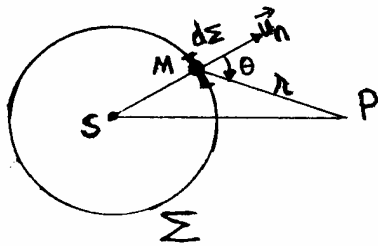


8. Difracția undelor

8.1. Introducere

Prin difracție se înțelege modificarea repartiției spațiale a intensității unei unde datorată unor ecrane sau a unor deschideri practicate în paravane. Conform opticii geometrice umbra unui ecran trebuie să aibă marginile nete. În realitate lumina pătrunde și în umbra obstacolului, la marginea conturului umbrei formându-se franje de difracție. Astfel imaginea unui obiect punctual într-o lentilă lipsită de aberații, limitată de o diafragmă, nu este un punct, ci o pată de difracție.

Fenomenul de difracție se explică pe baza naturii ondulatorii a luminii, folosind principiul Huygens-Fresnel. Principiul lui Huygens arată că efectul sursei primare S într-un punct oarecare P , exterior suprafeței Σ , poate fi înlocuit prin efectul produs de o repartiție continuă de surse secundare, punctiforme, convenabil alese, situate pe suprafața auxiliară Σ (fiecare element al suprafeței atinse de undă se comportă ca o sursă secundară de unde sferice a căror amplitudine este proporțională cu elementul de suprafață considerat).



Principiul lui Fresnel completează principiul lui Huygens, precizând ce se înțelege prin surse convenabil alese: faza undelor secundare pe suprafața Σ este egală cu faza undei primare în fiecare punct (sau element de suprafață) de pe Σ , iar amplitudinea undei secundare este proporțională cu amplitudinea undei primare în zona sursei secundare.

De asemenea, Fresnel face ipoteza că amplitudinea undei emise de o sursă secundară este dependentă de direcția de propagare. Valoarea acestei amplitudini este maximă în sensul de propagare a undei primare și scade la zero pentru $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (nu există undă regresivă). Este evident că undele secundare considerate sunt coerente și deci vor interfera. Intensitatea câmpului electric rezultat într-un punct P este egală cu suma intensităților de câmp electric emise de sursele secundare (se aplică principiul superpoziției, întrucât ecuațiile lui Maxwell sunt liniare). La limită, suma trece în integrală (facem ca elementele de suprafață să tindă către 0):

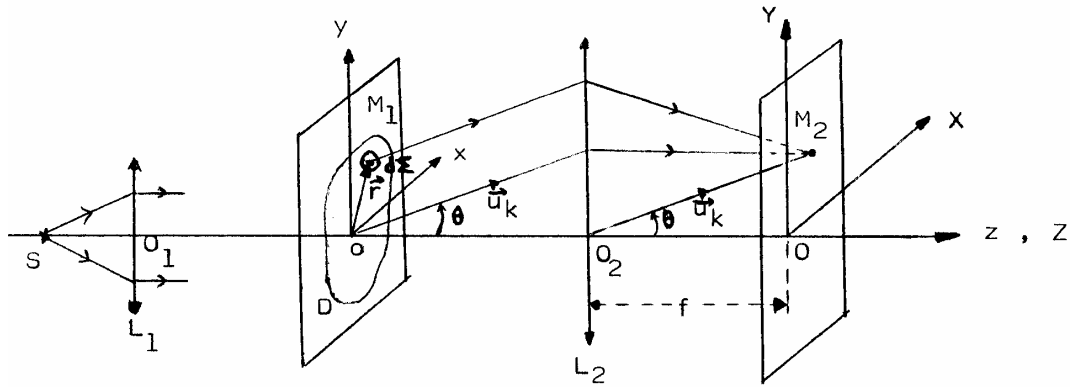
$$E(P) = \iint_{\Sigma} E_0(M) Q \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} d\Sigma \quad (8.1)$$

unde $E_0(M)$ este intensitatea câmpului electric în punctul M , Q este un factor de înclinare

($Q = 1$ pentru $\theta = 0$, $Q = 0$ pentru $\theta = \pi/2$), $\frac{e^{-ikr}}{r}$ este intensitatea câmpului electric sferic în punctul P datorat elementului $d\Sigma \rightarrow 0$, adică sursei punctuale M , iar $d\Sigma$ este elementul de suprafață din imediata vecinătate a punctului M de pe suprafața Σ . θ este unghiul dintre normala în punctul M la suprafața și MP .

