă C al unui ansamblu de particule și având o mișcare de translație față de sistemul de referință inerțial S (Fig.6).

Mișcarea ansamblului de particule în sistemul S se numește **mișcare absolută**, iar în sistemul S' se numește **mișcare relativă față de centrul de masă**. Pentru un punct material P (Fig.6) al

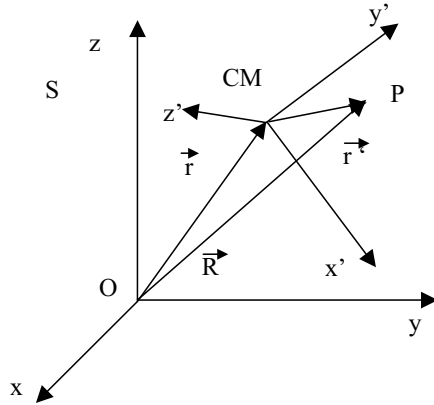


Fig.6

sistemului de particule sunt adevărate relațiile:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i \quad (2.123)$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i \quad (2.124)$$

Deoarece centrul de masă al sistemului de particule are față de sistemul de referință S' vectorul de poziție $\vec{R}' = 0$, din relațiile (2.77) și (2.78) rezultă:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad (2.125)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \quad (2.126)$$

Vom defini **momentul cinetic total** \vec{L}' și **energia cinetică totală** E'_{cin} ale sistemului de particule în mișcarea relativă față de centrul de masă prin relațiile:

$$\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \quad (2.127)$$

$$E'_{cin} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v'^2 \quad (2.128)$$

Ne interesează în continuare care este relația dintre momentul cinetic total \vec{L} , în mișcarea absolută și momentul cinetic total \vec{L}' , în mișcarea relativă față de centrul de masă:

$$\begin{aligned} \vec{L} &\equiv \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N [(m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V} + \vec{v}'_i))] \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) (\vec{R} \times \vec{V}) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times \vec{V} + \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) = M (\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{L}' \\ \rightarrow \vec{L} &= M (\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{L}' \end{aligned} \quad (2.129)$$

Relația (2.129) reprezintă **teorema lui König pentru momentul cinetic**: momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egal cu suma dintre momentul cinetic al centrului de masă, în care se presupune concentrată masa totală a sistemului, și momentul cinetic în mișcarea relativă față de centrul de masă.

Să vedem în continuare care sunt relațiile dintre energiile cinetice

totale E_{cin} , în mișcarea absolută și E'_{cin} , în mișcarea relativă față de centrul de masă:

$$\begin{aligned}
 E_{cin} &\equiv \sum_{i=1}^N E_{cin,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} M V^2 + E'_{cin} \\
 \rightarrow E_{cin} &= \frac{1}{2} M V^2 + E'_{cin} \qquad (2.130)
 \end{aligned}$$

Relația (2.130) reprezintă **teorema lui König pentru energia cinetică**: energia cinetică totală a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma dintre energia cinetică a centrului de masă, presupus a avea masa egală cu masa totală a sistemului, și energia cinetică totală în mișcarea relativă față de centrul de masă.

Observație: teoremele momentului cinetic și energiei cinetice, valabile într-un sistem de referință inerțial S , își păstrează forma în sistemul de referință S' , care în general este neinerțial.

2.7 Probleme

2.1 Vectorul de poziție al unui punct material este dat de legea de mișcare:

$$\vec{r} = 5(\cos 3t)\vec{i} + 4(\sin 3t)\vec{j}$$

unde (r) este măsurat în metri iar timpul t în secunde. Determinați:

a). viteza și accelerația particulei la momentul $t = 10s$ de la începerea mișcării

b). traiectoria pe care se mișcă punctul material

Rezolvare:

a. Legea vitezei punctului material se determină din relația de definiție:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos 3t \vec{i} + 4 \sin 3t \vec{j}) \\ &= -15 (\sin 3t) \vec{i} + 12 (\cos 3t) \vec{j}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(15 \sin 3t)^2 + (12 \cos 3t)^2} \\ &= 3\sqrt{(-9 \cos^2 3t + 25)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ viteza este:

$$v(1) = 3\sqrt{(-9 \cos^2 30 + 25)} = 14.936m/s$$

Pentru accelerație se procedează în mod similar:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-15 \sin 3t \vec{i} + 12 \cos 3t \vec{j}) \\ &= -45 (\cos 3t) \vec{i} - 36 (\sin 3t) \vec{j}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului accelerație este:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{(-45 \cos 3t)^2 + (-36 \sin 3t)^2} \\ &= 9\sqrt{(9 \cos^2 3t + 16)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ accelerația este:

$$a(1) = 9\sqrt{(9 \cos^2 30 + 25)} = 45.192m/s^2$$

b. Ecuația traiectoriei de găsește prin eliminarea timpului din ecuațiile cinematice ale mișcării:

$$\begin{aligned}x &= 5 \cos 3t \\y &= 4 \sin 3t\end{aligned}$$

Folosind relația fundamentală din trigonometrie:

$$\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$$

se obține:

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Aceasta reprezintă ecuația unei elipse cu semiaxele de $2m$ și respectiv $5m$.

2.2 Un punct material se deplasează cu viteza constantă v pe o elice definită de ecuațiile parametrice:

$$\begin{aligned}x &= 5 \cos 2t \\y &= 5 \sin 2t \\z &= vt\end{aligned}$$

unde distanțele (x, y, z) sunt măsurate în metri iar timpul t în secunde. Determinați accelerația particulei în funcție de timp.

Rezolvare:

Conform definiției, accelerația este:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

unde:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(-10 \sin 2t) = -20 \cos 2t \\ \ddot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(10 \cos 2t) = -20 \sin 2t \\ \ddot{z} &= \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = 0\end{aligned}$$

Vectorul accelerație este:

$$\vec{a} = -20 \cos 2t \vec{i} - 20 \sin 2t \vec{j}$$

iar mărimea accelerației depinde de timp după legea:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-20 \cos 2t)^2 + (-20 \sin 2t)^2} = 20m/s^2$$

2.3 Se știe că viteza unui punct material variază în timp după legea:

$$\vec{v}(t) = 1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k}(m/s)$$

Să se determine:

- a). deplasarea punctului material între momentele de timp $t_1 = 1s$ și $t_2 = 3s$
- b). mărimea și orientarea accelerației (cosinușii directori ai unghiurilor α, β, γ dintre vectorul accelerație și axele de coordonate) la

momentul de timp $t_2 = 3s$

Rezolvare:

a. Variația vectorului de poziție în intervalul de timp considerat:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

este:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Din definiția vitezei se observă că:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{v}dt \\ \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} d\vec{r} &= \int_{t_2}^{t_1} \vec{v}dt \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \int_1^3 (1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k})dt \\ &= 13.0\vec{i} + 7.2\vec{j} + 20.0\vec{k} \end{aligned}$$

Mărimea acestei deplasări este:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{13.0^2 + 7.2^2 + 20.0^2} = 24.917m$$

b. Vectorul accelerație este:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k}) = \\ &= 3.0t\vec{i} + 1.8\vec{j} + 3t^2\vec{k} \end{aligned}$$

iar mărimea:

$$\begin{aligned} a(t = 2) &= \sqrt{(3.0 \times 2)^2 + (1.8)^2 + (3.0 \times 4)^2} \\ &= 13.537 m/s^2 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{3.0 \times 2}{13.537} = 0.4432$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{a} = \frac{1.8}{13.537} = 0.1329$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{3.0 \times 4}{13.537} = 0.8864$$

Evident că trebuie să se verifice relația:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \\ 0.4432^2 + 0.1329^2 + 0.8864^2 &= 0.9998 \end{aligned}$$

2.4 Să se deducă ecuația de mișcare a unui corp de masă m sub acțiunea unei forțe constante:

$$F(x, \dot{x}, t) = F_0 = \text{const.}$$

Rezolvare

Folosind definiția accelerației și principiul fundamental al mecanicii, se găsește prin integrare:

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dx = \frac{1}{m} \int_0^t F dt = \frac{F_0}{m} t + \dot{x}(0)$$

Constanta de integrare este valoarea vitezei la momentul inițial. Se observă că viteza crește liniar cu timpul. Integrând din nou, având în vedere definiția vitezei, obținem ecuația de mișcare:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt = \frac{F_0}{2m} t^2 + \dot{x}(0)t + x(0)$$

Trebuie făcută observația că alegerea momentului de timp $t_0 = 0$ este arbitrară. Ecuația mișcării este valabilă la orice alt moment de timp considerat inițial, t_0 , sub forma:

$$x(t - t_0) = \frac{F_0}{2m} (t - t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$$

Expresia obținută reprezintă ecuația unei parabole.

2.5 Un corp de masă m se află inițial în repaus și asupra lui se aplică o forță:

$$F = F_0 e^{-\lambda t}$$

unde $\lambda > 0$, F_0 – constante. Determinați legea de mișcare și legea vitezei.

Rezolvare:

Deoarece mișcarea se presupune unidimensională:

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t}$$

După separarea variabilelor se poate integra:

$$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

Se obține:

$$v(t) = \frac{F_0}{\lambda m} (1 - e^{-\lambda t})$$

Legea spațiului o obținem prin integrarea legii vitezei:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v dt$$
$$x(t) = \int_0^t (1 - e^{-\lambda t}) dt$$
$$x(t) = \frac{F_0}{\lambda^2 m} (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1)$$

2.6 Să se studieze mișcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acțiunea unei forțe de tipul $F = -kv$.

Rezolvare:

Înlocuind expresia forței în ecuația diferențială a mișcării:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

După separarea variabilelor:

$$dt = -\frac{m}{k} \frac{dv}{v}$$

și integrare, rezultă:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k} \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{v}$$

În urma efectuării integralei și după rearanjarea termenilor se obține:

$$\frac{k}{m} (t - t_0) = \ln v_0 - \ln v$$

Considerând că $t_0 = 0$, și că $v(t_0) = v_0$ după aplicarea funcției inverse logaritmului, se obține expresia legii vitezei:

$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \\ &= v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

unde

$$\tau = \frac{m}{k}$$

Semnificația coeficientului τ este acum evidentă. Pentru ca relația vitezei să fie corectă dimensional trebuie ca exponentul să fie adimensional. Prin urmare

$$[\tau] = T^{-1}$$

și reprezintă un timp, numit *timp de relaxare*. Se observă că:

$$t = \tau \Rightarrow v = \frac{v_0}{e}$$

Timpul de relaxare se definește ca timpul după care viteza scade de e ori.

Analizând graficul vitezei dat în Fig. 2.6.1 putem face unele observații legate de cazurile limită.

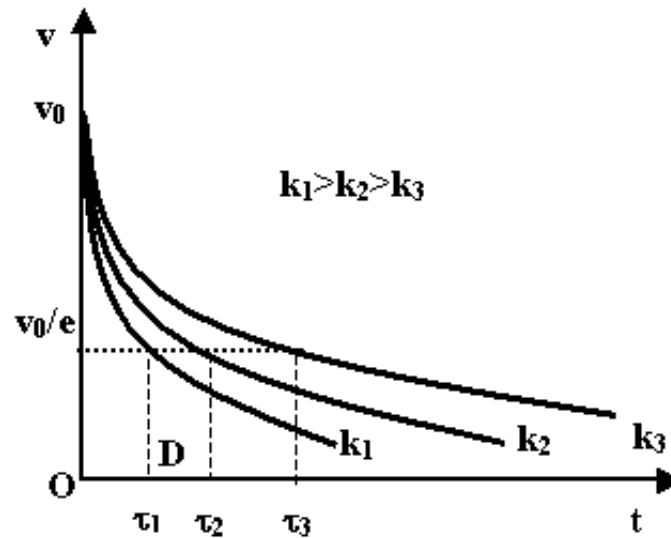


Fig. 2.6.1: Dependența de timp a vitezei, $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, pentru trei valori diferite ale coeficientului de frecare:
 $k_1 > k_2 > k_3$

Se observă că pe măsură ce scade valoarea lui k , scăderea exponentială a vitezei se face pe un drum mai lent, timpii de relaxare corespunzători scăzând.

Pentru a găsi legea mișcării, integram din nou legea vitezei:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{v}{\tau}} dt$$

unde x_0 este poziția corespunzătoare momentului inițial $t_0 = 0$. Efectuând integrala se obține în final legea mișcării, sub forma:

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

O analiză simplă a acestei relații arată că, oricât de lung ar fi timpul avut la dispoziție de corp, el nu se mișcă la infinit ci doar pe o distanță finită.

Din Fig. 2.6.2 se observă că pe măsură ce scade valoarea lui k , distanța parcursă de corp crește. Oricât de mult ar crește însă timpul de mișcare, distanța parcursă nu poate depăși o anumită limită. Să analizăm cazurile limită ale mișcării.

- Pentru un interval de timp scurt, imediat după începerea mișcării, $\frac{t}{\tau} \rightarrow 0$. Folosim dezvoltarea în serie Taylor:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

Acest lucru ne permite să scriem legea vitezei ca:

$$\begin{aligned} v &= v_0 \left(1 - \frac{k}{m} t + \dots \right) \simeq v_0 - \frac{k v_0}{m} t = \\ &= v_0 + \frac{F_0}{m} t = v_0 + a_0 t \end{aligned}$$

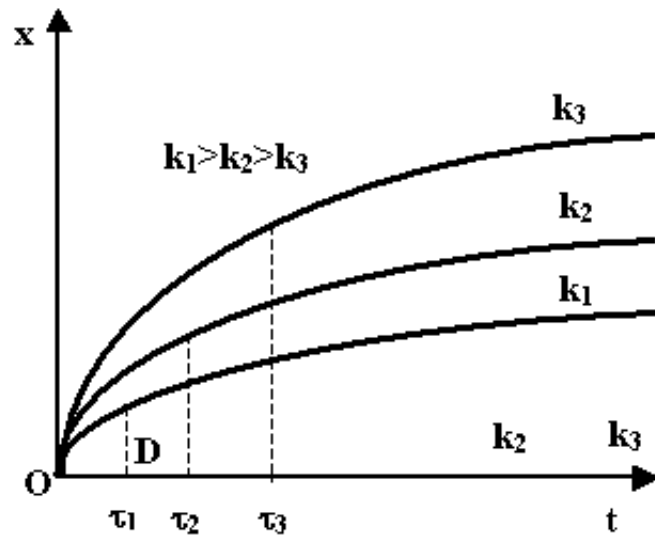


Fig. 2.6.2: Reprezentarea spațiului parcurs pentru diferite valori ale coeficientului de frecare, pentru cazul $x_0 = 0$

unde:

$$a_0 = \frac{F^0}{m}$$

$$F_0 = -kv_0$$

corespund accelerației și respectiv forței la momentul $t = 0$. Folosind aceeași aproximare și pentru spațiul parcurs, se obține:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{k} \left(1 - 1 + \frac{k}{m} t - \frac{1}{2} \frac{k^2}{m^2} t^2 \dots \right) \simeq$$

$$\simeq x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \frac{v_0 k}{m} t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Se observă că s-au regăsit ecuațiile mișcării sub acțiunea unei forțe constante.

- Analizăm ce se întâmplă după un interval de timp suficient de lung, adică atunci când $t \rightarrow \infty$. Deoarece:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} = 0$$

viteza limită devine:

$$v \rightarrow 0$$

iar spațiul limită:

$$x \rightarrow x_0 + \frac{v_0 m}{k}$$

2.7 Să se studieze mișcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acțiunea unei forțe de tipul $F = -kv^2$.

Rezolvare:

Înlocuim expresia forței în ecuația diferențială a mișcării:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

După separarea variabilelor:

$$dt = -\frac{m}{k} \frac{dv}{v^2}$$

găsim:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

ceea ce conduce, după integrare și considerarea lui $t_0 = 0$, la expresia vitezei:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t}$$

Aflăm legea spațiului printr-o nouă integrare.

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t} dt$$

Integrala din membrul al doilea se rezolvă ușor dacă se face substituția: $u = 1 + \frac{kv_0}{m}t$. Se obține:

$$x = x_0 + \frac{m}{k} \ln \left(\frac{kv_0}{m}t + 1 \right)$$

2.8 Să se studieze mișcarea unidimensională a unui corp de masă m legat de un resort cu constanta elastică k , în absența frecării.

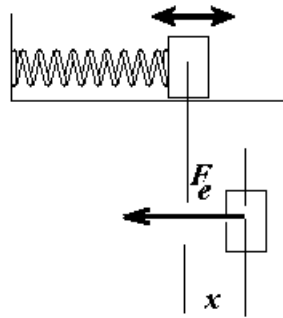


Fig. 2.8.1

Rezolvare:

Înlocuim expresia forței în ecuația diferențială a mișcării:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

Vom studia această mișcare folosind legea conservării energiei. Trebuie să aflăm așadar care este valoarea energiei cinetice și a celei potențiale.

Conform definiției, valoarea energiei potențiale a forței elastice corespunzătoare unei deformări oarecare x a resortului luând ca referință valoarea zero pentru energia potențial în poziția nedeformată a resortului, este:

$$E_p(x) = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

În punctul $x = 0$ energia potențială este nulă, de aceea energia totală este în întregime energie cinetică.

$$E(x = 0) = E_c$$

Să considerăm valoarea energiei cinetice de forma:

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2$$

A este distanța maximă până la care poate ajunge punctul material și se numește **amplitudine**.

Scriem conservarea energie între momentul în care corpul trece prin poziția nedeformată și un moment oarecare:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{2}{m} \frac{k}{2} (A^2 - x^2) \\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m} \frac{k}{2} (A^2 - x^2)} \end{aligned}$$

După separarea variabilelor se obține:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{k}{2} [A^2 - x^2]}} = \\ &= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{k}{m} A^2 [1 - \sin^2 \theta]}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A \cos \theta d\theta}{\omega A \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{\omega_0} (\arcsin x/A - \arcsin x_0/A)
\end{aligned}$$

S-a făcut schimbarea de variabilă $x = A \sin \theta$ și s-a notat $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Considerând că $t_0 = 0$ și aflând pe x în funcție de t rezultă:

$$\omega_0 t + \arcsin \frac{x_0}{A} = \arcsin \frac{x}{A}$$

adică:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \arcsin \frac{x_0}{A})$$

Mărimea ω_0 se numește **frecvență unghiulară** sau **pulsăția proprie** a oscilațiilor iar $\varphi_0 = \arcsin \frac{x_0}{A}$ **faza inițială** a mișcării. După cum este definită, frecvența unghiulară este o mărime constantă, caracteristică corpului și nu depinde de condițiile inițiale. În Fig. 2.8.2 este reprezentarea grafică a unei mișcări oscilatorii cu vizualizarea principalelor mărimi caracteristice.

2.9 O bilă legată de un punct fix printr-un fir se rotește uniform pe un plan orizontal neted fără frecări cu turația n_1 . De câte ori se modifică turația bilei dacă firul se scurtează la jumătate?