Fie o sursă S , punctiformă, plasată în focarul unei lentile convergente L_1 , care emite radiații cu lungimea de undă λ . Unda plană formată de lentilă întâlnește o deschidere de formă oarecare practică într-un paravan aflat în planul xOy . Presupunem că repartiția amplitudinii undei în planul deschiderii este determinată de funcția $f(x, y)$ numită transparența în amplitudine a deschiderii.

Razele difractate sub un unghi θ vor ajunge în punctul M_2 din planul focal al lentilei L_2 . Amplitudinea difractată în această direcție este:



$$A = \iint_D f(x, y) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy \quad (8.2)$$

unde $dx dy$ este elementul de suprafață $d\Sigma$ din jurul punctului M_1 ,

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{u}_k \quad (8.3)$$

iar

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{u}_k \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \quad (8.4)$$

este defazajul undei provenite din M_1 față de unda provenită din O . Componentele vectorului $\vec{r} = \overrightarrow{OM_1}$ sunt $(x, y, 0)$, iar componentele (α, β, γ) ale lui \vec{u}_k sunt cosinuzii directori ai lui $\overrightarrow{O_2 M_2}$:

$$\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}}, \quad \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}}, \quad \gamma = \frac{f}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} \quad (8.5)$$

Pentru un unghi de difracție θ mic, adică studiind numai difracția pentru o deschidere D destul de mică, centrată în jurul punctului O , putem aproxima:

$$\alpha \approx \frac{X}{f}, \quad \beta \approx \frac{Y}{f}, \quad \gamma \approx \frac{f}{f} \approx 1 \quad (8.6)$$

Astfel:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{Xx}{f} + \frac{Yy}{f} \right) = 2\pi (ux + vy) \quad (8.7)$$

unde

$$u = \frac{X}{f\lambda}, \quad v = \frac{Y}{f\lambda} \quad (8.8)$$

se numesc frecvențe spațiale, deoarece se măsoară în m^{-1} .

Presupunând că $f(x, y)$ este diferită de zero numai în domeniul D , obținem:

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(ux + vy)} dx dy \quad (8.9)$$

Rezultă că $A(u, v)$ este transformata Fourier a lui $f(x, y)$. Astfel amplitudinea undei difractate se exprimă cu ajutorul transformatei Fourier a transparenței în amplitudine a deschiderii.

Pentru a simplifica scrierea, vom considera o singură variabilă x și variabila asociată

$$u = \frac{X}{f \lambda} \quad (8.10)$$

Astfel expresia (8.9) devine:

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i 2\pi u x} dx \equiv A(u) = T \cdot F[f(x)] \quad (8.11)$$

Transformata Fourier inversă este:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \cdot e^{i 2\pi u x} du \equiv f(x) = T \cdot F^{-1}[A(u)] \quad (8.12)$$

Relațiile (8.11) și (8.12) sunt asemănătoare cu perechile de transformate Fourier întâlnite în analiza armonică (spectrală) (vezi FIZICA vol. I):

$$X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i 2\pi v t} dt \quad (8.11')$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v) \cdot e^{i 2\pi v t} dv \quad (8.12')$$

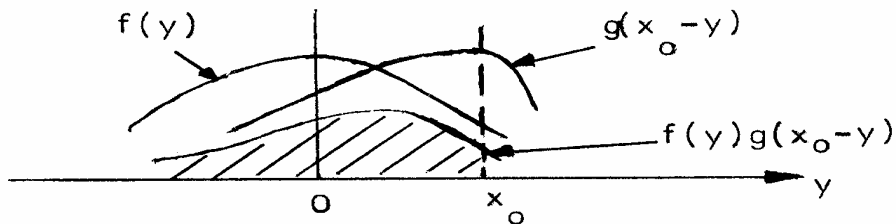
Se definește produsul de convoluție pentru două funcții $f(x)$ și $g(x)$ și se notează cu

$$h(x) = f(x) * g(x) \quad (8.13)$$

funcția

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \quad (8.14)$$

O ilustrare grafică a produsului de convoluție este prezentată mai jos.



Suprafața hașurată are valoarea:

$$h(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x_0 - y) dy \quad (8.15)$$

Când x_0 ia toate valorile posibile de la $-\infty$ la $+\infty$ se obține funcția $h(x)$.

Considerăm funcția $g(x)$ de forma relației (8.12):

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{i 2\pi u x} du \quad (8.16)$$

Deci:

$$g(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{i 2\pi u (x-y)} du \quad (8.17)$$

Înlocuind (8.17) în (8.14) obținem:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{i 2\pi u (x-y)} du dy \quad (8.18)$$

Inversând ordinea de integrare, obținem:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{i2\pi u x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-i2\pi u y} dy du \quad (8.19)$$

Dacă în relația (8.11) schimbăm variabila x cu y rezultă:

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-i2\pi u y} dy \quad (8.20)$$

Ultima integrală din (8.19) fiind $A(u)$ din (8.20) rezultă:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u)G(u) \cdot e^{i2\pi u x} du \equiv h(x) = T \cdot F^{-1} [AG] \quad (8.21)$$

Transformata Fourier inversă este:

$$A(u)G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot e^{-i2\pi u x} dx \equiv A(u)G(u) = T \cdot F [h(x)] = T \cdot F [h(x) * g(x)] \quad (8.22)$$

Se definește autocorelația funcției $f(x)$ și se notează cu

$$c(x) = f(x) \otimes f(x) \quad (8.23)$$

produsul de convoluție

$$c(x) = f(x) * f^*(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f^*(y-x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(y)f(y+x)dy \quad (8.24)$$

Datorită proprietății (8.22) putem scrie:

$$T \cdot F [f(x) * f^*(-x)] = T \cdot F [f(x)] \cdot T \cdot F [f^*(-x)] \stackrel{(8.11)}{=} A(u) \cdot T \cdot F [f^*(-x)] \quad (8.25)$$

Conform definiției transformatei Fourier, putem scrie:

$$\begin{aligned} T \cdot F [f^*(-x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-x) \cdot e^{-i2\pi u x} dx \stackrel{(x \rightarrow -x)}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} f^*(x) \cdot e^{i2\pi u x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \cdot e^{i2\pi u x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)e^{-i2\pi u x}]^* dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi u x} dx \right]^* \stackrel{(8.11)}{=} A^*(u) \end{aligned}$$

Astfel relația (8.25) devine:

$$T \cdot F c(x) = A(u) \cdot A^*(u) = |A(u)|^2 \quad (8.26)$$

Deoarece intensitatea luminii este

$$I(u, v) = A(u, v) \cdot A^*(u, v) \quad (8.27)$$

(în cazul unidimensional

$$I(u) = A(u) \cdot A^*(u) = |A(u)|^2 \quad (8.28))$$

rezultă că intensitatea luminii difractate se determină luând transformata Fourier a funcției de autocorelație

$$I(u) = T \cdot F [c(x)] = T \cdot F [f(x) * f^*(-x)] = |A(u)|^2 \quad (8.29)$$

Pentru funcții de putere finită funcția de autocorelație se definește astfel:

$$c(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)f^*(y-x)dy = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(y)f(y+x)dy \quad (8.30)$$

care este analoagă funcției de autocorelație întâlnite la analiza spectrală

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) x_T(t + \tau) dt \quad (8.30')$$

Produsul de convoluție al unei funcții $f(x)$ cu funcția lui Dirac $\delta(x)$ lasă funcția neschimbată

$$\underline{f(x) * \delta(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x - y) dy = \underline{f(x)} \quad (8.31)$$

deoarece $\delta(x - y)$ este nulă peste tot în afară de cazul $x = y$. Transformata Fourier a relației (8.31) este:

$$\begin{aligned} T \cdot F[f(x) * \delta(x)] &= T \cdot F[f(x)] \Rightarrow A(u) \cdot T \cdot F[\delta(x)] = A(u) \Rightarrow \\ T \cdot F[\delta(x)] &= 1 \end{aligned} \quad (8.32)$$

Convoluția lui $f(x)$ cu $\delta(x - a)$ este

$$f(x) * \delta(x - a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta[(x - a) - y] dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta[y - (x - a)] dy \quad (8.33)$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \alpha) dx = f(\alpha) \quad (8.34)$$

Rezultă

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a) \quad (8.35)$$

Pe baza relației (8.32) putem scrie:

$$T \cdot F^{-1}\{T \cdot F[\delta(x)]\} = T \cdot F^{-1}[1] \Rightarrow \delta(x) = T \cdot F^{-1}[1] \quad (8.36)$$