Rezolvare:

Pentru un sistem izolat, momentul cinetic se conservă. Ca urmare:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

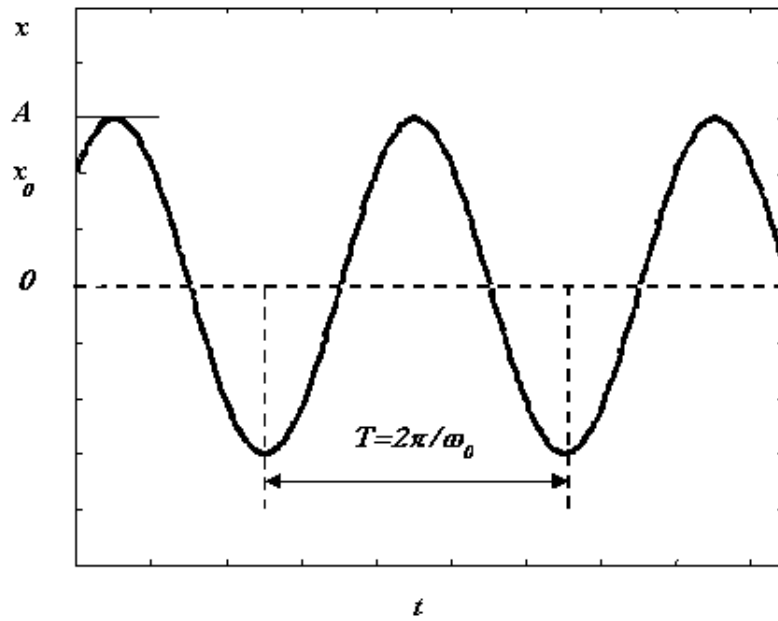


Fig.2.8.2 - Reprezentarea grafică a unei mișcări oscilatorii

Conform definiției:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Deoarece mișcarea bilei se produce în permanență în același sens, nici direcția și nici modulul vectorului nu se modifică (determinate prin regula burghiului). Ca urmare, conservarea implică egalitatea mărimilor momentului unghiular pentru cele două situații.

$$\begin{aligned} r_1 m v_1 &= r_2 m v_2 \Rightarrow \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

Vitezele v_1 și v_2 sunt viteze liniare în mișcările circulare de raze corespunzătoare r_1 și r_2 .

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 r_1 = 2\pi n_1 r_1 \\ v_2 &= \omega_2 r_2 = 2\pi n_2 r_2 \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1 r_1}{n_2 r_2}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} &= \frac{n_1 r_1}{n_2 r_2} \Rightarrow \\ \frac{n_2}{n_1} &= \frac{r_1^2}{r_2^2} \end{aligned}$$

Înlocuind valorile numerice, se obține:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1^2}{(r_1/2)^2} = 4$$

2.10 Demonstrați că următoarea forță este conservativă și găsiți energia potențială corespunzătoare:

$$\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$$

a, b, c – constante.

Rezolvare:

Pentru a demonstra că forța este conservativă, verificăm condiția integrală:

$$\text{rot}\vec{F} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

Intr-adevăr:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & by & cz \end{vmatrix} = 0$$

Ca urmare, forța este conservativă și poate fi definită energia potențială:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

De aici rezultă diferența de energie potențială dintre două puncte oarecare:

$$U - U_0 = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

În coordonate carteziene acest lucru înseamnă:

$$\begin{aligned} U - U_0 &= - \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= - \int F_x dx - \int F_y dy - \int F_z dz \\ &= - \int a x dx - \int b y dy - \int c z dz \\ &= - \frac{1}{2} (a x^2 + b y^2 + c z^2) \end{aligned}$$

2.11 Să se găsească pentru următorul sistem de puncte materiale:

$$\begin{aligned} m_1 = 1kg, \vec{r}_1 &= 2t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 4\vec{k}(m) \\ m_2 = 3kg, \vec{r}_2 &= (1 + t^2)\vec{i} + (2 + 5t)\vec{j}(m) \\ m_3 = 5kg, \vec{r}_3 &= (1 + 2t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{k}(m) \end{aligned}$$

la momentele de timp $t = 0s$ și $t = 10s$: (a) poziția centrului de masă; (b) viteza centrului de masă; (c) impulsul sistemului; (d) energia cinetică.

Rezolvare:

a. Vectorul de poziție al centrului de masă este:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

După înlocuirea valorilor date în ipoteza problemei, rezultă:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{CM} &= \frac{2t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 4\vec{k} + 3[(1+t^2)\vec{i} + (2+5t)\vec{j}]}{1+3+5} \\ &\quad + \frac{5[(1+2t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{k}]}{1+3+5} \\ &= \frac{1}{9}(15t^2 + 8)\vec{i} + \frac{1}{9}(18t + 6)\vec{j} + \frac{4}{9}(1 + 5t^2)\vec{k}\end{aligned}$$

Valorile vectorului de poziție la momentele de timp $t_1 = 0s$ și $t_2 = 10s$ sunt:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{CM}(0) &= \frac{8}{9}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k} \\ \vec{R}_{CM}(10) &= \frac{1508}{9}\vec{i} + \frac{62}{3}\vec{j} + \frac{668}{3}\vec{k}\end{aligned}$$

b. Derivăm expresia vectorului de poziție și obținem viteza centrului de masă:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{CM} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{9}(15t^2 + 8)\vec{i} + \frac{1}{9}(18t + 6)\vec{j} + \frac{4}{9}(1 + 5t^2)\vec{k} \right] \\ &= \frac{10}{3}t\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{40}{9}t\vec{k}\end{aligned}$$

Valorile vectorului viteză la momentele de timp $t_1 = 0s$ și $t_2 = 10s$ sunt:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{CM}(0) &= 2\vec{j} \\ \vec{V}_{CM}(10) &= \frac{100}{3}\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{400}{9}\vec{k}\end{aligned}$$

c. Impulsul sistemului este:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= (m_1 + m_2 + m_3)\vec{V}_{CM} \\ &= 30t\vec{i} + 18\vec{j} + 44t\vec{k} \\ \vec{P}(0) &= 18\vec{j} \\ \vec{P}(10) &= 300t\vec{i} + 18\vec{j} + 440\vec{k}\end{aligned}$$

d. Energia cinetică:

$$\begin{aligned}E_{cin}(t) &= E_{cin,1}(t) + E_{cin,2}(t) + E_{cin,3}(t) \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2(t) + \frac{1}{2}m_2v_2^2(t) + \frac{1}{2}m_3v_3^2(t)\end{aligned}$$

Vectorii viteză pentru cele trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{d}{dt}(2t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 4\vec{k}) = 4t\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{v}_2 &= \frac{d}{dt}[(1+t^2)\vec{i} + (2+5t)\vec{j}] = 2t\vec{i} + 5\vec{j} \\ \vec{v}_3 &= \frac{d}{dt}[(1+2t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{k}] = 4t\vec{i} + 8t\vec{k}\end{aligned}$$

iar mărimile corespunzătoare:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \sqrt{(4t)^2 + 3^2}; v_1(0) = 3m/s; v_1(10) = 40.11m/s \\v_2(t) &= \sqrt{(2t)^2 + 5^2}; v_2(0) = 5m/s; v_2(10) = 20.62m/s \\v_3(t) &= \sqrt{(4t)^2 + (8t)^2}; v_3(0) = 0m/s; v_3(10) = 89.44m/s\end{aligned}$$

După evaluările numerice se obține:

$$\begin{aligned}E_{cin}(0) &= 42.0J \\E_{cin}(10) &= 21.44kJ\end{aligned}$$

Capitolul 3

Mecanica analitică

3.1 Mărimi caracteristice

În Mecanica newtoniană se studiază mișcarea corpurilor macroscopice care se deplasează cu viteze mici în comparație cu viteza luminii, printr-o **abordare locală**. Ecuția de bază cu ajutorul căreia se poate determina starea mecanică a unui corp este ecuația Newton, dată de principiul doi al Mecanicii:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (3.1)$$

Dacă se cunosc forțele care acționează asupra corpului (sistemului) precum și starea mecanică inițială (\vec{r}_o, \vec{v}_o) , atunci se poate determina, la orice moment t starea mecanică a corpului (\vec{r}, \vec{v}) .

Mecanica analitică a fost dezvoltată de către Lagrange, Euler și Hamilton în scopul rezolvării unor probleme mai complicate de mecanică. Studiul mișcării unui sistem fizic, în Mecanica analitică, **are la bază un principiu de extremum** care ne spune că mișcarea are loc întotdeauna pe aceea traiectorie pentru

care o anumită funcție, care descrie starea sistemului, își atinge extremul.

Ecuțiile ce descriu mișcarea unui sistem în abordarea analitică sunt ecuații cu derivate parțiale de ordinul I și II.

Acest formalism este folosit în studiul sistemelor cu un număr mare de constituenți (de exemplu în Mecanica statistică) sau pentru **sisteme mecanice cu legături**.

Fie un sistem format din N puncte materiale. Starea mecanică a sistemului este definită, la fiecare moment, prin coordonatele carteziene și componentele vitezelor tuturor punctelor față de un sistem de referință inerțial. Vom folosi următoarele notații pentru coordonatele carteziene și pentru componentele vitezelor celor N puncte materiale:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N} \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6, \dots, \dot{x}_{3N-2}, \dot{x}_{3N-1}, \dot{x}_{3N} \quad (3.3)$$

unde s-a ținut cont că fiecare particulă este caracterizată de trei coordonate carteziene și respectiv trei componente ale vitezei. O notație similară va fi folosită și pentru forță:

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \dots, F_{3N-2}, F_{3N-1}, F_{3N} \quad (3.4)$$

unde primele trei valori reprezintă componentele forței totale ce se exercită asupra primului punct material s.a.m.d.

Ecuțiile de mișcare pentru sistemul de N puncte materiale caracterizate prin coordonatele carteziene (3.2), scrise pe componente vor fi:

$$m_s \ddot{x}_s = F_s \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.5)$$

cu convenția ca:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_3 \\ m_4 &= m_5 = m_6 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ m_{3N-2} &= m_{3N-1} = m_{3N} \end{aligned}$$

adică, primele trei componente ale masei sunt egale și reprezintă masa primei particule, s.a.m.d.

Se spune că sistemul este supus unor **legături** (sau constrângeri), dacă sunt impuse anumite restricții asupra alegerii variabilelor (3.2) și (3.3). Aceste restricții se exprimă prin anumite relații, care pot avea fie forma unor egalități, fie cea a unor inegalități:

$$f(x_s, \dot{x}_s, t) = 0 \quad \text{sau} \quad f(x_s, \dot{x}_s, t) \geq 0 \quad (3.6)$$

Vom considera în continuare acele legături care depind numai de coordonatele de poziție și de timp, $f(x_s, t) = 0$. Dacă vom deriva această relație în raport cu timpul, vom obține:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_s} \dot{x}_s \quad (3.7)$$

Se observă că această relație conține și vitezele \dot{x}_s . Dacă toate relațiile care conțin vitezele se pot obține prin derivarea în raport cu timpul a unor relații în care apar numai coordonatele de poziție (și eventual timpul) se spune că sistemul este supus unor **legături olonome**. Dacă există relații care conțin vitezele \dot{x}_s dar

care nu pot fi obținute prin derivarea în raport cu timpul a unor relații numai între coordonatele de poziție, se spune că sistemul este supus la **legături neolonome**.

Vom considera în continuare numai sistemele de particule supuse unor legături olonome exprimate prin relații de forma:

$$f_k(x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.8)$$

unde ν reprezintă numărul de legături la care este supus sistemul.

Observație: numărul ν nu poate fi arbitrar de mare. Sistemul $f_k(x_s, t) = 0$ este un sistem în necunoscutele x_s . Dacă ,

- $\nu > 3N$, atunci sistemul devine incompatibil și nu are sens fizic
- $\nu = 3N$, atunci sistemul poate fi rezolvat și se pot determina cele $3N$ necunoscute
- $\nu < 3N$, atunci sistemul este nedeterminat

Acest ultim caz este cel mai interesant din punct de vedere fizic. Vom nota prin:

$$l = 3N - \nu \quad (3.9)$$

diferența dintre numărul necunoscutelor și numărul legăturilor (ecuațiilor). Acest număr întreg și pozitiv reprezintă **numărul gradelor de libertate** ale sistemului mecanic dat. Deci, l dintre variabilele x_s pot fi alese în mod arbitrar (independente), iar restul $\nu = 3N - l$ pot fi determinate în funcție de primele prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$f_k(x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} < 3N \quad l = 3N - \nu \quad (3.10)$$

Pentru a lucra numai cu variabile independente, Lagrange parametrizează realțiile (3.10), adică variabilele x_s sunt exprimate în funcție de noi variabile q_i , ($i = \overline{1, l}$) și eventual de timp:

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.11)$$

Variabilele q_i se numesc **coordonatele generalizate** ale lui Lagrange, iar numărul lor este egal evident cu l , numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Variabilelor generalizate q_i ($i = \overline{1, l}$) li se poate asocia un spațiu matematic cu l dimensiuni numit **spațiul configurațiilor**.

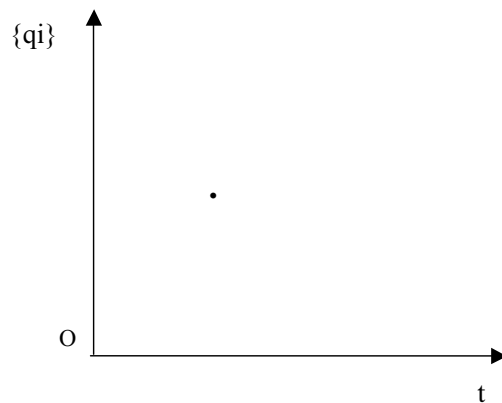


Fig.1

Fiecărui punct din acest spațiu îi corespunde un **ansamblu de valori** [$q_i(i = 1, 2, 3 \dots l)$]. Cu alte cuvinte, unei configurații instantanee a sistemului de N particule îi corespunde un punct în

spațiul configurațiilor numit **punct reprezentativ**. Odată cu schimbarea în timp a configurației sistemului rezultă o schimbare a poziției punctului reprezentativ, astfel încât el descrie o curbă în acest spațiu numită **traietorie generalizată** caracterizată prin **ecuațiile parametrice**:

$$q_i = q_i(t) \quad i = \overline{1, l} \quad (3.12)$$

Să presupunem dat un sistem de N puncte materiale asupra căora acționează niște forțe date, de componente F_s ($s = \overline{1, 3N}$) (3.4). Dacă sistemul nu ar fi supus unor legături, atunci ecuațiile de mișcare ar avea forma (3.5). Dacă însă există legături, date prin relații de forma (3.8), atunci ecuațiile de mișcare nu mai pot fi scrise sub forma (3.5). Existența legăturilor atrage după sine apariția unor noi forțe, denumite **forțe (reacții) de sprijin (sau de legătură)** și notate prin R_s . Deci, ecuațiile de mișcare pentru un sistem de N particule supus la legături se va scrie sub forma:

$$m_s \ddot{x}_s = F_s + R_s \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.13)$$

Se observă că, spre deosebire de forțele F_s , care sunt propuse date, reacțiile R_s sunt necunoscute și ele trebuie determinate din condițiile problemei.

Dacă legăturile impuse sistemului de puncte materiale obligă unul dintre puncte de a se afla permanent pe o anumită curbă, aceasta exercită asupra punctului material respectiv o forță de sprijin \vec{R} . În acest caz vom descompune forța \vec{R} într-o componentă \vec{R}_n situată în planul normal la curbă și o componentă \vec{R}_t situată de-a lungul tangentei la curbă. Componenta \vec{R}_t se numește **forța de frecare** exercitată de curbă asupra punctului și se opune deplasării acestuia în lungul curbei.

3.2 Formalismul Lagrange

3.2.1 Principiul lucrului mecanic virtual

Fie un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome (3.8) și cu l grade de libertate. Vom presupune că frecările sunt neglijabile, adică **legăturile sunt perfecte**. Ecuațiile de mișcare au forma (3.13) unde F_s reprezintă componentele forțelor date, iar R_s componentele forțelor de sprijin necunoscute.

Pentru determinarea mișcării unui sistem de felul celui considerat, Lagrange propune următoarea metodă ce constă din două etape:

- determinarea funcțiilor $x_s(t)$
- determinarea reacțiilor R_s cu ajutorul ecuațiilor (3.13) scrise sub forma:

$$R_s = m_s \ddot{x}_s - F_s \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.14)$$

Pentru rezolvarea primei etape vor trebui eliminate forțele de legătură R_s . Pentru aceasta se va ține cont că legăturile sunt perfecte, deci componentele tangențiale ale forțelor de sprijin se anulează. Dacă deplasăm arbitrar orice punct material al sistemului de-a lungul curbei pe care acest punct este obligat să se găsească în baza legăturilor, forța de sprijin rămâne normală la curbă, iar lucrul mecanic efectuat de această forță va fi nul. Această afirmație este însă adevărată numai dacă curba nu se deplasează în timp.

Aceste considerații ne conduc la definirea **deplasării virtuale** δx_s a sistemului considerat, ca fiind orice variație continuă a coordonatelor x_s , astfel încât condițiile de legătură (3.8) să fie mereu

satisfăcute, **la o valoare constantă a variabilei t .**

Fie o deplasare virtuală infinitezimală δx_s a sistemului de puncte materiale; acesta va trece de la coordonatele x_s la coordonatele $x + \delta x_s$ astfel încât să fie satisfăcute, pe lângă relațiile (3.8) și relațiile:

$$f_k(x_s + \delta x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.15)$$

în care t nu a variat. Vom scădea ecuațiile (3.15) și (3.8), dezvoltăm după puterile cantităților δx_s și păstrăm numai acei termeni de ordinul întâi:

$$f_k(x_s + \delta x_s, t) - f_k(x_s, t) = \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \delta x_s \equiv 0 \quad (3.16)$$

relație ce reprezintă chiar **condițiile pentru ca deplasările δx_s să fie virtuale.**

Pentru orice deplasare virtuală infinitezimală ce satisface condițiile (3.16), lucrul mecanic al forțelor de sprijin este nul:

$$\sum_{s=1}^{3N} R_s \delta x_s = 0 \quad (3.17)$$

Această afirmație constituie enunțul **principiului lucrului mecanic virtual** sau **principiul lui d'Alembert** care stă la baza formalismului Lagrange. Pe baza lui se pot elimina reacțiile de sprijin R_s din ecuațiile de mișcare (3.13); este suficient să înmulțim cu δx_s ambii membri ai ecuației (3.13) și să sumăm pentru toate valorile indicelui s . Utilizând relația (3.17), vom obține:

$$\sum_{s=1}^{3N} x_s \ddot{x}_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s \quad (3.18)$$

din care au dispărut componentele R_s . Principiul lucrului mecanic virtual se mai poate scrie și sub forma:

$$\sum_{s=1}^{3N} (m_s \ddot{x}_s - F_s) \delta x_s = 0 \quad (3.19)$$

Observație: deplasarea virtuală δx_s nu are nimic comun cu deplasarea reală în cursul mișcării sistemului, în care evident timpul variază.

3.2.2 Forțele generalizate

Fie un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome și perfecte și fie $q_i(x_s, t)$ ($i = \overline{1, l}, s = \overline{1, 3N}$) coordonatele generalizate introduse prin relația (3.11). Se observă că o deplasare virtuală infinitezimală δx_s a sistemului se obține variind în mod arbitrar, la timp constant, variabilele q_i :

$$\delta x_s = \sum_{i=1}^l \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i \quad i = \overline{1, l} \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.20)$$

Întocându-ne la relația (3.17), observăm că membrul drept al ecuației reprezintă lucrul mecanic elementar al forțelor date, într-o deplasare virtuală:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{3N} F_s \sum_{i=1}^l \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i \\ \rightarrow \delta L &= \sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

unde s-a utilizat relația (3.20) pentru deplasarea virtuală. Notăția:

$$Q_i = \sum_{s=1}^{3N} F_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \quad (3.22)$$

reprezintă **forțele generalizate** corespunzătoare coordonatelor generalizate q_i ($i = \overline{1, l}$):

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t) \quad (3.23)$$

unde $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l\}$ reprezintă **vitezele generalizate**.

Observație: dacă forțele F_s derivă dintr-o energie potențială, atunci lucrul mecanic elementar este egal, până la semn, cu variația energiei potențiale:

$$\delta L = -\delta U \quad (3.24)$$

Dacă vom ține cont de expresia (3.21) a lucrului mecanic elementar exprimat prin forțele generalizate, atunci relația (3.24) devine:

$$\delta L = - \sum_{i=1}^l \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.25)$$

ceea ce conduce la exprimarea forțelor generalizate, în cazul forțelor conservative F_s , prin relația:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, l} \quad (3.26)$$

3.2.3 Ecuatiile Lagrange

Fie un sistem de N puncte materiale supuse la ν legături olonome și perfecte și care posedă **energia cinetică** E_{cin} exprimată prin:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3N} m_s \dot{x}_s^2 \quad (3.27)$$

Dacă vom înlocui în expresia principiului d'Alembert (3.19) expresia deplasărilor infinitezimale virtuale (3.20), și dacă ținem și de (3.27) vom ajunge la setul de ecuații diferențiale:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial q_i} = Q_i \quad i = \overline{1, l} \quad (3.28)$$

cea ce reprezintă **ecuațiile Lagrange** pentru determinarea mișcării sistemului. Ele sunt în număr egal cu numărul l al gradelor de libertate ale sistemului. Prin integrarea acestui sistem de ecuații se va obține dependența coordonatelor generalizate de timp, $q_i(t)$. Apoi, cu aceste coordonate odată determinate se pot deduce, pe baza relației (3.11) coordonatele $x_s(t)$. Ecuațiile (3.14) permit determinarea reacțiilor de spijin R_s .

Observație: dacă forțele date admit energia potențială U , ecuațiile lui Lagrange (3.28) se pot scrie sub formă mai compactă. Pentru aceasta vom introduce **funcția Lagrange** sau **lagrangeiana** sistemului, definită prin relația:

$$L \equiv E_{cin} - U \quad (3.29)$$

Astfel, ecuațiile Lagrange capătă forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = \overline{1, l} \quad (3.30)$$

În concluzie, formalismul Lagrange oferă o metodă de rezolvare a unor probleme de mecanică care constă în:

- se stabilește numărul gradelor de libertate și se aleg coordonatele generalizate

- se construiesc funcțiile E_{cin}, Q_i, L
- se exprimă cele $2l$ condiții inițiale pentru coordonatele generalizate $q_i(t_o)$ și vitezele generalizate $\dot{q}_i(t_o)$ ($i = \overline{1, l}$)
- se integrează ecuațiile Lagrange obținându-se soluția $q_i = q_i(t)$ ($i = \overline{1, l}$), se determină coordonatele $x_s(t)$ ($s = \overline{1, 3N}$) și apoi reacțiile de sprijin R_s ($s = \overline{1, 3N}$)

3.3 Formalismul Hamilton

3.3.1 Principiul lui Hamilton

Legile Mecanicii newtoniene, așa cum au fost formulate de Newton și care și-au găsit forma cea mai generală în lucrările lui Lagrange, au forma unor ecuații diferențiale. Prin lucrările lui Hamilton s-a ajuns la **formularea integrală a legilor Mecanicii**.

Principiul lui Hamilton este un principiu integral al legilor Mecanicii. Pentru a vedea în ce constă acesta, vom considera un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome și perfecte.

Fie

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_s, \dots, x_{3N} \quad (3.31)$$

coordonatele carteziene ale punctelor sistemului, și fie de asemenea

$$f_k(x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.32)$$

ecuațiile care rezultă din legăturile impuse sistemului.

Vom presupune în continuare că, în intervalul de timp $[t_1, t_2]$

este cunoscută **mişcarea reală** a sistemului, conformă cu legile Mecanicii. Această mișcare este caracterizată prin legile de mișcare:

$$x_s = x_s(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.33)$$

Este clar că această mișcare, caracterizată prin ecuațiile (3.33) respectă legăturile, deci funcțiile (3.33) substituite în relațiile (3.32), le verifică identic.

Vom considera și o **mişcare virtuală**, deci o mișcare despre care presupunem că satisface condițiile de legătură (3.32), dar nu satisface legile Mecanicii. Mișcarea virtuală este caracterizată prin relații de forma:

$$x'_s = x'_s(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad s = \overline{1, 3N} \quad (3.34)$$

De asemenea, vom presupune că la momentele de timp $t = t_1$ și respectiv $t = t_2$, pozițiile punctelor sistemului considerat, pentru mișcarea reală și pentru cea virtuală, coincid:

$$x_s(t_1) = x'_s(t_1) \quad (3.35)$$

$$x_s(t_2) = x'_s(t_2)$$

În fine, vom mai presupune că mișcările (reală și virtuală) sunt destul de apropiate una de cealaltă, prin urmare diferențele:

$$\delta x_s = x'_s(t) - x_s(t) \quad (3.36)$$

sunt suficient de mici, astfel încât puterile superioare puterii întâia să fie neglijate.

Se observă că, prin ipoteză, atât coordonatele x_s , cât și coordonatele x'_s satisfac în fiecare moment relațiile de legătură (3.32); rezultă atunci că mărimile δx_s reprezintă, la fiecare moment t , o deplasare virtuală. Dar, conform principiului lucrului mecanic virtual (3.17), dacă vom elimina reacțiile de sprijin R_s , vom obține o relație asemănătoare cu relația (3.19):

$$\sum_{s=1}^{3N} (m_s \ddot{x}_s - F_s) \delta x_s(t) = 0 \quad (3.37)$$

cu deosebirea că mărimile δx_s depind de timp.

Vom analiza în continuare cazul obișnuit al forțelor F_s ca forțe conservative:

$$F_s = -\nabla_s U \rightarrow \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s = -\delta U \quad (3.38)$$

Vom înlocui această ultimă relație în (3.37), apoi înmulțim cu dt și integrăm în raport cu timpul de la t_1 la t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{s=1}^{3n} m_s \ddot{x}_s \delta x_s \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt \quad (3.39)$$

care, prelucrată, și ținând cont și de ipoteza (3.35) conduce la ecuația:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_{cin} - \delta U) dt = 0 \quad (3.40)$$

unde:

$$\delta E_{cin} = \delta \sum_{s=1}^{3N} \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2 \quad (3.41)$$

reprezintă diferența dintre energia cinetică a sistemului E'_{cin} calculată pentru mișcarea virtuală (pe **traectoria virtuală**) și respectiv pentru mișcarea reală E_{cin} (pe **traectoria reală**):

$$\delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin} \quad (3.42)$$

Dacă vom integra relația (3.42) rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_{cin} dt = \int_{t_1}^{t_2} E'_{cin} - \int_{t_1}^{t_2} E_{cin} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} E_{cin} dt \quad (3.43)$$

Dacă vom repeta același raționament pentru energia potențială, relația (3.40) se poate scrie:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{cin} - U) dt = 0 \quad (3.44)$$

Această ecuație reprezintă expresia matematică a **principiului lui Hamilton** și are următoarea semnificație. Dacă se calculează integrala:

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_{cin} - U) dt$$

pentru mișcarea reală a sistemului și respectiv pentru mișcarea virtuală apropiată supusă condițiilor:

- satisface relațiile de legătură
- coincide cu pozițiile reale la momentele t_1 și t_2

atunci diferența (3.44) a celor două integrale este nulă.

Observație: această condiție este analoagă cu condiția de maxim

sau minim (extrem) pentru o funcție; dacă se calculează valoarea funcției pentru un sistem de valori date variabilelor de care depinde funcția și se constată că variația este întotdeauna nulă când ne deplasăm la un punct vecin, atunci sistemului dat de valori îi corespunde o valoare minimă sau maximă a funcției.

În cazul nostru funcția este înlocuită printr-o integrală, iar variabilele independente printr-o traiectorie. Vom nota prin:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (3.45)$$

acțiunea pentru o mișcare oarecare iar $L = E_{cin} - U = L(q, \dot{q}, t)$ este funcția Lagrange.

Deci, **principiul integral a lui Hamilton** (numit și **principiul minimei acțiuni**) se poate formula astfel: mișcarea reală (conformă cu legile Mecanicii), în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este aceea mișcare pentru care integrala S capătă o valoare extremă (minimă sau maximă) în comparație cu mișcările vecine, care satisfac ecuațiile legăturilor.

Principiul Hamilton conține, sub formă compactă, legile mișcării sistemului de particule. Se poate arăta că satisfacerea acestui principiu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (3.46)$$

este echivalentă cu cerința ca sistemul diferențial

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = \overline{1, l} \quad (3.47)$$

să fie satisfăcut, sistem ce reprezintă ecuațiile Lagrange (vezi Anexa A)

3.3.2 Ecuațiile canonice

În formularea lagrangeiană a legilor Mecanicii, starea mecanică a unui sistem la un moment dat t este dată de valorile numerice ale coordonatelor generalizate și vitezelor generalizate:

$$q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l \quad (3.48)$$

Evoluția în timp a stării mecanice se obține prin integrarea ecuațiilor Lagrange (3.30). În cazul cel mai simplu, în care variabilele q_i sunt chiar coordonatele carteziene ale punctelor materiale, iar \dot{q}_i sunt vitezele corespunzătoare, atunci funcția Lagrange are forma:

$$L = \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - U(q_i, t) \quad (3.49)$$

unde $U(q_i, t)$ este energia potențială a sistemului.

Un alt mod de a determina starea mecanică a unui sistem și evoluția acesteia în timp a fost introdus de Hamilton (1834). În formularea lui Hamilton, starea mecanică a unui sistem de puncte materiale se face cu ajutorul a $2l$ variabile: variabilele q_1, q_2, \dots, q_l rămân coordonatele generalizate ale lui Lagrange, iar noile variabile p_1, p_2, \dots, p_l , care înlocuiesc vitezele, sunt **impulsurile generalizate** și sunt definite prin relația:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = \overline{1, l} \quad (3.50)$$

În cazul cel mai simplu, în care lagrangeiana are expresia (3.49), impulsurile p_i au expresiile:

$$p_i = m_i \dot{q}_i \quad (3.51)$$

și se mai numesc **impulsurile conjugate variabilelor de poziție** q_i .

Pentru a determina legile de evoluție a sistemului, vom introduce funcția H de variabilele de stare, definită prin relația:

$$H \equiv \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(p_i, \dot{q}_i, t) \quad (3.52)$$

numită **funcția hamiltoniană** a sistemului sau, pe scurt, **hamiltoniana sistemului**. Dacă vom diferenția ambii membri ai relației (3.52), față de toate variabilele de stare, precum și de timp, obținem:

$$dH = \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^l p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.53)$$

Dacă vom ține cont și de definiția impulsului generalizat (3.51), atunci diferențiala hamiltonienei (3.53) se va scrie sub forma:

$$dH = \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.54)$$

care, comparată cu expresia diferențialei matematice a funcției $H(p_i, \dot{q}_i, t)$:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.55)$$

conduce la următoarele egalități:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial q_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.56}$$

Dacă vom ține cont de ecuațiile Lagrange precum și de definiția impulsului generalizat, primele două ecuații din relația (3.56) capătă forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, l}\end{aligned}\tag{3.57}$$

Aceste ecuații (3.57) reprezintă **ecuațiile lui Hamilton** sau **ecuațiile canonice ale Mecanicii** și care determină evoluția în timp a stării mecanice a sistemului. Ele sunt complet echivalente cu ecuațiile lui Lagrange, dar prezintă următoarele avantaje:

- sunt ecuații diferențiale de ordinul întâi spre deosebire de ecuațiile lui Lagrange care sunt de ordinul doi, dar numărul lor este dublu
- sunt rezolvate față de derivatele în raport cu timpul ale variabilelor canonice p_i, q_i

Conform formalismului lui Hamilton se poate descrie starea mecanică a unui sistem de puncte materiale prin $2l$ coordonate canonice. Dacă asociem acestor $2l$ variabile un spațiu matematic

$2l$ dimensional, vom obține așa numitul **spațiul fazelor** în care $q_i = q_i(t)$ și $p_i = p_i(t)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei din acest spațiu (Fig. 2).

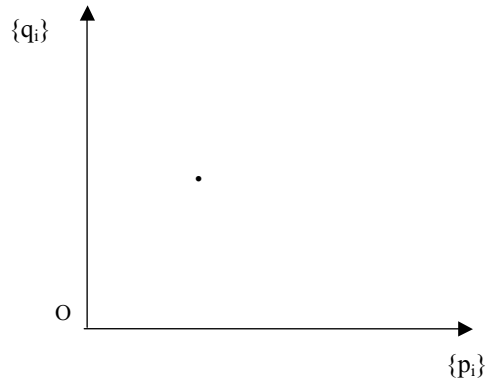


Fig.2

3.3.3 Semnificația funcției hamiltoniană

În cazul cel mai simplu, în care lagrangeiana are forma (3.49), vom avea, conform definiției:

$$H = \sum_{i=1}^l m_i \dot{q}_i^2 - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l m_i \dot{q}_i^2 + U(q_i, t) \quad (3.58)$$

deci, hamiltoniana este suma energiilor cinetică și potențială ale sistemului, adică **energia totală** a sistemului de puncte materiale supus la legături olonome și perfecte. Aceeași semnificație

se obține și în cazul **legăturilor scleronome** care sunt legături independente de timp.

Dacă însă legăturile impuse sistemului depind explicit de timp (**legături reonome**), atunci în expresia energiei cinetice apar și termeni de gradul întâi față de vitezele generalizate, iar hamiltoniana nu mai coincide cu energia totală a sistemului.

3.3.4 Parantezele lui Poisson

Forma canonică (3.57) a ecuațiilor de mișcare ne permite să determinăm legea de variație în timp a oricărei mărimi care depinde de starea mecanică a sistemului. Fie $f(p_i, q_i, t)$ o astfel de mărime. Variația totală a acestei mărimi atunci când timpul crește cu dt este:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \quad (3.59)$$

Dacă vom înlocui derivatele variabilelor canonice prin valorile lor date de ecuațiile canonice, se obține:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (3.60)$$

Suma care apare în membrul al doilea al acestei relații se numește **paranteza Poisson** a mărimilor H și f și se notează:

$$\{H, f\} = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (3.61)$$

În general se definește paranteza Poisson pentru două mărimi oarecare f și g :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (3.62)$$

sume care se întâlnesc frecvent în probleme de Mecanică tratate cu ajutorul ecuațiilor canonice.

Parantezele Poisson se bucură de următoarele proprietăți care rezultă din definiția lor generală (3.62):

- antisimetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- liniaritate față de fiecare partener: $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$
- parantezele Poisson ale variabilelor canonice au valorile:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (3.63)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (3.64)$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad (3.65)$$

unde δ_{ij} este **simbolul lui Krönneker**, $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$ și $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.

- între parantezele Poisson a trei mărimi f , g și h este respectată **identitatea Jacobi**:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \equiv 0 \quad (3.66)$$

Revenind asupra relației (3.60), legea de variație în timp a unei funcții f se poate scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (3.67)$$

Dacă vom alege energia totală a sistemului ca fiind mărimea mecanică $f \equiv H$ atunci variația în timp a hamiltonienei este:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.68)$$

Un caz special este acela pentru care hamiltoniana nu conține explicit timpul, adică $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Rezultă:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.69)$$

cea ce exprimă, în cazurile în care hamiltoniana este tocmai energia totală a sistemului, **legea de conservare a energiei**.

3.3.5 Transformările canonice

Alegerea convenabilă a variabilelor care descriu starea de mișcare a unui sistem, în problemele de mecanică, poate aduce simplificări considerabile. Fie un sistem de puncte materiale, cu l grade de libertate a cărui mișcare este caracterizată de ecuațiile canonice:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ & \quad i = \overline{1, l} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Să urmărim cum se transformă aceste ecuații dacă asupra variabilelor facem o schimbare de forma:

$$\begin{aligned} p'_i &= p'_i(p_i, q_i, t) \\ q'_i &= q'_i(p_i, q_i, t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

unde funcțiile admit derivate parțiale de ordinul doi, continue.

Condiția necesară și suficientă ca și variabilele p_i și q_i să poată fi exprimate în funcție de variabilele p'_i și q'_i este ca jacobianul variabilelor p'_i, q'_i față de variabilele p_i, q_i să fie diferit de zero:

$$J \equiv \frac{\partial(p'_1, p'_2, \dots, p'_l; q'_1, q'_2, \dots, q'_l)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_l; q_1, q_2, \dots, q_l)} \neq 0 \quad (3.72)$$

Observație: dacă diferentțiem relația (3.71), obținem:

$$\begin{aligned} dp'_i - \frac{\partial p'_i}{\partial t} dt &= \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} dq_j \\ & \qquad \qquad \qquad i = \overline{1, l} \quad j = \overline{1, l} \quad (3.73) \\ dq'_i - \frac{\partial q'_i}{\partial t} dt &= \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} dq_j \end{aligned}$$

din care se observă că jacobianul J este tocmai determinantul membrilor din partea dreaptă a relației (3.73).

Să considerăm în continuare ecuațiile canonice scrise în noile variabile:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_i &= \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \\ H' &= H'(p'_i, q'_i, t) \quad i = \overline{1, l} \quad (3.74) \\ \dot{p}'_i &= -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \end{aligned}$$

Pentru ca ecuațiile de mișcare scrise în variabilele p'_i, q'_i să aibe forma canonică (3.74) trebuie impuse anumite restricții transformării (3.71). Restricția care se impune se numește **condiția de**

canonicitate și este următoarea:

$$(p_i dq_i - H dt) - (p'_i dq'_i - H' dt) = dF(p_i, q_i, t) \quad i = \overline{1, l} \quad (3.75)$$

unde $F(p_i, q_i, t)$ se numește **funcție generatoare** a transformării (3.71). Dacă condiția (3.75) este satisfăcută, vom spune că transformarea (3.71) este o **transformare canonică**.

Să considerăm în continuare două mărimi mecanice oarecare f și g . Se poate demonstra că parantezele Poisson ale celor două mărimi scrise față de variabilele p_i, q_i și respectiv p'_i, q'_i sunt egale, cu condiția ca cele două sisteme de variabile să derive unul din celălalt printr-o transformare canonică:

$$\{f, g\}_{p, q} = \{f, g\}_{p', q'} \quad (3.76)$$

Această proprietate se numește **invarianța parantezelor lui Poisson la transformările canonice**.

3.3.6 Ecuația lui Hamilton-Jacobi

Scopul transformărilor canonice este trecerea de la sistemul de mișcare (3.70) la un sistem transformat (3.74) care să aibe o formă cât mai simplă. Dar forma cea mai simplă pe care o poate avea un sistem canonic corespunde cazului în care hamiltoniana H' este identic nulă. În acest caz, sistemul canonic (3.74) se reduce la:

$$\dot{q}'_i = 0 \quad (3.77)$$

$$\dot{p}'_i = 0$$

deci variabilele q'_i, p'_i sunt constante în timp. O astfel de transformare se poate obține dacă se utilizează o funcție S generatoare a

transformării, care satisface ecuațiile:

$$p_i = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial q_i} \quad (3.78)$$

$$q'_i = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial p'_i} \quad (3.79)$$

$$H' - H = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial t} \quad (3.80)$$

Anularea hamiltonianului H' implică, conform relației (3.80):

$$\frac{\partial S(p', q, t)}{\partial t} + H(p, q, t) = 0 \quad (3.81)$$

Dacă vom înlocui în hamiltoniana $H(p, q, t)$ variabilele p prin expresiile date de (3.78), se obține, pentru funcția generatoare S a transformării, ecuația:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 \quad (3.82)$$

cunoscută sub numele de **ecuația Hamilton-Jacobi**.

Ecuația Hamilton-Jacobi este o ecuație cu derivate parțiale pentru funcția S . Pentru determinarea mișcării sistemului este necesar să se determine o soluție a acestei ecuații. O astfel de soluție se numește **integrală completă** a ecuației (3.82). Această ecuație este echivalentă cu sistemul canonic și deci reprezintă o exprimare echivalentă a legilor mișcării pentru sistemul mecanic considerat.

Observație: Funcția generatoare S din ecuația Hamilton-Jacobi este chiar **acțiunea** din formalismul Lagrange și are dimensiunea de energie \times timp.