Din (8.12), (8.11) și (8.32) rezultă:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i 2\pi u x} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i 2\pi u x} du \quad (8.37)$$

Prin translație cu a rezultă:

$$\delta(x - a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i 2\pi u (x - a)} du = e^{-i 2\pi u a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i 2\pi u x} du \Rightarrow$$

$$\delta(x - a) = e^{-i 2\pi u a} \cdot \delta(x) \quad (8.38)$$

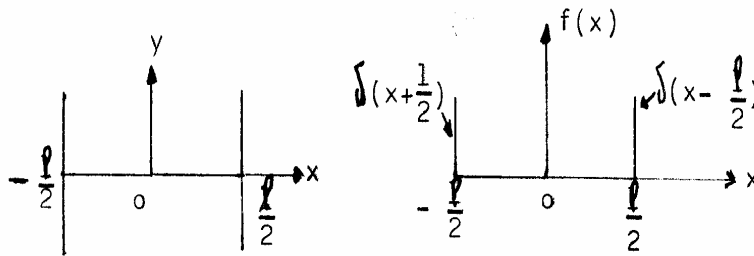
$$\underline{T \cdot F[\delta(x - a)]} = e^{-i 2\pi u a} \cdot T \cdot F[\delta(x)] \stackrel{(8.32)}{=} \underline{e^{-i 2\pi u a}} \quad (8.39)$$

La fel se arată că

$$T \cdot F[\delta(x + a)] = e^{i 2\pi u a} \quad (8.40)$$

În cazul unor fante Young infinitezimale, transparența în amplitudine a deschiderii este:

$$f(x) = \delta\left(x - \frac{\ell}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\ell}{2}\right) \quad (8.41)$$



Amplitudinea difractată pe ecran este:

$$\begin{aligned}
 A(u) &= T \cdot F[f(x)] = T \cdot F\left[\delta\left(x - \frac{\ell}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\ell}{2}\right)\right] = \\
 &= T \cdot F\left[\delta\left(x - \frac{\ell}{2}\right)\right] + T \cdot F\left[\delta\left(x + \frac{\ell}{2}\right)\right] \quad (8.39) \\
 &= e^{-i2\pi u \frac{\ell}{2}} + e^{i2\pi u \frac{\ell}{2}} = \\
 &= e^{-i\pi u \ell} + e^{i\pi u \ell} = 2 \cos \pi u \ell \quad (8.10) \\
 &= 2 \cos \frac{\pi X \ell}{f \lambda} \quad (8.42)
 \end{aligned}$$

Intensitatea unei difractate este:

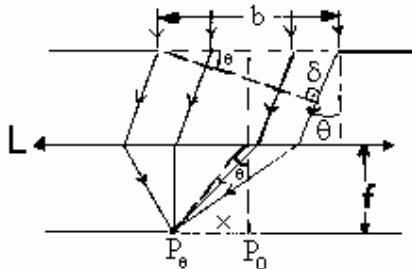
$$I(u) = |A(u)|^2 \Rightarrow I = 4 \cos^2 \frac{\pi X \ell}{f \lambda} \quad (8.43)$$

Această expresie este similară cu relația (6.66) obținută la studiul dispozitivului Young dacă $I_0 = 1$, $x \rightarrow X$, $D \rightarrow f$.

8.2. Difracția Fraunhofer printr-o fantă

Difracția Fraunhofer se referă la cazul în care unda incidentă și undele difractate pot fi considerate ca unde plane (neglijăm curbura fronturilor de undă). În acest caz variațiile distanței r dintre punctul de observare și punctele fronturilor de undă sunt foarte mici, $\delta r \leq 10 \lambda$.

Presupunem că pe un paravan opac, prevăzut cu o fantă de lungime mult mai mare decât lățimea sa b , cad unde plane sub incidență normală. Considerăm o direcție care după difracție face un unghi θ cu normala la fantă. Razele paralele ce pleacă de la fiecare punct al fantei ar interfera la infinit.



Punând în calea acestor raze o lentilă convergentă L , lumina difractată va fi focalizată în planul focal al lentilei. Între undele difractate la marginile fantei există o diferență de drum

$$\delta = b \sin \theta \quad (8.44)$$

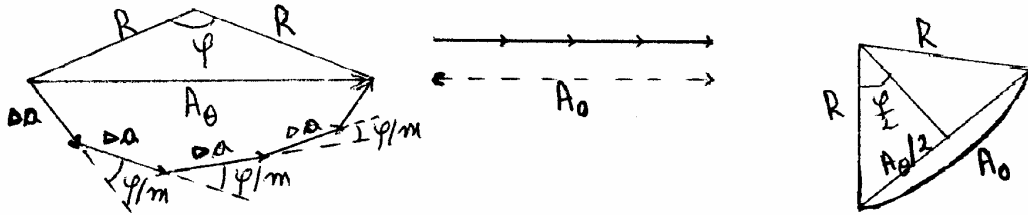
Împărțim fanta în m fâșii elementare de lățime b/m .

Între undele date de fâșiile marginale există o diferență de fază

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b \sin \theta \quad (8.45)$$

iar între două fâșii succesive diferența de fază este φ/m .

Pentru calculul distribuției intensității luminoase în figura de difracție folosim reprezentarea fazorială a lui Fresnel. Fiecare fâșie din suprafața undei care se află în lungul fantei va trimite în punctul P_θ , după direcția θ , un fascicul de amplitudine Δa care prezintă o diferență de fază φ/m față de fasciculele alăturate. Segmentul A_θ reprezintă amplitudinea undei rezultante în punctul P_θ . În cazul $\theta=0$ rezultă $\varphi/m=0$ și deci cele m segmente sunt în prelungire. În acest caz în punctul P_0 se obține amplitudinea A_0 a maximumului central. La limită, când numărul de fâșii m tinde către infinit, linia poligonală tinde către un arc de cerc.



Rezultă:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{A_\theta}{2}}{R} \Rightarrow A_\theta = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad (8.46)$$

$$A_0 = \lim_{\frac{\varphi}{m} \rightarrow 0} A_\theta \Rightarrow A_0 = R \varphi \quad (8.47)$$

Trecând la intensități obținem:

$$I_\theta = 4R^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (8.48)$$

$$I_0 = R^2 \varphi^2 \quad (8.49)$$

I_0 fiind intensitatea luminii care se propagă, de pe întreaga fantă, în direcția determinată de unghiul $\theta=0$. Se constată că intensitatea I_0 în punctul P_0 aflat pe axa de simetrie a sistemului este proporțională cu pătratul lățimii fantei:

$$I_0 = R^2 \varphi^2 \stackrel{(8.45)}{=} R^2 \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot b^2 \cdot \sin^2 \theta \text{ (aici } \theta \neq 0 \text{ deoarece am luat } \varphi \rightarrow 0 \text{ în (8.47))} \quad (8.45)$$

Eliminând R^2 între relațiile (8.48) și (8.49) rezultă:

$$I_\theta = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2} = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2 \quad (8.50)$$

Înlocuind $\varphi/2$ din (8.45) în (8.50) obținem:

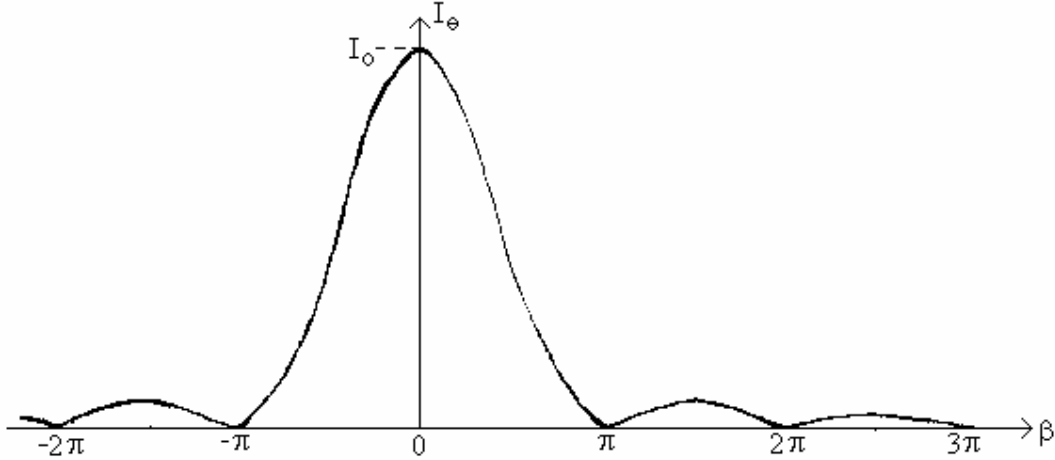
$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta} \right)^2 \quad (8.51)$$

Se constată că I_{θ} / I_0 variază periodic cu $\beta = \frac{\pi}{\lambda} b \cdot \sin \theta$ datorită funcției sinus de la numărător și scade monoton cu β datorită numitorului.