3.4 Probleme

3.1 Să se găsească ecuațiile diferențiale de mișcare pentru o particulă de masă m sub acțiunea unei forțe atractive invers proporțională cu pătratul distanței, de tipul $F = -\frac{k}{r^2}$, $k > 0$:

- a). cu ajutorul formalismului Lagrange;
- b). cu ajutorul formalismului Hamilton.

Rezolvare:

Considerăm drept coordonate generalizate coordonatele polare (r, θ) . Deci:

$$\begin{aligned}q_1 &= r \\q_2 &= \theta\end{aligned}$$

Legăturile dintre aceste coordonate și coordonatele carteziene x, y sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

Energia cinetică are expresia:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Energia potențială se determină conform relației de definiție:

$$U = - \int_{\infty}^r \left(-\frac{k}{r^2}\right) dr = -\frac{k}{r}$$

a. Lagrangeianul acestei mișcări se scrie sub forma:

$$L = E_{cin} - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{r}$$

iar ecuațiile Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

devin:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

După efectuarea derivatelor din aceste ecuații se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr^2\dot{\theta} - \frac{k}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr^2\dot{\theta} + \frac{k}{r^2} \\ 2mrr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Se observă că s-au obținut două ecuații diferențiale de ordinul doi. Din prima ecuație diferențială rezultă:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} = 0$$

iar a doua ecuație diferențială se poate scrie sub forma restrânsă:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) &= 0 \Rightarrow \\ J &= mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \end{aligned}$$

Mișcarea sub acțiunea unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței (**forță de tip central**) are loc în așa fel încât momentul unghiular J se conservă. Direcția rămâne constantă în timp, ca urmare mișcarea particulei are loc în permanență în același plan.

b. Să introducem impulsurile generalizate:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned}$$

Funcția lui Hamilton devine:

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Ecuatiile canonice ale mișcării sunt:

$$\begin{aligned} -\dot{p}_r &= \frac{\partial H}{\partial r} \Rightarrow \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{2mr^3} - \frac{k}{r^2} \\ -\dot{p}_\theta &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = 0 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned}$$

S-au obținut patru ecuații diferențiale de ordinul întâi (mai ușor de integrat decât cele din reprezentarea Lagrange!). Deoarece coordonata θ nu apare în mod explicit în expresia hamiltonianului ea este o **coordonată ciclică**. Impulsul generalizat asociat acestei variabile este o integrală a mișcării:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

3.2 Energia cinetică a unui corp de masă m în coordonate polare plane (r, θ) este:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Care sunt forțele generalizate corespunzătoare acestor coordonate?

Rezolvare:

Forțele generalizate se calculează cu ajutorul formulei:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial q_i}$$

Deoarece:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta$$

se obține:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m(r\dot{\theta}^2) \\ Q_2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \end{aligned}$$

3.3 Să se scrie ecuațiile de mișcare Lagrange pentru pendulul dublu din Fig. 3.3 ce execută oscilații în același plan. Se consideră $m_1 = m_2 = m$ și $l_1 = l_2 = l$

Rezolvare:

Sistemul are două grade de libertate. Considerăm drept coordonate generalizate $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$. Din Fig. 3.3 se observă că:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1 \\ y_1 &= l \cos \theta_1 \\ x_2 &= l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \\ y_2 &= l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Energia potențială a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele ce acționează asupra celor două corpuri luat cu

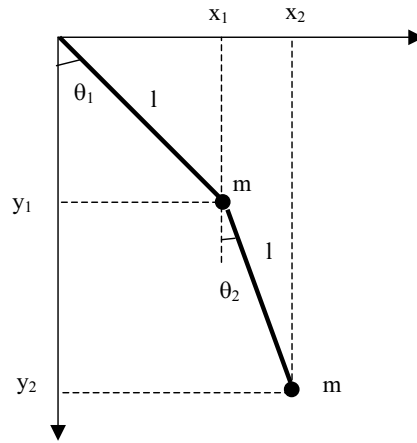


Fig. 3.3

semn schimbat. Pentru o deplasare infinitesimală:

$$\begin{aligned} dU &= -(\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2) \\ &= -mgdy_1 - mgdy_2 \end{aligned}$$

Considerând ca nivel de referință planul $y = 0$ căruia îi atribuim, prin convenție, valoarea zero energiei potențiale, se obține după integrare:

$$\begin{aligned} U &= -mgy_1 - mgy_2 \\ &= -mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Pentru a determina energia cinetică a sistemului avem nevoie de expresiile vitezelor:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\dot{\theta}_1 l \sin \theta_1 \\
\dot{x}_2 &= \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l \cos \theta_2 \\
\dot{y}_2 &= -\dot{\theta}_1 l \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 l \cos \theta_2
\end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\begin{aligned}
E_{cin} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\theta}_1^2 l^2 + \frac{1}{2}m \left[\dot{\theta}_1^2 l^2 + \dot{\theta}_2^2 l^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]
\end{aligned}$$

Funcția Lagrange devine:

$$\begin{aligned}
L &= E_{cin} - U = \frac{1}{2}m\dot{\theta}_1^2 l^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}m \left[\dot{\theta}_1^2 l^2 + \dot{\theta}_2^2 l^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \\
&\quad + mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)
\end{aligned}$$

Calculăm în continuare derivatele implicate în ecuațiile Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2m\dot{\theta}_1 l^2 + ml^2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= 2m\ddot{\theta}_1 l^2 - ml^2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + ml^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl \sin \theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m\dot{\theta}_2 l^2 + ml^2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m\ddot{\theta}_2 l^2 + ml^2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) -
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -ml^2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl \sin \theta_2$$

Ecuatiile Lagrange, după simplificarea prin ml sunt:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}_1 l - l\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ + l\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 l + l\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ + l\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

3.4 Se consideră un punct material de masă m în câmp gravitațional, constrâns să se miște, fără frecare, în interiorul unui con de unghi α .

- Câte grade de libertate are sistemul? Alegeți un sistem de coordonate generalizate.
- Determinați energia cinetică în sistemul de coordonate generalizate ales.
- Scrieți energia potențială în sistemul de coordonate generalizate ales.
- Scrieți ecuațiile Lagrange corespunzătoare.

Rezolvare:

a. Descrierea mișcării pe un con necesită alegerea sistemului de coordonate cilindric (r, φ, z) (Fig. 3.4). Dar, datorită constrângerii legate de mișcarea doar pe suprafața conului:

$$r = z \operatorname{tg} \alpha$$

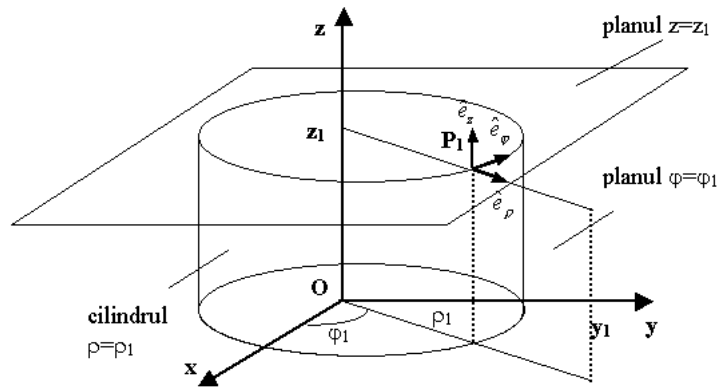


Fig. 3.4

numărul de coordonate independente necesare pentru studiul mișcării (adică numărul gradelor de libertate) este:

$$n = 3 - 1 = 2$$

Drept coordonate generalizate se pot alege grupurile : (r, φ) sau (z, φ) .

b. Poziția particulei este descrisă în orice moment de timp de gruparea $(r, \varphi, r/tg\varphi)$. Folosim relațiile de transformare de la un sistem cartezian (x, y, z) la acest sistem de coordonate.

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \\ y &= r \cos \varphi \\ z &= r \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Derivarea în raport cu timpul conduce la relațiile:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{z} &= \frac{\dot{r}}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Energia cinetică devine:

$$\begin{aligned}E_{cin} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right)\end{aligned}$$

c. Corpul se mișcă în câmp gravitațional care este un câmp conservativ, energia potențială corespunzătoare fiind:

$$U = mgz + U_0$$

Vom considera drept referință planul $z = 0$ căruia îi vom atribui prin convenție valoarea zero pentru energia potențială: $U_0 = 0$. Deci:

$$U = mg \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}$$

d. Lagrangeiana sistemului este:

$$\begin{aligned}L &= E_{cin} - U \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) - mg \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Ecuațiile Lagrange corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Calculăm mai întâi derivatele implicate în prima ecuație:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}(1 + ctg^2\alpha) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m\ddot{r}(1 + ctg^2\alpha) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mgctg\alpha\end{aligned}$$

Prima ecuație Lagrange, după simplificarea prin m devine:

$$\ddot{r}(1 + ctg^2\alpha) - r\dot{\varphi}^2 + gctg\alpha = 0$$

Repetăm procedura pentru cea de-a doua ecuație Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m\dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Deoarece variabila φ nu intră în expresia funcției Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = mr\dot{\varphi} = J_z = \text{const.}$$

Mișcarea are loc în așa fel încât se conservă cantitatea $mr\dot{\varphi}$ care reprezintă momentul unghiular pe direcția Oz . Această relație permite reducerea încă a unei variabile din ecuația generală a mișcării găsite din ecuația Lagrange pentru variabila r .

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr}$$

$$\ddot{r} (1 + ctg^2\alpha) - \frac{1}{r} \left(\frac{p_\varphi}{m} \right)^2 + gctg\alpha = 0$$

Ultima ecuație obținută este o ecuație diferențială în variabila r .

3.5 Un pendul matematic cu masa m_2 este suspendat de o bară rigidă și foarte ușoară de lungime l . La rândul ei, bara este prinsă de un corp de masă m_1 agățat de un resort cu constanta elastică k (vezi Fig. 3.5). Se presupune că mișcarea sistemului are loc doar în planul figurii.

- Să se construiască lagrangeiana sistemului $L = L(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})$;
- Să se scrie ecuațiile Lagrange.

Rezolvare:

a. Coordonatele generalizate ale sistemului sunt distanța măsurată pe verticală de la originea sistemului x și unghiul de deviere în plan vertical θ . Se poate scrie:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= y \\ x_2 &= l \sin \theta \\ y_2 &= y + l \cos \theta \end{aligned}$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \left(\dot{y} - l \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{y}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{\theta} \dot{y} \sin \theta \right] \end{aligned}$$

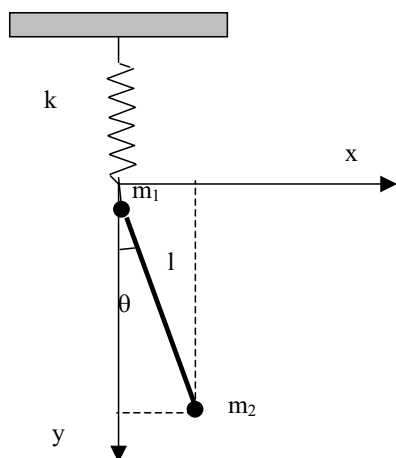


Fig. 3.5

Energia potențială se compune din contribuția dată de forța elastică ce apare în resortul deformat și din cea determinată de forțele gravitaționale:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{2}ky_1^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2 \\
 &= \frac{1}{2}ky^2 - m_1gy - m_2g(y + l \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Așadar funcția Lagrange este:

$$\begin{aligned}
 L = E_{cin} - U &= \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \right] + \\
 &\quad -\frac{1}{2}ky^2 + m_1gy + m_2g(y + l \cos \theta)
 \end{aligned}$$

b. Ecuatiile Lagrange sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Derivatele implicate în aceste ecuații sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} - m_2 l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{y} - m_2 l (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -ky + (m_1 + m_2)g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l (\dot{\theta} - \dot{y} \sin \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 l^2 \ddot{\theta} - m_2 l (\ddot{y} \sin \theta + \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 l \dot{\theta} \dot{y} \cos \theta - m_2 g l \sin \theta$$

După înlocuirea corespunzătoare se obțin următoarele ecuații:

$$(m_1 + m_2)(\ddot{y} - g) - m_2 l (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + ky = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{l} (g - \ddot{y}) \sin \theta = 0$$

3.6 Un corp de masă m încărcat cu sarcina electrică e se mișcă cu viteza \vec{v} într-un câmp electromagnetic, descris de potențialul vector $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ și de potențialul scalar $\varphi(\vec{r})$. Funcția Lagrange

a acestei mișcări este:

$$L = \frac{mv^2}{2} + e\vec{v} \cdot \vec{A} - \varphi(\vec{r})$$

Să se determine energia cinetică a particulei.

Rezolvare:

Energia cinetică a mișcării este:

$$E_{cin} = \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

unde:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{x} = v_x \\ \dot{q}_2 &= \dot{y} = v_y \\ \dot{q}_3 &= \dot{z} = v_z\end{aligned}$$

Expresia dezvoltată a funcției Lagrange se scrie sub forma:

$$L = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - \varphi(\vec{r})$$

Deoarece:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial v_x} &= mv_x + eA_x \\ \frac{\partial L}{\partial v_y} &= mv_y + eA_y \\ \frac{\partial L}{\partial v_z} &= mv_z + eA_z\end{aligned}$$

expresia energiei cinetice devine:

$$\begin{aligned}
 E_{cin} &= v_x \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial L}{\partial v_y} + v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} - L \\
 &= m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - \\
 &\quad - \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) + \varphi(\vec{r}) \\
 &= \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \varphi(\vec{r})
 \end{aligned}$$

3.7 Se știe că funcția Hamilton a unei particule este:

$$H = ap^2 + bx^2 + cx$$

unde x – coordonata particule, p – impulsul iar a, b, c – constante reale pozitive. Să se determine:

- a) ecuația diferențială de mișcare a particulei;
- b) paranteza Poisson dintre lagrangeiana și hamiltoniana sistemului $\{L, H\}$

Rezolvare:

a. Din ecuațiile lui Hamilton rezultă:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 2ap \\
 \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2bx - c
 \end{aligned}$$

Derivând din nou prima relație și folosind-o pe a doua se elimină impulsul.

Ecuatia diferențială a mișcării este:

$$\ddot{x} + 4abx + 2ac = 0$$

b. Funcția Lagrange este conform definiției:

$$L = p\dot{x} - H = p\dot{x} - ap^2 - bx^2 - cx$$

Vom folosi în continuare proprietățile parantezelor Poisson.

$$\begin{aligned} \{L, H\} &= \{p\dot{x} - H, H\} = \{p\dot{x}, H\} = \{2ap^2, H\} = 2a\{p^2, H\} \\ &= 2a\{p^2, ap^2 + bx^2 + cx\} \\ &= 2a [\{p^2, ap^2\} + \{p^2, bx^2\} + \{p^2, cx\}] \\ &= 2a [b\{p^2, x^2\} + c\{p^2, x\}] \end{aligned}$$

deoarece:

$$\{p^2, ap^2\} = a\{p^2, p^2\} = 0$$

Folosim următoarele rezultate:

$$\begin{aligned} \{p, x\} &= \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) = 1 \\ \{p^2, x\} &= p\{p, x\} + \{p, x\}p = 2p\{p, x\} = 2p \\ \{p^2, x^2\} &= 2p\{p, x^2\} = -2p\{x^2, p\} = -4px\{x, p\} \\ &= 4px\{p, x\} = 4px \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\{p, x^2\} = 8abpx + 4acp$$

3.8 Să se deducă legea de mișcare a unui oscilator liniar armonic de masă m și constantă elastică k , cu ajutorul formalismului

Hamilton-Jacobi.

Rezolvare:

Vom folosi ecuația Hamilton-Jacobi:

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Funcția Hamilton pentru un oscilator liniar armonic este:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

iar

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

Revenim în ecuația Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Încercăm să găsim soluția ecuației diferențiale separând contribuția care depinde doar de coordonată de cea care depinde doar de timp.

$$S = S_1(x) + S_2(t)$$

După verificarea soluției rezultă:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_1(x)}{dx} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} = -\frac{dS_2(t)}{dt}$$

Relația este adevărată doar dacă fiecare membru al ecuației este egal cu o constantă, pe care să o notăm β .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_1(x)}{dx} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} &= \beta \\ \frac{dS_2(t)}{dt} &= -\beta \end{aligned}$$

După rezolvarea primei ecuații rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1(x)}{dx} &= \sqrt{2m \left(\beta - \frac{kx^2}{2} \right)} \\ dS_1(x) &= \sqrt{2m \left(\beta - \frac{kx^2}{2} \right)} dx \\ S_1(x) &= \int \sqrt{2m \left(\beta - \frac{kx^2}{2} \right)} dx + S_{10}\end{aligned}$$

După rezolvarea celei de a doua ecuație rezultă:

$$\begin{aligned}dS_2(t) &= -\beta dt \\ S_2(t) &= -\beta t + S_{20}\end{aligned}$$

Ca urmare, acțiunea este, până la o constantă $S_{10} + S_{20}$ pe care o considerăm egală cu zero:

$$S = \int \sqrt{2m \left(\beta - \frac{kx^2}{2} \right)} dx - \beta t$$

Considerăm că β este o nouă coordonată a sistemului care joacă rol de impuls. Atunci se poate defini și o nouă coordonată de poziție corespunzătoare, prin relația:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \beta}$$

Deci:

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\int \sqrt{\left(\beta - \frac{kx^2}{2} \right)} dx - \beta t \right] \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\beta - \frac{kx^2}{2}}} - t\end{aligned}$$

Această relație se poate rearanja și apoi integra ținând cont de faptul că noua coordonată generalizată introdusă este o constantă. Să o notăm cu γ .

$$\frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\beta - \frac{kx^2}{2}}} = \gamma + t$$

După integrare se obține:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{k}{2\beta}} \right) &= \gamma + t \\ \sin \left(x \sqrt{\frac{k}{2\beta}} \right) &= \sqrt{\frac{k}{m}} (\gamma + t) \end{aligned}$$

sau:

$$x = \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (\gamma + t) \right]$$

Constantele β, γ se determină din condițiile inițiale.

Capitolul 4

Mecanica cuantică

4.1 Aparatul matematic al Mecanicii cuantice

4.1.1 Spații liniar complexe

Formalismul Mecanicii cuantice folosește teoria spațiilor Hilbert și a operatorilor liniari care acționează în aceste spații. Vom prezenta în continuare definițiile acestor concepte necesare pentru formularea principiilor Mecanicii cuantice.

Prin definiție, un **spațiu liniar (sau spațiu vectorial)** este o mulțime de elemente, denumite vectori, pentru care sunt definite două operații fundamentale - adunarea vectorilor și înmulțirea cu numere complexe, operații care conduc tot la elemente ale mulțimii și care satisfac anumite axiome (prezentate mai jos). Elementele spațiului sunt notate cu ajutorul parantezelor " $| >$ " care încadrează simboluri literare sau numerice, și au primit denumirea de **vectori "ket"**. Atât notația cât și denumirea se

datoresc lui Dirac.