Pentru unghiuri θ suficient de mici $\text{tg } \theta \approx \sin \theta$ iar din figură rezultă:

$$\text{tg } \theta = \frac{X}{f} \Rightarrow \sin \theta = \frac{X}{f} \quad (8.52)$$

unde f este distanța focală a lentilei.

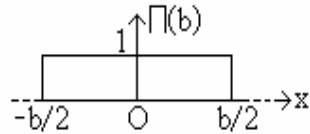


Astfel în figura de difracție vom avea maxime și minime succesive, intensitatea maximelor scăzând pe măsură ce X crește (datorită numitorului din (8.51)). Înlocuind $\sin \theta$ cu X/f în (8.51) obținem:

$$\frac{I_{\theta}}{I_0} = \left(\frac{\sin \frac{\pi b X}{\lambda f}}{\frac{\pi b X}{\lambda f}} \right)^2 \quad (8.53)$$

La aceeași relație putem ajunge luând transformata Fourier a unei funcții $\Pi(b)$ care simbolizează o fantă de lărgime b , unde

$$\Pi(b) = \begin{cases} 1; & -\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{b}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$



$$A(u) = T \cdot F[\Pi(b)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(b) \cdot e^{-i 2\pi u x} dx = \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i 2\pi u x} dx = b \cdot \frac{\sin(\pi u b)}{\pi u b},$$

$$u = \frac{X}{f\lambda} \Rightarrow A(x) = b \cdot \frac{\sin \frac{\pi X b}{f\lambda}}{\frac{\pi X b}{f\lambda}} \quad (8.54)$$

$$I = |A(x)|^2 \Rightarrow I = b^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi X b}{f\lambda}}{\frac{\pi X b}{f\lambda}} \right)^2 \quad (8.55)$$

Comparând această relație cu (8.53) se constată că $I_0 \approx b^2$ (nu putem pune semnul egal pentru că I_0 și b au dimensiuni diferite).

Din relațiile (8.51) și (8.53) se constată că pentru $\beta=0$ ($X=0$) se obține maximum de ordinul zero, care definește intensitatea pe axa de simetrie în punctul P_0 , $I = I_0$. Am

folosit faptul că $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1$.

Minimele nule pentru intensitatea unei difractate apar pentru

$$\beta = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta = \pm n\pi \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \pm \frac{n\lambda}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.56)$$

Primul minim apare pentru $n = 1$,

$$\sin \theta \approx \theta = \pm \frac{\lambda}{b} \quad (8.57)$$

așa că lățimea unghiulară a figurii de difracție este invers proporțională cu lățimea fantei b .

Maximele secundare se obțin din

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) = \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \text{tg } \beta = \beta$$

(ecuație transcendentă care se rezolvă grafic). Rezultă:

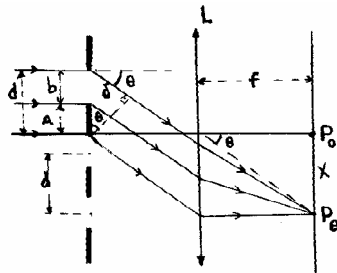
$$\beta = 0 \text{ (maxim principal)} ; \quad \beta = 1,43\pi ; 2,46\pi , \dots \text{ (maxime secundare)}$$

Maximumul central este de două ori mai lat decât maximele secundare și astfel cea mai mare parte a energiei unei difractate este concentrată în maximum de ordinul zero.

Dacă experiența de difracție se face cu lumină albă, atunci în mijlocul figurii de difracție se obține alb, iar lângă franja centrală se obțin radiațiile cu lungimi de undă mici (violet).