Fie doi vectori $|\varphi_1\rangle$ și $|\varphi_2\rangle$ ai unui spațiu liniar. Prin operația de **adunare**, notată cu "+", cei doi vectori sunt puși în corespondență cu un al treilea vector $|\varphi_3\rangle$ al aceluiași spațiu, notat cu $|\varphi_3\rangle = |\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle$. Prin operația de **înmulțire cu un număr complex** α , fiecărui vector $|\varphi\rangle$ îi corespunde un alt vector al aceluiași spațiu, notat cu $\alpha|\varphi\rangle$. Operațiile de adunare a vectorilor și înmulțire cu un număr satisfac următoarele axiome:

1. Axiome referitoare la operația de adunare a vectorilor

- $|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle = |\varphi_2\rangle + |\varphi_1\rangle$ (**comutativitate**)
- $(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) + |\varphi_3\rangle = |\varphi_1\rangle + (|\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle)$ (**asociativitate**)
- există **vectorul nul**, notat $|0\rangle$, cu proprietatea $|\varphi\rangle + |0\rangle = |\varphi\rangle$
- pentru orice element $|\varphi\rangle$ există un element, notat $|\varphi_{op}\rangle$ și numit **opusul** său, astfel încât $|\varphi\rangle + |\varphi_{op}\rangle = |0\rangle$

2. Axiome referitoare la operația de înmulțire a vectorilor cu numere

- înmulțirea cu numărul 1 se face astfel: $1|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$
- înmulțirea cu un produs de numere este dată de: $(\alpha\beta)|\varphi\rangle = \alpha(\beta|\varphi\rangle)$

3. Axiome referitoare la combinarea celor două operații

- $(\alpha + \beta)|\varphi\rangle = \alpha|\varphi\rangle + \beta|\varphi\rangle$
- $\alpha(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = \alpha|\varphi_1\rangle + \alpha|\varphi_2\rangle$

Menționăm în continuare următoarele **consecințe** ale axiomelor, de care se va face uz în utilizarea elementelor spațiilor liniare:

- vectorul zero $|0\rangle$ este unic
- prin înmulțirea cu numărul 0 se obține vectorul nul: $0|\varphi\rangle = |0\rangle$
- vectorul opus fiecărui element $|\varphi\rangle$ este dat de relația: $|\varphi_{op}\rangle = (-1)|\varphi\rangle = -|\varphi\rangle$
- prin înmulțirea vectorului nul $|0\rangle$ cu orice număr, se obține întotdeauna vectorul nul: $\alpha|0\rangle = |0\rangle$

Prin definiție, două spații vectoriale sunt **izomorfe** dacă între ele se poate stabili o corespondență biunivocă, în așa fel încât, dacă $|\varphi_1\rangle, |\chi_1\rangle$, doi vectori ce aparțin spațiului vectorial V_1 sunt în corespondență cu vectorii $|\varphi_2\rangle$ și $|\chi_2\rangle$ ce aparțin spațiului V_2 , atunci în corespondență biunivocă sunt și elementele $\alpha|\varphi_1\rangle$ cu $\alpha|\varphi_2\rangle$ și $|\varphi_1\rangle + |\chi_1\rangle$ cu $|\varphi_2\rangle + |\chi_2\rangle$.

De asemenea, se spune că o mulțime (finită sau infinită) de vectori **subîntinde un spațiu** S al unui spațiu vectorial, dacă orice vector din S este o combinație liniară de vectori din această

mulțime. Noțiunea cea mai importantă într-un spațiu liniar este cea de **dependentă liniară**. Un set de k vectori este **liniar-independent** dacă egalitatea:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i |\varphi_i\rangle = |0\rangle \quad (4.1)$$

implică $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k}$. Dacă în egalitatea (4.1.1) nu toate numerele α_i sunt nule, atunci vectorii $|\varphi_i\rangle$ sunt **liniari-dependenți**. Conform acestei definiții, orice mulțime de vectori care conține vectorul nul $|0\rangle$ formează un sistem de vectori liniar-dependenți.

Dacă într-un spațiu vectorial nu se pot găsi mai mult de n vectori liniari-independenti, spațiul este prin definiție **n-dimensional**. Tot prin definiție, orice set de n vectori liniari-independenti într-un spațiu n -dimensional formează o **bază** a spațiului. Se demonstrează că orice vector $|\psi\rangle$ al spațiului se poate exprima (în mod unic) ca o combinație liniară de vectorii $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ ai unei baze date a spațiului:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |e_k\rangle \quad (4.2)$$

Un exemplu simplu îl constituie spațiul notat cu C^n , **prototipul tuturor spațiilor finit-dimensionale**, ale cărui elemente sunt totalitatea seturilor de n numere complexe (n fixat). Este comod să se plaseze cele n numere într-o coloană, de exemplu:

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Prin definiție, vectorii de tipul considerat se adună după regula:

$$|x \rangle + |y \rangle \equiv \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

și se înmulțesc cu un număr complex α după regula:

$$\alpha|x \rangle = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Cea mai simplă bază în acest spațiu o formează vectorii:

$$|e_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |e_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots |e_n \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

În formula de descompunere (4.2) a unui vector oarecare după vectorii bazei (4.6), coeficienții sunt chiar numerele x_k ($k = \overline{1, n}$). Spațiul C^n este important deoarece toate spațiile complexe n -dimensionale sunt izomorfe cu spațiul C^n .

4.1.2 Spații unitare și spații Hilbert

Un spațiu unitar (sau **euclidian**) este un spațiu vectorial în care este definit **produsul scalar**. Notăm deocamdată produsul scalar al vectorilor $|\varphi_1 \rangle$ și $|\varphi_2 \rangle$ prin $(|\varphi_1 \rangle, |\varphi_2 \rangle)$. Prin definiție,

produsul scalar **este numărul complex** asociat unei perechi ordonate de vectori și care satisface axiomele:

- $(|\varphi\rangle, |\varphi\rangle) > 0$ pentru orice $|\varphi\rangle \neq |0\rangle$, $(|\varphi\rangle, |\varphi\rangle) = 0 \leftrightarrow |\varphi\rangle = |0\rangle$
- $(|\varphi\rangle, |\chi\rangle) = (|\chi\rangle, |\varphi\rangle)^*$ (* reprezintă complex conjugatul unei mărimi)
- $(|\varphi_3\rangle, \alpha_1|\varphi_1\rangle + \alpha_2|\varphi_2\rangle) = \alpha_1(|\varphi_3\rangle, |\varphi_1\rangle) + \alpha_2(|\varphi_3\rangle, |\varphi_2\rangle)$

A treia proprietate exprimă liniaritatea produsului scalar în al doilea factor. Dacă se combină proprietățile a treia cu a doua, rezultă antiliniaritatea produsului scalar în primul factor:

- $(\alpha_1|\varphi_1\rangle + \alpha_2|\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle) = \alpha_1^*(|\varphi_1\rangle, |\varphi_3\rangle) + \alpha_2^*(|\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle)$

Definim **norma** (sau **lungimea unui vector**) numărul real:

$$\|\varphi\| = \sqrt{(|\varphi\rangle, |\varphi\rangle)} \quad (4.7)$$

deci, spațiul euclidian este un spațiu normat. Doi vectori ai unui spațiu unitar sunt **ortogonali** dacă:

$$(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle) = 0 \quad (4.8)$$

iar o mulțime de vectori constituie un **sistem ortogonal de vectori** dacă oricare doi vectori din mulțime sunt reciproc ortogonali. Un sistem ortogonal de vectori este un **sistem ortonormat** dacă fiecare vector din sistem este normat, iar norma este finită.

O proprietate fundamentală a produsului scalar o constituie **inegalitatea Schwarz-Cauchy**:

$$|(\varphi >, |\chi >)| \leq \|\varphi\| \|\chi\| \quad (4.9)$$

semnul egal realizându-se dacă și numai dacă vectorii $|\varphi >$ și $|\chi >$ sunt liniar-dependenți.

În spațiul unitar se poate introduce și o **metrică**, definind **distanța** dintre doi vectori $|\chi >$ și $|\psi >$ prin:

$$d \equiv \|\chi - \psi\| = \sqrt{(|\chi > - |\psi >, |\chi > - |\psi >)} \quad (4.10)$$

deci **orice spațiu unitar este și un spațiu metric**.

Spațiul C^n (definit în paragraful anterior) devine un spațiu unitar, numit **spațiul euclidian n -dimensional**, prin introducerea produsului scalar:

$$(|x >, |y > \equiv \sum_{k=1}^n x_k^* y_k \quad (4.11)$$

Un spațiu important pentru mecanica cuantică este spațiul euclidian format din totalitatea seturilor numărabile de o infinitate de numere complexe de forma:

$$|x > = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

pentru care :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \quad (4.13)$$

Suma a doi vectori și produsul unui vector cu un număr complex se definesc la fel ca în spațiul C^n , iar produsul scalar este definit prin:

$$(|x \rangle, |y \rangle) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k \quad (4.14)$$

Vectorii $|e_1 \rangle, |e_2 \rangle, \dots$ care au numai unul din numerele din set egal cu 1 și celelalte sunt egale cu zero, formează o bază a spațiului.

De asemenea, un interes deosebit îl prezintă spațiul liniar infinit-dimensional format din toate funcțiile complexe continue $f(x)$ definite pe axa reală, pentru care:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (4.15)$$

În acest spațiu, produsul scalar este definit prin:

$$(f, g) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx \quad (4.16)$$

În descrierea dată de Mecanica cuantică unei particule fără spin se folosește **spațiul funcțiilor de undă**, un spațiu unitar infinit-dimensional. Elementele sale sunt funcții continue de trei variabile

spațiale și una temporală $\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi(x, y, z, t)$, funcții diferențiable și integrabile în modul pătrat:

$$\int \int \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV < \infty \quad (4.17)$$

iar produsul scalar a două funcții este definit prin:

$$(\psi, \phi) \equiv \int \int \int \psi^* \phi dV \quad (4.18)$$

Un spațiu unitar (euclidian) infinit-dimensional este, prin definiție, un **spațiu Hilbert** dacă el este și un spațiu **complet**, adică dacă orice șir Cauchy al său tinde către un element limită aparținând spațiului.

Spațiul funcțiilor de undă, de interes pentru Mecanica cuantică, nu este un spațiu complet, dar poate fi pus într-o legătură strânsă cu un spațiu Hilbert (prin înlocuirea integralei Riemann cu integrala Lebesgue), astfel încât, în continuare vom utiliza denimirea de **spațiul Hilbert al funcțiilor de undă**.

Într-un spațiu Hilbert un sistem ortonormat de vectori este un **sistem complet de vectori** dacă singurul vector ortogonal pe toți vectorii setului este vectorul nul. Un astfel de sistem ortonormat și complet de vectori $|e_1 \rangle, |e_2 \rangle, |e_3 \rangle, \dots, |e_n \rangle, \dots$ (definiți prin relația 4.6) este denumit și **bază ortonormată a spațiului Hilbert**. Dată fiind o bază ortonormată $\{|e_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$, putem dezvolta orice vector al spațiului Hilbert după vectorii bazei (vezi relația 4.2):

$$|\psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n \rangle \quad (4.19)$$

unde coeficienții c_n sunt definiți prin produsul scalar:

$$c_n = (|e_n \rangle, |\psi \rangle) \quad (4.20)$$

Norma vectorului $|\psi \rangle$ (4.7) se poate scrie atunci:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4.21)$$

4.1.3 Operatori liniari. Operații cu operatori liniari

Prin definiție, un operator într-un spațiu liniar pune în corespondență fiecărui vector al spațiului un alt vector al acestuia; îl vom nota \hat{A} :

$$|\psi \rangle = \hat{A}|\varphi \rangle \quad \text{sau} \quad |\psi \rangle = |\hat{A}\varphi \rangle \quad (4.22)$$

Vom presupune în continuare că operatorii cu care lucrăm sunt definiți în întreg spațiul liniar.

Prin definiție, un operator este **liniar** dacă:

$$\hat{A}(c_1|\varphi_1 \rangle + c_2|\varphi_2 \rangle) = c_1\hat{A}|\varphi_1 \rangle + c_2\hat{A}|\varphi_2 \rangle \quad (4.23)$$

pentru orice vectori $|\varphi_1 \rangle$, și $|\varphi_2 \rangle$ și orice numere complexe c_1 și c_2 . În Mecanica cuantică se întâlnesc și probleme care cer utilizarea operatorilor **antiliniari**. Aceștia se definesc prin relația:

$$\hat{B}(c_1|\varphi_1 \rangle + c_2|\varphi_2 \rangle) = c_1^*\hat{B}|\varphi_1 \rangle + c_2^*\hat{B}|\varphi_2 \rangle \quad (4.24)$$

Orice operator liniar transformă vectorul nul $|0\rangle$ în el însuși:

$$\hat{A}|0\rangle = |0\rangle \quad (4.25)$$

De asemenea, în fiecare spațiu liniar sunt definiți următorii operatori liniari particulari:

- **operatorul unitate** \hat{I} cu acțiunea $\hat{I}|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$, pentru orice vector $|\varphi\rangle$

- **operatorul zero** $\hat{0}$ cu acțiunea $\hat{0}|\varphi\rangle = |0\rangle$, pentru orice vector $|\varphi\rangle$

Cu operatorii liniari se pot efectua trei operații, al căror rezultat este tot un operator liniar, și anume:

- **suma** a doi operatori \hat{A} și \hat{B} , notată $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ și definită prin modul de acțiune:

$$\hat{C}|\varphi\rangle = \hat{A}|\varphi\rangle + \hat{B}|\varphi\rangle \quad (4.26)$$

- **înmulțirea unui operator cu un număr complex** λ , notată $\hat{C} = \lambda\hat{A}$ și definită prin modul de acțiune:

$$\hat{C}|\varphi\rangle = \lambda(\hat{A}|\varphi\rangle) \quad (4.27)$$

- **înmulțirea a doi operatori** \hat{A} și \hat{B} , notată $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ și definită prin:

$$\hat{C}|\varphi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\varphi\rangle) \quad (4.28)$$

Ordinea factorilor într-un produs de operatori este importantă deoarece, în general, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$. Se introduce operatorul **comutator** a doi operatori liniari:

$$\hat{C} \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \equiv [\hat{A}, \hat{B}] \quad (4.29)$$

notat cu ajutorul unor paranteze drepte și care joacă un rol important în Mecanica cuantică.

Dacă pentru un operator liniar \hat{A} există un alt operator \hat{B} cu proprietatea:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I} \quad (4.30)$$

atunci se spune că operatorul \hat{A} este **nesingular**, iar operatorul \hat{B} se numește **inversul** operatorului \hat{A} . Conform acestei relații de definiție, inversul inversului unui operator este chiar operatorul însuși:

$$(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A} \quad (4.31)$$

Dacă operatorul \hat{B} cerut de relația (4.30) nu există, se zice că operatorul \hat{A} este **singular**. O caracteristică a unui operator singular este aceea că există unul sau mai mulți vectori ai spațiului, diferiți de vectorul $|0\rangle$, pe care acțiunea operatorului îi transformă în vectorul $|0\rangle$:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = |0\rangle, \quad |\varphi\rangle \neq |0\rangle \leftrightarrow \hat{A} \text{ operator singular} \quad (4.32)$$

Fie un operator liniar \hat{A} ce acționează într-un spațiu unitar și fie **produsul scalar** $(|\varphi\rangle, \hat{A}|\psi\rangle)$ care, în **notația Dirac** se scrie:

$$(|\varphi\rangle, \hat{A}|\psi\rangle) = \langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \varphi | (\hat{A} | \psi \rangle) \quad (4.33)$$

unde vectorul " $\langle \varphi |$ " se numește vector "**bra**". Pe baza teoremei lui Riesz se poate scrie egalitatea:

$$(|\varphi \rangle, \hat{A}|\psi \rangle) = (|\chi \rangle, |\psi \rangle) \quad (4.34)$$

Se observă că prin această egalitate se stabilește o corespondență între doi vectori "ket" pe care o vom nota:

$$|\chi \rangle = \hat{A}^+|\varphi \rangle \quad (4.35)$$

unde operatorul \hat{A}^+ se numește **adjunctul** (conjugatul) operatorului \hat{A} . Operatorul adjunct \hat{A}^+ are următoarele proprietăți:

- $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$
- $(\hat{A} + \hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$
- $(\lambda\hat{A})^+ = \lambda^*\hat{A}^+$
- $(AB)^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$

Operatorii care se bucură de proprietatea

$$\hat{A} = \hat{A}^+ \quad (4.36)$$

se numesc **operatori autoadjuncți** sau **hermitici**.

Fie doi vectori "ket" fixați, $|u \rangle$ și $|v \rangle$ într-un spațiu Hilbert și fie un operator liniar \hat{A} definit prin modul de acțiune asupra unui "ket" $|\varphi \rangle$, prin intermediul vectorilor "ket" fixați:

$$\hat{A}|\varphi \rangle \equiv \langle v|\varphi \rangle |u \rangle \quad (4.37)$$

Se observă că acțiunea operatorului \hat{A} dă un vector proporțional cu $|u \rangle$, coeficientul de proporționalitate fiind $\langle v|\varphi \rangle$.

Vom considera în continuare acțiunea operatorului \hat{A} asupra unui vector "bra" $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi | \hat{A} = \langle \psi | u \rangle \langle v | \quad (4.38)$$

adică, acțiunea operatorului \hat{A} transformă vectorul "bra" $\langle \psi |$ într-un vector proporțional cu $\langle v |$, coeficientul de proporționalitate fiind numărul $\langle \psi | u \rangle$. Având în vedere această ultimă relație precum și notația pentru produsul scalar (4.33), apare adecvată notarea operatorului \hat{A} prin:

$$\hat{A} = |u\rangle \langle v| \quad (4.39)$$

Se definește, în particular, operatorul:

$$\hat{P}_u = |u\rangle \langle u| \quad \text{cu} \quad \langle u | u \rangle = 1 \quad (4.40)$$

și se numește **proiectorul** pe subspațiul unidimensional subîntins de vectorul $|u\rangle$ sau de vectorul $\langle u|$. Acest operator se bucură de proprietatea de **idempotență**, caracteristică oricărui operator de proiecție:

$$\hat{P}_u^2 = \hat{P}_u \quad (4.41)$$

4.1.4 Operatori unitari

Prin definiție un operator \hat{U} este **unitar** dacă:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I} \quad (4.42)$$

Conform definiției, operatorii unitari sunt operatori nesingulari (vezi paragraful precedent) iar inversul lor coincide cu adjungutul lor:

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger \quad (4.43)$$

Proprietatea fundamentală a operatorilor unitari este aceea de **conservare a produsului scalar**:

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \langle \hat{U} \varphi_1 | U \varphi_2 \rangle \quad (4.44)$$

De asemenea sunt adevărate următoarele proprietăți:

- produsul dintre un număr complex λ și un operator unitar este un operator unitar numai dacă $|\lambda| = 1$
- produsul a doi operatori unitari este întotdeauna un operator unitar

4.1.5 Problema cu valori proprii asociată unui operator hermitic

Fie un operator liniar \hat{A} , definit într-un spațiu Hilbert. Prin definiție, numărul a (în general complex) este **valoarea proprie** a operatorului \hat{A} dacă există un vector al spațiului Hilbert $|u \rangle \neq |0 \rangle$ care satisface ecuația:

$$\hat{A}|u \rangle = a|u \rangle, \quad |u \rangle \in \text{spațiului Hilbert} \quad (4.45)$$

Vectorul $|u \rangle$ se numește **vector propriu** (sau caracteristic) al operatorului \hat{A} . În aplicațiile concrete, pentru a defini mulțimea vectorilor proprii ai unui operator, ecuația (4.45) este suplimentată cu unele condiții restrictive asupra vectorilor, numite **condiții de regularitate** și care sunt precizate pentru fiecare caz concret. Ecuația (4.45) definește orice vector propriu până la un factor multiplicativ arbitrar.

Mulțimea valorilor proprii este numită **spectrul valorilor proprii ale operatorului**. Dacă unei aceleiași valori proprii a îi

corespund mai mulți vectori proprii liniar-independenți, valoarea proprie este **degenerată**, iar numărul vectorilor proprii liniar-independenți reprezintă **ordinul degenerării** valorii proprii. Dacă unei valori proprii îi corespunde un singur vector propriu, atunci valoarea proprie este **nedegenerată**.

Mulțimea vectorilor proprii "ket" care satisface ecuația cu valori proprii (4.45) pentru o aceeași valoare proprie a formează un subspațiu, numit **subspațiul asociat valorii proprii** a a cărui dimensiune coincide cu ordinul degenerării valorii proprii a .

În Mecanica cuantică vom întâlni problema cu valori proprii numai pentru operatori hermitici ($\hat{A} = \hat{A}^+$). În acest caz, ecuația (4.45) are următoarele două proprietăți importante:

- valorile proprii ale operatorilor hermitici sunt numere reale și sunt date de relația:

$$a = \frac{\langle u|A|u \rangle}{\langle u|u \rangle} \quad (4.46)$$

- vectorii proprii corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali

Dacă spectrul valorilor proprii ale operatorului \hat{A} constă din valori proprii pentru care există vecinătăți în care nu se găsesc alte valori proprii, atunci spectrul valorilor proprii ale operatorului \hat{A} este un **spectru discret**. Spectrul valorilor proprii ale operatorului \hat{A} ce satisface ecuația cu valori proprii (4.45) poate fi și un **spectru mixt**, adică un spectru format din porțiuni de spectru discret și din porțiuni de **spectru continuu** (porțiuni pentru care în vecinătatea oricât de mică a unei valori proprii se găsesc

întotdeauna o infinitate de alte valori proprii).

Admitem fără demonstrație, următoarele rezultate extrem de importante pentru Mecanica cuantică, referitoare la problema cu valori proprii în sens generalizat, pentru un operator hermitic:

- valorile proprii sunt reale și formează în general un spectru mixt
- vectorii proprii corespunzători la valori proprii din porțiunea discretă au norma finită și deci aparțin spațiului Hilbert
- vectorii proprii corespunzători la valori proprii din porțiunea continuă a spectrului nu au norma finită, deci nu aparțin spațiului Hilbert

În conformitate cu cele trei afirmații anterioare vom adopta următoarele notații pentru valorile proprii:

- a_n , $n = 1, 2, \dots$ în spectrul discret
- $a(\alpha)$ ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$) în spectrul continuu

Vectorii proprii se caracterizează de obicei prin mai mulți indici, pentru că valorile proprii sunt degenerate. Vom nota prin $|nr\rangle$ sau cu $|u_{nr}\rangle$, $r = 1, 2, \dots, g_n$, vectorii proprii corespunzători valorii proprii a_n , degenerată de ordin g_n . Cel de-al doilea indice r apare ori de câte ori valoarea proprie este degenerată. Vom nota cu $|\alpha s\rangle$ ($s = 1, 2, \dots$) vectorii proprii corespunzători valorii proprii $a(\alpha)$. Indicele s este folosit pentru a descrie degenerarea care în spectrul continuu este în general de ordin infinit.

Deși vectorii proprii ai spectrului continuu nu pot fi normați, ei pot satisface o condiție e ortonormare în sens generalizat. Ad-

mitem următoarele proprietăți de ortonormare ale vectorilor proprii ai unui operator hermitic:

- în spectrul discret

$$\langle nr | n' r' \rangle = \delta_{nn'} \delta_{rr'} \quad (4.47)$$

ceea ce înseamnă că, pe de-o parte vectorii proprii corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali și că vectorii proprii au norma finită (care poate fi făcută 1), iar pe de altă parte vectorii proprii corespunzători la aceeași valoare proprie pot fi întotdeauna aleși ortogonali între ei

- orice vector propriu corespunzător unei valori proprii din spectrul discret este ortogonal pe un vector propriu corespunzător unei valori proprii din spectrul continuu:

$$\langle nr | \alpha s \rangle = 0 \quad (4.48)$$

- în spectrul continuu, prin alegerea convenabilă a unui factor multiplicativ în expresia fiecărui vector propriu, se poate asigura valabilitatea relației:

$$\langle \alpha s | \alpha' s' \rangle = \delta_{ss'} \delta(\alpha - \alpha') \quad (4.49)$$

unde $\delta(\alpha - \alpha')$ este funcția lui Dirac (vezi Anexa B). Proprietatea (4.49) se numește proprietatea de **ortonormare în scara parametrului** s , în sens generalizat.

4.1.6 Observabile

Vom considera în continuare operatorii hermitici care admit un sistem complet de vectori proprii. Acești operatori vor fi denumiți

și **observabile**.

Observație: mărimile care pot fi măsurate pentru o particulă cuantică (sau sistem cuantic) sunt denumite **mărimi fizice** sau **mărimi observabile** (impulsul, poziția, momentul cinetic, energia, momentul magnetic...). Ele sunt de obicei mărimi cu care operăm și clasic și pe care le măsurăm folosind aparate macroscopice, deci le determinăm în urma interacției dintre un sistem cuantic și un sistem care ascultă de legile clasice. **Starea** unui sistem cuantic se manifestă în **rezultatele** pe care le obținem la măsurarea observabilelor sale.

Răspunsul obținut la măsurarea unei observabile nu este univoc determinat de condițiile de experiență - sistemul cuantic ascultă de legi statistice. **Statisticele observabilelor** unui sistem cuantic sunt singurele proprietăți ale sale pe care le putem determina experimental. **Deci, starea unui sistem cuantic se identifică cu totalitatea statisticilor observabilelor sistemului.**

Coincidența denumirilor pentru mărimile fizice și pentru operatorii hermitici amintiți mai sus, nu este întâmplătoare (vezi principiul II al Mecanicii cuantice).

Faptul că un operator hermitic \hat{A} admite un sistem complet de vectori proprii permite dezvoltarea oricărui vector $|\psi\rangle$ al spațiului Hilbert în forma generalizată (spectrul mixt):

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{g_n} c_{nr} |n, r\rangle + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} c_{\alpha s} |\alpha, s\rangle d\alpha \quad (4.50)$$

unde coeficienții dezvoltării sunt dați de relațiile:

$$c_{nr} = \langle nr | \psi \rangle \quad c_{\alpha s} = \langle \alpha s | \psi \rangle \quad (4.51)$$

după cum rezultă din proprietățile de ortonormare. Dacă vom înlocui relația (4.51) în relația (4.50) vom ajunge la o relație importantă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{g_n} |nr\rangle \langle nr| + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} |\alpha s\rangle \langle \alpha s| = \hat{I} \quad (4.52)$$

ceea ce exprimă **relația de completitudine** a sistemului de vectori proprii ai operatorului \hat{A} . Pătratul normei vectorului $|\psi\rangle$ este dat de relația Bessel:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}|^2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{\alpha s}|^2 d\alpha \quad (4.53)$$

Fie două observabile \hat{A} și \hat{B} și fie \hat{C} comutatorul acestora definit conform relației (4.29). Dacă $\hat{C} = 0$, atunci observabilele se numesc **compatibile**, iar dacă $\hat{C} \neq 0$ observabilele se numesc **incompatibile**. Pentru aplicațiile Mecanicii cuantice este deosebit de importantă următoarea teoremă: **condiția necesară și suficientă ca două observabile \hat{A} și \hat{B} să comute este ca ele să admită un sistem complet comun de vectori proprii.**

Conform acestei teoreme, în cazul particular în care o valoare proprie a operatorului \hat{A} este nedegenerată

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \quad (4.54)$$

vectorul propriu unic care-i corespunde trebuie să fie vector propriu și pentru operatorul \hat{B} . Într-adevăr, dacă aplicăm operatorul \hat{B} ecuației precedente, vom obține, pe baza comutării:

$$\hat{B}(\hat{A}|a\rangle) = \hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = a\hat{B}|a\rangle \quad (4.55)$$

deci, pentru că a este valoare proprie nedegenerată, rezultă:

$$\hat{B}|a\rangle = \lambda|a\rangle \quad (4.56)$$

Dacă valorile proprii a și b sunt degenerate, vectorii proprii ai celor doi operatori nu sunt univoc determinați și deci nici sistemul complet de vectori din teoremă nu este univoc determinat. Considerând însă mai multe observabile compatibile două câte două $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$, se poate ajunge în situația în care vectorii proprii comuni să fie univoc determinați (până la factori multiplicativi).

Prin definiție, observabilele $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$ formează un **sistem complet de observabile** dacă:

- oricare doi dintre operatori comută (observabile compatibile)
- la oricare combinație de valori proprii fixate a, b, c, \dots ale operatorilor corespunde un vector propriu comun unic $|abc\rangle$.

4.1.7 Reprezentarea matricială a vectorilor și operatorilor

Fie un spațiu unitar și fie

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots \quad (4.57)$$

un sistem complet ortonormat de vectori din acest spațiu. Pentru simplificare vom considera că mulțimea de vectori (4.57) este numărabilă, iar condiția de ortonormare se va scrie:

$$\langle e_i | e_k \rangle = \delta_{ik} \quad (4.58)$$

Relațiile pe care le vom stabili se pot generaliza ușor la cazul în care mulțimea (4.57) nu este numărabilă. Completitudinea

sistemului (4.57) se manifestă prin relația (4.52) aplicată în acest caz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n| = \hat{I} \quad (4.59)$$

Orice vector al spațiului unitar poate fi descompus, după vectorii bazei, în forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle \quad c_n = \langle e_n | \psi \rangle \quad (4.60)$$

Cunoașterea vectorului $|\psi\rangle$ este echivalentă cu cunoașterea tuturor numerelor c_n :

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (4.61)$$

Se spune că numerele c_n caracterizează **vectorul $|\psi\rangle$ în reprezentarea sistemului complet de vectori $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$** . Numerele c_n se plasează într-o coloană care are forma, în cazul infinit-dimensional:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Relația (4.62) scrisă cu ajutorul vectorului ”bra” $\langle\psi|$ este:

$$\langle\psi| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \langle e_n| \quad (4.63)$$

deci, vectorul $\langle \psi |$ este caracterizat în reprezentarea $\{|e_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ prin coeficienții c_n^* , care pot fi convenabil plasați într-o matrice-linie (infinită în general):

$$\langle \psi | = (c_1^* \ c_2^* \ c_3^* \dots) \quad (4.64)$$

Produsul scalar a doi vectori $|\psi \rangle$ și $|\varphi \rangle$

$$|\psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n \rangle \quad |\varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} d_n |e_n \rangle \quad (4.65)$$

are expresia cunoscută:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = (c_1^* \ c_2^* \ \dots) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Fie un operator liniar oarecare \hat{A} . Acțiunea sa asupra oricărui vector este determinată de acțiunea asupra vectorilor unui sistem complet de vectori. Dacă vom considera acest sistem ca fiind sistemul ortonormat (4.52), atunci acțiunea operatorului \hat{A} este:

$$\hat{A}|e_n \rangle = \sum_k A_{kn} |e_k \rangle \quad (4.67)$$

unde numerele A_{kn} se numesc **elementele de matrice ale operatorului** \hat{A} în reprezentarea sistemului complet de vectori $\{|e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Din ultima relație, dacă se ține cont de condiția de ortonormare (4.58), rezultă:

$$A_{kn} = \langle e_k | \hat{A} | e_n \rangle \quad (4.68)$$

Totalitatea numerelor A_{kn} se plasează într-o matrice pătratică cu o infinitate de linii și coloane:

$$\hat{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Sunt valabile următoarele **proprietăți**:

- relațiilor algebrice dintre vectori ("ket" sau "bra") le corespund aceleași relații între matricile asociate
- orice ecuație vectorială

$$|\varphi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \quad (4.70)$$

cu

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |e_n\rangle \quad |\varphi\rangle = \sum_k d_k |e_k\rangle$$

este echivalentă cu ecuația matricială:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

adică cu egalitățile:

$$d_k = \sum_n A_{kn} c_n \quad (4.72)$$

- relațiilor algebrice între operatori:

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad \hat{C} = a\hat{A} \quad \hat{C} = \hat{A}\hat{B} \quad (4.73)$$

le corespund respectiv ecuațiile matriciale:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} \\ C_{ij} &= aA_{ij} \\ C_{ij} &= \sum_k A_{ik}B_{kj} \end{aligned} \quad (4.74)$$

- matricea asociată operatorului unitate \hat{I} este matricea unitate (elementele de pe diagonală sunt egale cu 1 iar celelalte sunt zero):

$$I_{jk} = \langle e_j | \hat{I} | e_k \rangle = \langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} \quad (4.75)$$

- unui operator hermitic îi corespunde o matrice hermitică (adică o matrice care coincide cu complex-conjugata transpusei ei):

$$A_{mn} = \langle e_m | \hat{A} | e_n \rangle = \langle e_n | \hat{A}^+ | e_m \rangle^* = \langle e_n | \hat{A} | e_m \rangle^* = A_{nm}^* \quad (4.76)$$

- unui operator unitar \hat{U} îi corespunde o matrice unitară:

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{I} \rightarrow \sum_n U_{kn}U_{mn}^* = \delta_{km}; \quad \sum_n U_{nk}^*U_{nm} = \delta_{kn} \quad (4.77)$$

În cazul finit-dimensional putem calcula întotdeauna determinantul unei matrici. Dacă el este diferit de zero atunci matricea este nesingulară. Pentru matricile unitare (4.77) rezultă:

$$|\det U| = 1 \quad (4.78)$$

De obicei, ca vectori ai sistemului ortonormat complet (4.57) se iau vectorii proprii ai unui operator hermitic \hat{A} :

$$|e_k \rangle = |u_k \rangle \quad \hat{A}|u_k \rangle = a_k|u_k \rangle \quad (4.79)$$

Matricea asociată oricărui operator în reprezentarea vectorilor săi proprii este diagonală deoarece:

$$A_{mn} = \langle u_m | \hat{a} | u_n \rangle = a_n \langle u_m | u_n \rangle = a_n \delta_{mn} \quad (4.80)$$

iar pe diagonala ei figurează chiar valorile proprii ale operatorului.

4.2 Principiile mecanicii cuantice

Legile generale ale comportării sistemelor atomice sunt descrise în forma unor **principii** (postulate) ale Mecanicii cuantice. Explicarea legilor Mecanicii cuantice nu se poate face fără folosirea unui limbaj matematic abstract. În cadrul principiilor sunt prezentate atât **formalismul de lucru** cât și **interpretarea formalismului**, adică modul în care din mărimile cu care operează teoria se extrag rezultate cu semnificație fizică.

4.2.1 Principiul I (principiul stărilor)

Enunț: starea oricărui sistem fizic la un moment dat este descrisă de unul sau mai mulți vectori normați dintr-un spațiu Hilbert

$$|\psi_1 \rangle, |\psi_2 \rangle, \dots, |\psi_K \rangle \quad \langle \psi_k | \psi_k \rangle = 1 \quad k = \overline{1, K} \quad (4.81)$$

împreună cu ponderile asociate p_1, p_2, \dots, p_K , numere pozitive și subunitare ($0 \leq p_k \leq 1$) pentru care

$$\sum_{k=1}^K p_k = 1 \quad (4.82)$$

Observații și consecințe

- Vectorii care descriu starea sistemului fizic se numesc **vectori de stare**, iar spațiul Hilbert căruia îi aparțin se numește **spațiul stărilor**.

- Vectorii de stare constituie generalizarea funcțiilor de undă $\psi(\vec{r}, t)$ întâlnite în paragraful (4.1.2), folosite pentru descrierea comportării cuantice a unei particule fără spin. Funcția de undă este interpretată ca o amplitudine de probabilitate de localizare a particulei. Ea este continuă și integrabilă în modul pătrat, iar pătratul amplitudinii reprezintă densitatea de probabilitate de localizare. Condiția de normare pentru funcția de undă se scrie explicit:

$$\int_{\infty} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \quad (4.83)$$

și ne arată că, probabilitatea pentru a găsi particula în spațiu la momentul t este egală cu 1, adică reprezintă certitudinea. Produsul scalar a două funcții de undă este definit prin:

$$\langle \psi | \varphi \rangle \equiv \int_{\infty} \psi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.84)$$

Spațiul stărilor se schimbă odată cu sistemul fizic studiat. Pentru un sistem de N particule fără spin, dacă vom nota cu $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ vectorii lor de poziție față de un sistem fix de axe, atunci vectorii de stare sunt funcții continue de aceste coordonate și de timp

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \quad (4.85)$$

normabile, pentru care condiția generală (4.83) se scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N = 1 \quad (4.86)$$

- Vectorii de stare pentru un sistem de una sau mai multe particule pot fi aleși nu numai în funcție de coordonatele de poziție. Orice particularizare a vectorilor de stare înseamnă alegerea unei baze în spațiul stărilor, ceea ce oglindește anumite ipoteze asupra sistemului studiat, bazate în ultimă instanță pe cunoașterea sa experimentală.

- Principiul I nu formulează restricții asupra vectorilor de stare, deci, orice vector al spațiului stărilor ar putea figura printre vectorii de stare; în particular, dacă $|\varphi_1\rangle$ și $|\varphi_2\rangle$ sunt vectori de stare, atunci și vectorul

$$|\psi\rangle = c_1|\varphi_1\rangle + c_2|\varphi_2\rangle \quad (4.87)$$

(c_1, c_2 numere complexe) este un vector de stare. Astfel, principiul I implică valabilitatea în Mecanica cuantică a **principiului de suprapunere a stărilor**, proprietate cerută de analiza experiențelor de difracție.

Rostul vectorilor de stare este să descrie proprietățile stării sistemului, adică să descrie statistica oricărei observabile a sistemului. Experința conduce la concluzia că există două situații distincte:

- **cazul stărilor pure**, caz în care proprietățile sistemului rezultă dintr-un singur vector de stare a cărui pondere este egală cu 1
- **cazul stărilor mixte**, caz în care sunt necesari mai mulți vectori de stare împreună cu ponderile lor, pentru descrierea stării (cel mai frecvent întâlnit în practică).

4.2.2 Principiul II

Enunț:

- a. Oricărei mărimi observabile A a unui sistem fizic îi corespunde un operator hermitic \hat{A} ce acționează în spațiul stărilor asociat sistemului fizic, operator care admite un sistem complet de vectori proprii.
- b. Valorile proprii ale operatorului asociat unei observabile reprezintă singurele valori pe care le poate lua observabila respectivă în condițiile experimentale create de măsurarea ei.
- c. Operatorii \hat{Q}_k și \hat{P}_k , corespunzători coordonatelor carteziene de poziție q_k și respectiv impulsurilor conjugate p_k pentru un sistem de particule, se construiesc în așa fel încât să fie respectate relațiile operatoriale:

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] = \hat{0} \quad [\hat{P}_j, \hat{P}_k] = \hat{0} \quad [\hat{P}_j, \hat{Q}_k] = -i\hbar\delta_{jk}\hat{I} \quad (4.88)$$

- d. Pentru observabilele (energie, moment cinetic orbital) care în cazul clasic sunt funcții de variabilele dinamice, operatorul corespunzător în Mecanica cuantică se obține înlocuind, în expresia clasică a observabilelor, variabilele canonice prin operatorii atașați lor. În cazul în care observabilele nu sunt funcții de variabilele dinamice, se va recurge la alte considerații pentru a stabili expresia operatorului asociat.

Observații și consecințe

- Conform afirmației **b**, valorile proprii ale operatorului asociat unei observabile au o semnificație fizică directă. Valorile proprii ale unui operator se obțin din rezolvarea ecuației cu valori proprii (4.45) pentru care se caută soluții ce satisfac condițiile de regularitate specifice. Interpretarea dată valorilor proprii este sprijinită

de faptul că spectrul de valori proprii al unui operator hermitic este format din numere reale.

De asemenea, prin afirmația **b** se explică cuantificarea unor mărimi fizice (cele pentru care spectrul de valori proprii al operatorului asociat este discret) și necuantificarea altora (spectrul continuu de valori proprii).

În legătură cu valorile pe care le poate lua o observabilă, este posibilă o comparație directă între teorie și experiență, din care să rezulte corectitudinea operatorului asociat unei observabile concrete precum și însăși corectitudinea formalismului în care mărimile observabile sunt reprezentate prin operatori hermitici.

Referitor la ecuația cu valori proprii (4.45), se observă că operatorul \hat{A} și valoarea proprie a au aceeași dimensiune, ceea ce înseamnă, conform principiului II, că operatorul asociat unei mărimi fizice are dimensiunea mărimii pe care o reprezintă.

- Referitor la afirmația **c**, se poate sublinia că, între Mecanica cuantică și cea clasică există o legătură puternică ce se reflectă în structura formală a Mecanicii cuantice. Dirac a emis ipoteza că în Mecanica cuantică trebuie să existe o operație care să implice operatorii asociați a două observabile, al cărei corespondent în Mecanica clasică să fie operația de construire a parantezei Poisson pentru mărimile fizice clasice respective.

Paranteza Poisson a două mărimi observabile ce depind de variabilele canonice p și q are expresia dată de relația (3.62) (din capitolul anterior) și se bucură de proprietățile deja amintite de liniaritate în factori, antisimetrie, identitatea lui Jacobi. În particular, parantezele Poisson pentru variabilele canonice p și q au

expresiile date de:

$$\{q_j, q_k\} = 0 \quad \{p_j, p_k\} = 0 \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk} \quad (4.89)$$

Proprietățile parantezelor Poisson caracterizează și operația de formare a comutatorului a doi operatori liniari, definită prin relația (4.29):

$$[\hat{B}, \hat{A}] = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{antisimetrie} \quad (4.90)$$

$$[\alpha_1\hat{A}_1 + \alpha_2\hat{A}_2, \hat{B}] = \alpha_1[\hat{A}_1, \hat{B}] + \alpha_2[\hat{A}_2, \hat{B}] \quad \text{liniaritate} \quad (4.91)$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \quad (4.92)$$

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] + [[\hat{B}, \hat{C}], \hat{A}] + [[\hat{C}, \hat{A}], \hat{B}] = 0 \quad \text{identitatea Jacobi} \quad (4.93)$$

Similitudinea proprietăților parantezei Poisson a două observabile și ale comutatorului operatorilor asociați face plauzibilă punerea în corespondență a acestor mărimi. Există însă o deosebire de care va trebui să ținem seama: în timp ce paranteza Poisson a două funcții reale este tot o funcție reală, comutatorul a doi operatori hermitici nu este un operator hermitic, ci unul antihermitic:

$$[\hat{A}, \hat{B}]^+ = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+ = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad (4.94)$$

Se observă că, dacă se înmulțește comutatorul cu numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$, se obține un operator hermitic. Deci, nu este nefiresc să se stabilească o corespondență între paranteza Poisson

$\{A, B\}$ și comutatorul $i[\hat{A}, \hat{B}]$. Trebuie doar să intervină un factor de proporționalitate care să asigure aceleași dimensiuni cantităților puse în corespondență. Acest factor pentru comutatorul operatorilor este chiar constanta Planck redusă \hbar .

În particular, pentru $A = q_j$ și $B = q_k$, rezultă corespondența:

$$\{q_j, q_k\} \leftrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] \quad (4.95)$$

Analog, pentru $A = p_j$ și $B = p_k$, obținem condiția:

$$[\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 0 \quad (4.96)$$

Pentru $A = p_j$ și $B = q_k$, deoarece $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$ corespondența:

$$\{p_j, q_k\} \leftrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{P}_j, \hat{Q}_k] \quad (4.97)$$

conduce la relația:

$$[\hat{P}_j, \hat{Q}_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{jk}\hat{I} \quad (4.98)$$

- Procedeu indicat de principiul II (afirmația **d**) de înlocuire a variabilelor canonice prin operatorii asociați lor în expresia clasică a unei mărimi fizice, permite construirea operatorilor asociați oricărei observabile cu corespondent clasic.

4.2.3 Principiul III (principiul interpretării statistice)

A. Cazul pur

Enunț: la o măsurare a observabilei A , efectuată la momentul t , în starea pură descrisă de vectorul de stare $|\psi\rangle$, probabilitatea ca rezultatul să fie o valoare proprie a_n din spectrul discret al operatorului asociat observabilei este:

$$p(a_n) = \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}|^2 = \sum_{r=1}^{g_n} |\langle nr|\psi\rangle|^2 \quad (4.99)$$

iar probabilitatea de a găsi un rezultat cuprins în intervalul $(a, a + da)$ din spectrul continuu este:

$$dp = \left(\sum_s |c_{\alpha s}|^2 \right) d\alpha = \sum_s |\langle \alpha s|\psi\rangle|^2 d\alpha \quad (4.100)$$

Observații și consecințe

- În enunțul principiului III al Mecanicii cuantice s-au respectat notațiile din paragraful 4.1.5 referitoare la vectorii proprii pentru spectrul discret și respectiv continuu pentru cazul general în care valorile proprii sunt degenerate.
- Principiul III exprimă în mod explicit previziunile statistice ale Mecanicii cuantice, previziuni ce rezultă din vectorul de stare. În afară de vectorul de stare trebuie cunoscuți operatorul \hat{A} asociat observabilei pe care o studiem, valorile și vectorii proprii ai acestuia.
- Statisticile observabilelor depind de timp, pentru că și vectorul de stare, deci coeficienții c_{nr} și $c_{\alpha s}$, dați de relația (4.51) depind de timp.

Condiția de normare a vectorului de stare descompus după sistemul complet de vectori proprii ai operatorului \hat{A} asociat observ-

abilei A :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}|^2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{\alpha s}|^2 d\alpha = 1 \quad (4.101)$$

se transcrie, pe baza principiului III, sub forma:

$$\sum_n p(a_n) + \int dp = 1 \quad (4.102)$$

Astfel, se asigură condiția de normare a probabilităților, venind în sprijinul interpretării formulate de principiul III.

• **Valoarea medie a unei observabile**

Deoarece principiile I și II ne arată ce rezultate se pot obține la măsurarea unei observabile și cu ce probabilități, ele permit calcularea **mediei statistice** a observabilelor în fiecare stare a sistemului fizic. Conform definiției mediei statistice pentru o variabilă aleatoare x , din teoria probabilităților

$$\bar{x} \equiv \langle x \rangle \equiv \sum_n x_n p_n \quad (4.103)$$

și ținând seama de interpretarea statistică a rezultatelor în Mecanica cuantică, avem:

$$\bar{A} = \sum_n a_n p(a_n) + \int a dp(a) = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} a_n |c_{nr}|^2 + \int \sum_s a |c_{\alpha s}|^2 d\alpha \quad (4.104)$$

Folosind expresiile (4.51) pentru coeficienții c_{nr} și $c_{\alpha s}$ obținem:

$$\bar{A} = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} a_n c_{nr} \langle \psi | \hat{A} | nr \rangle + \int \sum_s a c_{\alpha s} \langle \psi | \hat{A} | \alpha s \rangle d\alpha \quad (4.105)$$

Deoarece vectorii $|nr\rangle$ și $|\alpha s\rangle$ sunt vectori proprii ai operatorului \hat{A} , putem exprima valoarea medie a unei observabile prin relația:

$$\bar{A} = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} c_{nr} \langle \psi | \hat{A} | nr \rangle + \int \sum_s c_{\alpha s} \langle \psi | \hat{A} | \alpha s \rangle d\alpha \quad (4.106)$$

Dacă vom ține cont de liniaritatea produsului scalar în al doilea factor, precum și de liniaritatea operatorului \hat{A} , expresia precedentă se poate scrie sub o formă foarte simplă:

$$\bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (4.107)$$

Formula (4.107) ne arată că, dacă ținem cont de hermiticitatea operatorului \hat{A} , \bar{A} este un număr real, în acord cu interpretarea mărimii fizice A .

B. Cazul mixt

Dacă sistemul fizic se află într-o stare mixtă, atunci, pentru descrierea proprietăților sale, adică a statisticilor observabilelor sale, nu este suficient un singur vector de stare. Statisticile observabilelor, în acest caz nu pot fi descifrate decât ca o suprapunere

a unor statistici care fiecare în parte rezultă dintr-un vector de stare și intervin cu anumite ponderi.

Enunț: la măsurarea observabilei A , efectuată la momentul t , în starea descrisă de vectorii de stare $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_K\rangle$ și ponderile p_1, p_2, \dots, p_K , probabilitatea ca rezultatul să fie o valoare proprie a_m din spectrul discret este dată de:

$$p(a_m) = \sum_{k=1}^K p_k \sum_{r=1}^{g_m} |\langle m_r | \psi_k \rangle|^2 \quad (4.108)$$

iar probabilitatea de a găsi un rezultat în intervalul $(a, a + da)$ din spectrul continuu este:

$$dp = \sum_{k=1}^K p_k \left(\sum_s |\langle \alpha_s | \psi_k \rangle|^2 \right) d\alpha \quad (4.109)$$

Observații și consecințe

- Afirmările principiului III referitoare la cazul mixt constituie o generalizare a cazului pur: probabilitățile pentru diferitele rezultate posibile se obțin prin însumarea (cu ponderi) a probabilităților din cazul unor stări pure fictive, care ar fi descrise de câte unul din cei K vectori de stare.
- Valoarea medie a unei observabile într-o stare mixtă va fi, ținând cont de Principiul III:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^K p_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle \quad (4.110)$$

Deci, media unei observabile într-o stare mixtă este o medie ponderată a valorilor medii în stări pure descrise de fiecare din vectorii de stare.

- În cazul mixt, condiția (4.102) de normare a probabilităților este asigurată de completitudinea sistemului de vectori proprii ai operatorului \hat{A} , de normarea vectorilor de stare (4.81) și de proprietatea (4.82) a ponderilor.

- Pentru ca la un moment dat să avem certitudinea rezultatului obținut la măsurarea unei observabile A , este necesar și suficient ca toți vectorii de stare să fie vectori proprii ai operatorului \hat{A} atașat observabilei, pentru aceeași valoare proprie din spectrul discret.

4.2.4 Principiul IV (principiul evoluției temporale)

Afirmațiile conținute în principiile anterioare s-au referit la starea sistemului la un moment dat, dar, proprietățile sistemelor sunt dependente de timp (statisticile observabilelor se modifică în timp).

Enunț: pentru orice sistem cuantic există un operator hermitic \hat{H} , numit **operatorul hamiltonian**, astfel încât vectorii de stare care descriu starea sistemului satisfac ecuația diferențială de ordin întâi în raport cu timpul:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_k\rangle = \hat{H} |\psi_k\rangle \quad k = \overline{1, K} \quad (4.111)$$

Ponderile asociate nu depind de timp.

Ori de câte ori este posibil, operatorul hamiltonian este construit pornind de la funcția lui Hamilton corespunzătoare sistemului în cazul clasic.

Dacă sistemul evoluează în condiții externe independente de timp, caz în care are sens observabila energiei, atunci operatorul hamiltonian coincide cu operatorul energiei.

Observații și consecințe

- Ecuația (4.111) se numește **ecuația Schrödinger generalizată** sau **ecuația Schrödinger dependentă de timp (sau temporală)**.
- Ecuația Schrödinger temporală este liniară și omogenă. Aceasta asigură efectiv valabilitatea principiului de suprapunere a stărilor, posibilitate deschisă de principiul I.
- Ecuația Schrödinger generalizată este de ordinul întâi în raport cu timpul. De aici rezultă că, vectorul de stare la momentul inițial determină univoc vectorul de stare la un moment ulterior. Și în cazul cuantic, la fel ca și în cel clasic, starea la un moment dat determină starea la un moment de timp ulterior. Observăm că și din punct de vedere al evoluției temporale starea se identifică cu vectorii de undă și ponderile asociate.
- Produsul scalar a două soluții ale ecuației Schrödinger generalizate este constant în timp. Dacă $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$ sunt doi vectori de stare (deci satisfac ecuația Schrödinger temporală) atunci

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_t = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_{t_0} \quad (4.112)$$

În particular, dacă $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ atunci **norma vectorului de stare se conservă în timp**. Dacă normăm vectorii de stare la un moment inițial ($\langle \psi | \psi \rangle_{t_0} = 1$), atunci ei vor fi normați la orice moment de timp ulterior ($\langle \psi | \psi \rangle_t = 1$).

- În situațiile care au analog clasic, legea de evoluție se dovedește înrudită cu ecuația Hamilton-Jacobi din Mecanica clasică. Să considerăm ca exemplu o particulă fără spin, de masă m , aflată

într-un câmp de forță care derivă din potențialul $V(\vec{r}, t)$ ($\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}, t)$). Vom presupune că forța depinde explicit de timp, deci nu suntem în cazul conservativ. În aceste condiții, în cazul clasic, funcția:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \quad (4.113)$$

joacă rol de hamiltoniană. Ecuațiile de mișcare, conform formalismului Hamilton vor fi:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad (4.114)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \vec{q} = \vec{r} \quad (4.115)$$

În cazul cuantic, se admite că operatorul hamiltonian corespunzător situației descrise este:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}, t) \quad (4.116)$$

adică este operatorul obținut din hamiltoniana clasică prin substitu-

țiile obișnuite $\vec{p} \rightarrow \hat{P}$ și $\vec{r} \rightarrow \hat{r}$. Atunci, conform principiului IV, funcția de undă $\psi(\vec{r}, t)$, care descrie o stare pură a particulei, satisface ecuația :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \quad (4.117)$$

adică tocmai ecuația Schrödinger temporală, în forma ei inițială.

- **Variația în timp a valorii medii a unei observabile**

Valoarea medie a unei observabile A , dată în cazul unei stări pure de relația (4.107) are în general o dependență de timp. Derivata mediei în raport cu timpul are o expresie simplă:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \langle \dot{\psi} | \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} | \dot{\psi} \rangle \quad (4.118)$$

Vom înlocui în această ultimă relație derivatele funcției de undă, folosind legea de evoluție (4.111):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{A} \hat{H} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle \end{aligned} \quad (4.119)$$

Cei trei termeni pot fi scriși formal ca valori medii ale anumitor operatori:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \overline{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}} + \frac{1}{i\hbar} \overline{[\hat{A}, \hat{H}]} \quad (4.120)$$

Relația (4.120) reprezintă **legea de evoluție pentru valoarea medie** a unei observabile. Ea amintește de rezultatul mecanicii clasice pentru derivata în raport cu timpul a unei funcții oarecare de variabilele canonice p și q ale unui sistem și de timp:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_{cl}\} \quad (4.121)$$

unde $\{f, H_{cl}\}$ este paranteza Poisson dintre funcția f și funcția clasică a lui Hamilton pentru sistemul studiat.

Relația (4.120) este valabilă și în cazul stărilor mixte.

• Stări staționare

Fie un sistem care evoluează în condiții exterioare independente de timp. În acest caz, conform principiului IV, operatorul hamiltonian \hat{H} coincide cu operatorul energiei. Fie vectorul de stare ce caracterizează sistemul la un moment dat:

$$|\psi_{st}(t)\rangle = |u_m\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} \quad (4.122)$$

unde E_m este o valoare proprie din spectrul discret al energiei, iar $|u_m\rangle$ un vector propriu corespunzător operatorului energiei (hamiltonian) ce satisface ecuația cu valori proprii:

$$\hat{H}|u_m\rangle = E_m|u_m\rangle \quad (4.123)$$

Acțiunea operatorului energiei asupra vectorului de stare $|\psi_{st}\rangle$ va fi:

$$\hat{H}|\psi_{st}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\hat{H}|u_m\rangle = E_m|\psi_{st}\rangle \quad (4.124)$$

Se verifică imediat că vectorul de stare $|\psi_{st}\rangle$ verifică ecuația Schrödinger temporală (4.111), deci $|\psi_{st}\rangle$ este o soluție a ecuației Schrödinger temporale, pentru o dependență de timp factorizată. Starea descrisă de vectorul de stare (4.122) se numește **stare staționară** și are următoarele proprietăți:

- la orice moment de timp, $|\psi_{st}(t)\rangle$ este un vector propriu al operatorului energiei (4.123), astfel încât în starea descrisă de el **energia sistemului are o valoare bine determinată**

- în starea descrisă de relația (4.122) **statistica oricărei observabile independente de timp este constantă în timp**, ceea ce conduce la următoarea relație:

$$\overline{[\hat{A}, \hat{H}]} = 0 \quad (4.125)$$

proprietate ce se verifică imediat pe baza relației (4.124) și a hermiticității operatorului \hat{H} .

4.2.5 Principiul V

Procesul de măsurare a unei observabile este un proces de interacție a unui sistem cuantic cu un aparat de măsură, un sistem macroscopic ce ascultă de legile fizicii clasice. În urma unei măsurători sistemul cuantic ia valori bine determinate pentru unele dintre observabilele sale, conform principiilor II și III. Măsurătoarea însă modifică starea sistemului. Corectitudinea previziunilor asupra comportării sistemului asupra căruia s-a efectuat o măsurătoare poate fi în principiu testată prin noi măsurători.

Experiența arată că, dacă pentru un sistem măsurăm observabila A și găsim rezultatul a , și **imediat după aceea** măsurăm din nou observabila A obținem același rezultat a .

Enunț: dacă se măsoară efectiv observabila A pentru un sistem fizic descris de vectorul de stare $|\psi\rangle$ și se obține rezultatul a_n , atunci vectorul de stare imediat după efectuarea măsurătorii este:

$$|\psi'\rangle = |\psi_{a_n}\rangle = \frac{P_{a_n}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_n}|\psi\rangle}} \quad (4.126)$$

unde P_{a_n} este proiectorul pe subspațiul asociat valorii proprii.

Observații și consecințe

- Enunțul principiului V de mai sus, făcut pentru cazul pur se poate extinde cu ușurință la cazul mixt.
- Principiul V afirmă producerea unui salt al vectorului de stare în urma operației de măsurare a unei observabile, în contrast cu evoluția continuă a vectorului de stare atunci când asupra sistemului nu se intervine cu aparate de măsură. Rezultatul este diferit de cel din Mecanica clasică, unde efectuarea unei măsurători asupra unui sistem poate fi condusă astfel încât practic să nu se modifice starea sistemului.

După măsurătoare vectorul de stare evoluează din nou continuu, pornind de la starea (4.126), respectând ecuația Schrödinger generalizată (4.111) atâta timp cât sistemul nu mai este perturbat de o altă măsurătoare.

- Starea obținută în urma măsurătorii este determinată nu numai de starea anterioară măsurătorii, ci și de interacția dintre sistem și aparatul de măsură, care a condus la realizarea rezultatului a_n . Situația aceasta este diferită de cea din fizica clasică, unde rezultatele unei măsurători evidențiază numai proprietățile sistemului și permit determinarea stării.
- În paragraful (4.1.6) am introdus noțiunea de observabile compatibile și incompatibile plecând de la comutatorul lor. Am văzut că, pentru două observabile, condiția necesară și suficientă ca să fie compatibile este ca operatorii asociați să admită un sistem comun de vectori proprii. Conform principiului V, două observabile compatibile ce caracterizează starea unui sistem sunt **simultan** bine determinate.

4.3 Probleme

4.1 Folosind regulile algebrei "bra-ket" demonstrați următoarele relații:

- (a) $tr(\hat{X}\hat{Y}) = tr(\hat{Y}\hat{X})$;
(b) $(\hat{X}\hat{Y})^t = \hat{X}^t\hat{Y}^t$ unde \hat{X}, \hat{Y} sunt doi operatori oarecare.

Rezolvare:

a. Să considerăm o bază ortonormată $|a\rangle$. Conform definiției trasei, în reprezentarea matriceală:

$$tr(\hat{X}\hat{Y}) = \sum_{(a)} \langle a | \hat{X}\hat{Y} | a \rangle$$

Dacă introducem un nou set complet de stări:

$$\begin{aligned} tr(\hat{X}\hat{Y}) &= \sum_{(a)} \sum_{(a')} \langle a | \hat{X} | a' \rangle \langle a' | \hat{Y} | a \rangle \\ &= \sum_{(a)} \sum_{(a')} \langle a' | \hat{Y} | a \rangle \langle a | \hat{X} | a' \rangle \\ &= \sum_{(a')} \langle a' | \hat{X}\hat{Y} | a' \rangle \\ &= tr(\hat{Y}\hat{X}) \end{aligned}$$

S-a folosit faptul că:

$$\langle a | \hat{X} | a' \rangle \langle a' | \hat{Y} | a \rangle$$

sunt numere deci comută între ele.

Problema se poate generaliza pentru cazul a n operatori (\hat{X}_n).

Trasa produsului dintre aceștia posedă proprietatea de ciclicitate, în sensul că:

$$tr(\hat{X}_1\hat{X}_2\dots\hat{X}_n) = tr(\hat{X}_n\hat{X}_1\dots\hat{X}_{n-1})$$

b. Pornim de la un element oarecare al matricei transpuse $(\hat{X}\hat{Y})^t$:

$$\begin{aligned} & \langle a | (\hat{X}\hat{Y})^t | b \rangle = \langle b | \hat{X}\hat{Y} | a \rangle^* \\ & = \sum_{(c)} \langle b | \hat{X} | c \rangle^* \langle c | \hat{Y} | a \rangle^* \\ & = \sum_{(c)} \langle c | \hat{Y} | a \rangle^* \langle b | \hat{X} | c \rangle^* \\ & = \sum_{(c)} \langle a | \hat{X}^t | c \rangle \langle c | \hat{Y}^t | b \rangle \\ & = \langle a | \hat{X}^t\hat{Y}^t | b \rangle \end{aligned}$$

Ca urmare s-a demonstrat relația:

$$(\hat{X}\hat{Y})^t = \hat{X}^t\hat{Y}^t$$

4.2 Să se demonstreze că operatorii:

- (a) componente impuls: $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$;
- (b) hamiltonian pentru o particulă liberă

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

sunt hermitici.

Rezolvare:

a. Un operator \hat{A} este hermitic dacă și numai dacă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^* \hat{A} v dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (u \hat{A})^* v dx$$

unde s-a considerat că funcțiile u, v depind doar de coordonata x :

$$u = u(x)$$

$$v = v(x)$$

În cazul în care operatorul \hat{A} coincide cu operatorul impuls:

$$\hat{A} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

se obține:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^* \left(-i\hbar \frac{dv}{dx} \right) dx &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} u^* dv \\ &= -i\hbar u^* v \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{du^*}{dx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v \left(-i\hbar \frac{du}{dx} \right)^* dx \end{aligned}$$

Primul termen este nul deoarece descrește suficient de repede în apropierea limitelor de integrare. S-a obținut astfel ceea ce trebuia demonstrat.

În mod similar se procedează și pentru celelalte două componente.

b. Problema este rezolvată dacă se verifică faptul că operatorii:

$$\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2$$

sunt hermitici. Fie:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ w &= \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Atunci se obține:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^* \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ &= u^* w \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{\partial u^*}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx\end{aligned}$$

Pe de altă parte membrul al doilea al condiției de ciclicitate este:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^* v dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} v dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right) v dx \\ &= \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right) v \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx\end{aligned}$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Deoarece s-a obținut același rezultat operatorul $\partial^2/\partial x^2$ este hermitic. La fel se procedează și cu $\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2$. Folosind regulile de calcul (adunarea) între operatorii hermitici rezultatul cerut de punctul (b) este evident.

4.3 I Să se demonstreze următoarele relații dintre operatorii $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

(a) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B};$

(b) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

II Să se arate că dacă \hat{A}, \hat{B} sunt operatori ce verifică relația:

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}^m] = 0$$

atunci:

$$[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$$

Rezolvare:

I Folosim definiția comutatorilor:

a.

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}) \\ &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} \\ &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + (\hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \\ &= \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) + (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} \\ &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \end{aligned}$$

II Demonstrăm valabilitatea acestei relații prin inducție:

- $m = 1$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$$

- presupunem relația adevărată pentru m :

$$[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$$

- demonstrăm pentru $m + 1$.

Înmulțim relația anterioară la stânga cu \hat{A} și apoi adunăm cantitatea $\hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ în ambii termeni:

$$\begin{aligned} \hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] &= \hat{A}(\hat{A}^m\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^m) = \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m \\ &= m\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] = m\hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \\ \hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] &= m\hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) + \hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \\ &= (m+1)\hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = (m+1)\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] \end{aligned}$$

Pe de altă parte, condiția problemei înseamnă:

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}^m] = 0$$

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^m - \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] &= 0 \\
(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{A}^m &= \hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})
\end{aligned}$$

Deci revenind în relațiile anterioare:

$$\begin{aligned}
\hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{A}^m\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + \hat{A}^m(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{A}^m \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m - \hat{B}\hat{A}^{m+1} \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^{m+1}
\end{aligned}$$

Ca urmare relația este adevărată și pentru $m + 1$.

$$[\hat{A}^{m+1}, \hat{B}] = (m + 1)\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}]$$

4.4 Să se demonstreze valabilitatea următoarelor relații de comutare:

- a. $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$; $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$; $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$;
- b. $[\hat{x}, \hat{l}_x] = 0$; $[\hat{x}, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{z}$;
- c. $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z$; $[\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hbar\hat{l}_x$; $[\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hbar\hat{l}_y$;
- d. $[\hat{l}^2, \hat{l}_x] = 0$

unde \hat{l} —operatorul moment cinetic; $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ — componentele acestuia într-un sistem de referință cartezian.

Rezolvare:

a.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = \hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi$$

$$\begin{aligned}
&= x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x\psi \\
&= -i\hbar \left[x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) \right] \\
&= -i\hbar \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
&= i\hbar
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}_y] \psi &= \hat{x} \hat{p}_y \psi - \hat{p}_y \hat{x} \psi \\
&= x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) x\psi \\
&= -i\hbar \left[x \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (x\psi) \right] \\
&= -i\hbar \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_x, \hat{p}_y] \psi &= \hat{p}_x \hat{p}_y \psi - \hat{p}_y \hat{p}_x \psi \\
&= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \\
&= -\hbar^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Rezultatele se pot generaliza sub forma:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} = \begin{cases} i\hbar, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

b. Momentul cinetic se calculează ca:

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$$

unde componentele pe axele carteziene cu ajutorul definiției:

$$\begin{aligned}\widehat{\vec{l}} &= \widehat{\vec{r}} \times \widehat{\vec{p}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} \\ \hat{l}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(\hat{y} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{l}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{l}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Ca urmare folosind definițiile operatorilor, observația că:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0; \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

și proprietățile comutatorilor se poate scrie:

$$\begin{aligned}[\hat{x}, \hat{l}_x] &= [\hat{x}, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{y}\hat{p}_z] - [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_y] \\ &= \hat{y}[\hat{x}, \hat{p}_z] + [\hat{x}, \hat{y}]\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{x}, \hat{p}_y] - [\hat{x}, \hat{z}]\hat{p}_y \\ &= 0 \\ \\ [\hat{x}, \hat{l}_y] &= [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{x}, \hat{x}\hat{p}_z] \\ &= \hat{z}[\hat{x}, \hat{p}_x] + [\hat{x}, \hat{z}]\hat{p}_x - \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}_z] - [\hat{x}, \hat{x}]\hat{p}_z \\ &= i\hbar z\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
[\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] \\
&= \hat{y}\hat{z}[\hat{p}_z, \hat{p}_x] + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{z}[\hat{y}, \hat{p}_x]\hat{p}_z + \hat{p}_x[\hat{y}, \hat{z}]\hat{p}_z + \\
&\quad + \hat{z}\hat{x}[\hat{p}_y, \hat{p}_z] + \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y + [\hat{z}, \hat{x}]\hat{p}_z\hat{p}_y \\
&= \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y \\
&= -\hat{y}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_x + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y \\
&= (-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y)[\hat{z}, \hat{p}_z] = \\
&= i\hbar\hat{l}_z
\end{aligned}$$

Celelalte relații de la punctul (c) rezultă prin permutări ciclice.

d.

$$\begin{aligned}
[\hat{l}^2, \hat{l}_x] &= [\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2, \hat{l}_x] \\
&= [\hat{l}_x^2, \hat{l}_x] + [\hat{l}_y^2, \hat{l}_x] + [\hat{l}_z^2, \hat{l}_x] \\
&= \hat{l}_x[\hat{l}_x, \hat{l}_x] + [\hat{l}_x, \hat{l}_x]\hat{l}_x + \hat{l}_y[\hat{l}_y, \hat{l}_x] + \\
&\quad + [\hat{l}_y, \hat{l}_x]\hat{l}_y + \hat{l}_z[\hat{l}_z, \hat{l}_x] + [\hat{l}_z, \hat{l}_x]\hat{l}_z \\
&= i\hbar(\hat{l}_y\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{l}_y + \hat{l}_z\hat{l}_y - \hat{l}_y\hat{l}_z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.5 Fie o particulă cuantică descrisă de funcția de undă:

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0x\right)$$

unde A, a, x_0 – constante. Să se calculeze următoarele mărimi medii:

(a) $\langle x \rangle; \langle \Delta x \rangle;$

(b) $\langle p \rangle; \langle \Delta p \rangle;$

(c) $\langle x^2 \rangle; \langle \Delta x^2 \rangle;$

(d) $\langle p^2 \rangle; \langle \Delta p^2 \rangle$

Se cunosc integralele:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(vezi Anexa C)

Rezolvare:

a. Folosim definiția valorilor medii și ținem cont de faptul că funcția de undă are o parte reală și una imaginară:

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \exp(ik_0x)$$
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx$$
$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 0$$

$$\langle \Delta x \rangle = x - \langle x \rangle$$

b.

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* p \psi dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\frac{x}{a^2} + ik_0 \right) \psi dx \\ &= i\hbar \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx + \hbar k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx \\ &= \hbar k_0 \end{aligned}$$

unde s-a folosit condiția de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$\langle \Delta p \rangle = p - \langle p \rangle$$

c.

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi|^2 dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = |A|^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^3 \end{aligned}$$

Amplitudinea se determină din condiția de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = |A|^2 a\sqrt{\pi}$$

$$|A|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$$

Ca urmare:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^3 = \frac{1}{2} a^2$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2} a^2$$

d.

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* p^2 \psi dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\ &= \frac{\hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx - \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\frac{x}{a^2} + ik_0\right)^2 \psi dx \\ &= \frac{\hbar^2}{a^2} - \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(\frac{x^2}{a^4} - 2ik_0 \frac{x}{a^2} - k_0^2\right) \psi dx \\ &= \frac{\hbar^2}{2a^2} + \hbar^2 k_0^2 \end{aligned}$$

Rezultatul cerut este:

$$\begin{aligned}\langle \Delta p^2 \rangle &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2a^2} + \hbar^2 k_0^2 - \hbar^2 k_0^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2a^2}\end{aligned}$$

4.6 (a) Să se găsească soluția ecuației Schrodinger atemporală pentru o particulă care se mișcă într-o cutie rigidă unidimensională cu pereți în punctele $x = 0$ și $x = 5a$, a – constantă pozitivă.

(b) Să se determine valorile proprii ale energiilor.

(c) Să se scrie funcțiile proprii asociate.

Rezolvare:

(a). Ecuația diferențială atemporală a lui Schrödinger pentru această mișcare este:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

Facem notația:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Ecuația diferențială ce trebuie rezolvată devine:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0$$

cu condițiile la limită:

$$\psi(0) = \psi(5a) = 0$$

Analizăm cazurile posibile ale mișcării:

- $E < 0 \Rightarrow k^2 < 0$. În acest caz ecuația caracteristică are soluții reale și deci funcția de undă va fi exprimată prin soluții cu exponent real, deci nemărginite. Condițiile la limite impun însă anularea funcției de undă în aceste puncte, deci condiția $E < 0$ nu poate fi posibilă.
- $E < 0 \Rightarrow k^2 < 0$.

În acest caz ecuația caracteristică are soluții imaginare și deci funcția de undă va fi exprimată prin soluții cu exponent imaginar, deci mărginite.

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Constantele A, B se determină din condițiile la limită:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A \sin 5ak &= 0 \Rightarrow \\ 5ak_n &= n\pi, n = 0, 1, 2, \dots \\ k_n &= \frac{n\pi}{5a} \end{aligned}$$

(b). Revenind în notația lui k obținem valorile proprii ale energiei:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{5a} \right)^2 n^2$$

S-a obținut un spectru discret de valori cuantificate de numărul n^2 .

(c) Funcțiile proprii asociate acestor valori ale lui k_n sunt:

$$\begin{aligned} \psi_n &= A_n \sin k_n x \\ &= A_n \sin \frac{n\pi}{5a} x \end{aligned}$$

Constanta A_n o determinăm din condiția de normare:

$$\begin{aligned} \int_0^{5a} |\psi_n|^2 dx = 1 &\Rightarrow A_n^2 \int_0^{5a} \left(\sin \frac{n\pi}{5a}x\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}A_n^2 \int_0^{5a} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{5a}x\right) dx = \frac{5a}{2}A_n^2 = 1 \\ &\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{5a}} \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{5a}} \sin \frac{n\pi}{5a}x$$

4.7 O particulă este descrisă de funcția de undă:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax, & -a \leq x \leq a \\ 0, & x < -a, x > a \end{cases}$$

- (a) Determinați constanta A din condiția de normare;
- (b) Calculați probabilitatea de a găsi particula undeva în regiunea $0 \leq x \leq \frac{1}{2}a$.
- (c) Calculați poziția medie a particulei.

Rezolvare:

(a) Condiția de normare conduce la:

$$\int_{-a}^a |\psi_n|^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned}
|A|^2 \int_{-a}^a x^2 dx &= 1 \\
|A|^2 \frac{2a^3}{3} &= 1 \\
A &= \sqrt{\frac{3}{2a^3}}
\end{aligned}$$

(b) Probabilitatea de a găsi particula undeva în zona $0 \leq x \leq \frac{1}{2}a$ este:

$$\begin{aligned}
\int_0^{a/2} |\psi_n|^2 dx &= \frac{3}{2a^3} \int_0^{a/2} x^2 dx \\
&= \frac{3}{2a^3} \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

(c) Valoarea medie a poziției particulei este:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \psi_n x \psi_n^* dx &= \int_{-a}^a x |\psi_n|^2 dx \\
&= \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a x^3 dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Valoarea medie a poziției particulei se află în poziția centrală.

4.8 Să se determine soluția ecuației Schrodinger dependentă de

timp a unei particule de masă m și impuls p , care se mișcă uni-dimensional într-un spațiu caracterizat de potențialul constant V_0 .

Rezolvare:

Ecuția Schrödinger dependentă de timp este:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V_0 \psi(x, t)$$

Pentru a rezolva această ecuație vom căuta o soluție de forma:

$$\psi(x, t) = \varphi(x)F(t)$$

în care variabilele spațiu și timp sunt separate. După înlocuire în ecuație găsim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{df}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} C \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V_0 \varphi &= C \varphi \end{aligned}$$

Din prima ecuație diferențială, după separarea variabilelor f și t și integrare, rezultă (C – constant):

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{f} &= -\frac{i}{\hbar} C \int dt \\ f &= f_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} C t\right), f_0 - const. \end{aligned}$$

Propunem ca soluție pentru cea de-a doua ecuație diferențială, forma exponențială

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar} p x\right)$$

Verificând această soluție rezultă:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{i}{\hbar} p \right)^2 + V_0 &= C \\ \frac{p^2}{2m} + V_0 &= C \end{aligned}$$

adică tocmai energia totală a particulei, care poate avea orice valoare posibilă (spectru discret). Soluția generală devine:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \varphi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) f_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ct\right) \\ &= A \exp\left[\frac{i}{\hbar} (px - Ct)\right] \\ &= A \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(px - \left(\frac{p^2}{2m} + V_0\right) t\right)\right] \end{aligned}$$

Conform principiului superpoziției stărilor și considerând $V_0 = 0$, soluția generală în reprezentarea impulsului este:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(px - \frac{p^2}{2m} t\right)\right] dp$$

Anexa A

Elemente de calcul variațional

O funcțională este o generalizare a unei funcții matematice. Ea reprezintă o regulă prin care unei funcții oarecare i se asociază un număr.

Acțiunea se definește ca:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Condiția ca funcția să aibă un extrem, implică:

$$\delta S = 0$$

Această mărime corespunde variației funcției la trecerea de la o traiectorie $q_i(t)$ ($i = \overline{1, l}$) la alta $q'_i(t)$ ($i = \overline{1, l}$) pentru care se produce o variație a coordonatelor generalizate cu $\delta q = q'_i(t) - q_i(t)$ și ale vitezelor generalizate corespunzătoare:

$$\delta \dot{q}_i(t) = \dot{q}'_i(t) - \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} [q'_i(t) - q_i(t)] = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

Variația funcționalei ar corespunde unei comutări de pe o traiectorie pe alta:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt\end{aligned}$$

sau

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

deoarece deplasările virtuale nu depind de timp.

Deoarece:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

atunci,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right]$$

Cum $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, din relația de mai sus rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Atunci, variația acțiunii va lua forma:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt$$

Conform principiului lui Hamilton, dacă traiectoria este reală, atunci ultima integrală trebuie să se anuleze oricare ar fi variațiile δq_i . Deoarece aceste deplasări sunt independente între ele, pentru ca variația δS să fie nulă este necesar ca:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad k = \overline{1, l}$$

adică ecuațiile lui Lagrange.

Anexa B

Funcția δ

Simbolul $\delta(x)$ introdus de Dirac (1930) nu notează o funcție, ci un anumit proces de trecere la limită, întâlnit în multe probleme de fizică. Proprietățile mărimii $\delta(x)$ sunt concentrate în relațiile de mai jos:

a. $\delta(x) = 0$ pentru $x \neq 0$

b. $\delta(0)$ are o valoare nemărginit de mare

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

Funcția $f(x)$ se presupune continuă și cu derivate continue. Pentru $f(x) = 1$ rezultă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$

În general, întâlnim funcția $\delta(x - x_o)$ care are punctul de singularitate în $x = x_o$ și pentru care vor fi valabile relațiile:

a. $\delta(x - x_o) = 0$ pentru $x \neq 0$

b. $\delta(x - x_o)$ este nemărginită pentru $x = x_o$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o)$

Din aceste ultime proprietăți rezultă că:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o) \quad \text{dacă } x_o \in [a, b]$$
$$0 \quad \text{dacă } x_o \notin [a, b]$$

Anexa C

Integrale Poisson

Integralele Poisson sunt de tipul:

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^n dx, n \in N$$

Una din metodele de rezolvare este integrarea prin părți:

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^n dx &= -\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} d(e^{-ax^2}) x^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2a} \left(e^{-ax^2} x^{n-1} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{n-1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{n-2} dx \\ &= \frac{n-1}{2a} I_{n-2}, n \geq 2, n \in N \end{aligned}$$

S-a obținut astfel o relația de recurență care permite găsirea tu-

turor integralelor I_n cunoscând valoarea corespunzătoare lui $n=0$:

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

• $n = 1$:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x dx = \frac{1}{2a}$$

• $n = 2$:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

• $n = 3$:

$$I_3 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^3 dx = \frac{1}{4a^2}$$

• $n = 4$

$$I_4 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^4 dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Bibliografie

[1] Șerban Țițeica, *Curs de MECANICĂ TEORETICĂ - Noțiunile și legile Mecanicii newtoniene*, Universitatea București, Facultatea de Fizică, București, 1975

[2] Șerban Țițeica, *Curs de MECANICĂ TEORETICĂ - Mecanică analitică*, Universitatea București, Facultatea de Fizică, București, 1978

[3] Viorica Florescu, *Mecanică cuantică*, partea I-a, Universitatea București, Facultatea de Fizică, București, 1979

[4] I.M. Popescu, *Fizică, vol. I, II*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982

[5] Traian I. Crețu, *FIZICA - Curs universitar*, Editura Tehnică, București, 1996

[6] Emil Petrescu, *Fizica - vol. I, II*, Editura Bren, București, 2003

[7] M. Sanduloviciu, *Mecanica*, litografia Univ. "Al. I. Cuza" Iași, Iași, 1983

[8] Atam P. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, Prentice Hall International, Inc., 1990

[9] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, Amsterdam, 1968