8.3. Reteaua de difracție

O rețea de difracție plană este formată din N fante de lățime b echidistante (distanța dintre două fante consecutive se notează cu a). Prima rețea de calitate a fost construită de H. A. Rowland în anul 1882 trasând pe o lamă de sticlă, cu ajutorul unui diamant, linii echidistante. Urma trasată de diamant difuzează lumina, constituind o zonă opacă, iar spațiul dintre două urme succesive este transparent, jucând rolul unei fante. În prezent se obțin rețele de foarte bună calitate pe baza interferenței a două unde plane (se obțin rețele holografice a căror perioadă spațială $d = a + b$, numită constanta rețelei, este egală cu interfranja). Pentru o rețea cu 1000 trăsături / cm distanța d este de $10 \mu\text{m}$.



Diferența de drum între fasciculele care trec prin două fante vecine este:

$$\delta = d \cdot \sin \theta \quad (8.58)$$

iar diferența de fază corespunzătoare este

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta \quad (8.59)$$

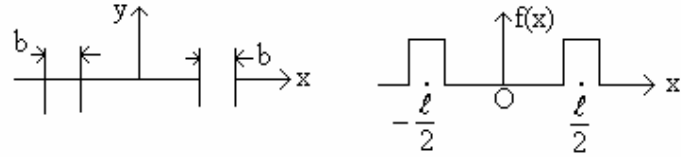
Împărțim fiecare fantă în fâșii elementare. Deoarece diferența de drum (faza) dintre fâșii omoloage de la două fante succesive este

constantă, rezultă că undele care provin de la fâșiile omoloage ale celor N fante sunt coerente și deci vor interfera. Avem de analizat interferența a N fascicule multiple.

$$I_{\theta} = I_{10} \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 \quad (8.51) \quad I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right)} \right)^2 \quad (8.60)$$

unde I_{10} este intensitatea luminii difractate de o fantă de lățime b .

Cazul $N = 2$ corespunde unor fante Young de dimensiuni finite.



$$f(x) = \prod(b) * \left[\delta \left(x - \frac{\ell}{2} \right) + \delta \left(x + \frac{\ell}{2} \right) \right] \quad (8.61)$$

$$A(u) = T \cdot F[f(x)] \stackrel{(8.54)}{=} b \cdot \frac{\sin(\pi u b)}{\pi u b} \cdot 2 \cos(\pi u \ell) \quad (8.62)$$

$$I(u) = |A(u)|^2 = 4b^2 \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 \pi u b}{(\pi u b)^2}}_{\text{difracție pe o fantă de lățime } b} \cdot \underbrace{\cos^2 \pi u \ell}_{\text{interferența undelor ce provin de la cele două fante}}$$

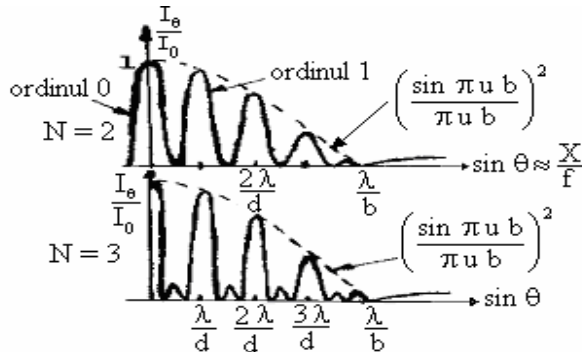
interferența undelor ce provin de la cele două fante

Pentru $N = 3$ (trei fante identice) se obține:

$$f(x) = \prod(b) * \left[\delta(x) + \delta \left(x - \frac{d}{2} \right) + \delta \left(x + \frac{d}{2} \right) \right] , \quad T \cdot F[\delta(x)] = 1 ,$$

$$A(u) = b \cdot \frac{\sin(\pi u b)}{\pi u b} \left[1 + e^{-i \pi u d} + e^{i \pi u d} \right] = b \cdot \frac{\sin(\pi u b)}{\pi u b} \left[1 + 2 \cos(\pi u d) \right] \quad (8.64)$$

Reprezentarea grafică a intensității pentru cazurile particulare $N = 2$, $N = 3$ și $N = 5$ este următoarea:



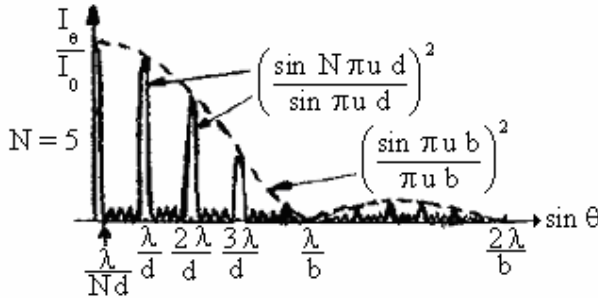
$$u = \frac{X}{\lambda f} \Rightarrow$$

$$\sin \theta \approx \frac{X}{f}$$

$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \theta = \frac{\pi b X}{\lambda f} = \pi u b$$

$$\frac{N \pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta = \frac{N \pi d X}{\lambda f} = N \pi u d$$

$$(8.65)$$



$$\frac{I_{\theta}}{I_0} = \left(\frac{\sin \pi u b}{\pi u b} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N \pi u d}{\sin \pi u d} \right)^2 \quad (8.66)$$

Se constată că intensitatea corespunzătoare interferenței multiple este modulată de factorul corespunzător difracției pe o fantă de lățime b (factorul de modulare este același, indiferent de valoarea lui N). Pe măsură ce N crește, lărgimea picurilor de interferență scade, poziția acestor picuri rămânând neschimbată. Factorul modulator are ca efect scăderea intensității maximelor principale odată cu depărtarea de maximul principal central (de ordinul 0).

Pentru

$$\varphi = \pm 2 m \pi ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.67) \equiv (6.90)$$

se obțin maximele principale de interferență (φ din (8.59) corespunde undelor care provin de la două fante vecine). Egalând φ din (8.59) cu φ din (8.67) obținem:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta = \pm 2 m \pi \Rightarrow \boxed{\sin \theta = \pm \frac{m \lambda}{d} ; \quad m = 0, 1, 2, \dots} \quad (8.68)$$

Diferența de drum corespunzătoare maximelor principale se obține din (8.58) și (8.68):

$$d \cdot \sin \theta = \pm m \lambda ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.69)$$

Am analizat cazul incidenței normale. În cazul incidenței oblice, în locul relației (8.69) vom scrie:

$$d (\sin \theta - \sin \theta_0) = \pm m \lambda ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.70)$$

unde θ_0 este unghiul format de razele incidente cu normala la rețea. Pentru $m = 0$ avem maximul principal de interferență de ordinul zero, pentru $m = 1$ avem maximul principal de interferență de ordinul 1 ($\sin \theta_1 = \lambda/d$), pentru $m = 2$ avem maximul de ordinul 2 ($\sin \theta_2 = 2 \lambda/d$) etc. În acest caz, conform relației (6.91) avem:

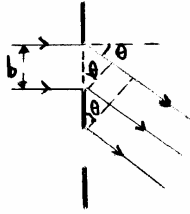
$$\left(\frac{\sin \frac{N \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sin \left(\frac{N \pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right)} \right)^2 = \left(\frac{\sin(N \pi u d)}{\sin(\pi u d)} \right)^2 = N^2 \quad (8.71)$$

Din (8.60), (8.68) și (8.71) obținem expresia intensității maximului principal de ordinul m .

$$I_m = N^2 I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \sin \theta} \right)^2 = N^2 I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi m b}{d} \right)}{\frac{\pi m b}{d}} \right)^2 \quad (8.72)$$

Minimele nule ale intensității undei difractate de una din fantele de lățime b ale rețelei apar pentru

$$\sin\theta = \pm \frac{n\lambda}{b} ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.73) \equiv (8.56)$$



Din (8.68) și (8.73) obținem:

$$\frac{m\lambda}{d} = \frac{n\lambda}{b} ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$\frac{mb}{d} = n ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.74)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi m b}{d}\right) = \sin(\pi n) = 0 \Rightarrow$$

$$I_m = 0 ; \quad m = n \cdot \frac{d}{b} , \quad n = \text{întreg} \quad (8.75)$$

Relația (8.74) putea fi obținută în sens invers, pornind de la (8.75). Se constată că din mulțimea valorilor posibile ale lui \$m\$ și \$n\$, (\$m = 0, 1, 2, \dots\$; \$n = 1, 2, 3, \dots\$) avem numai câteva valori ale lui \$m\$ și \$n\$ care satisfac relația (8.74) și respectă condiția fizică de existență a rețelei. Astfel \$m = 0\$ ar duce la \$n = 0\$ sau la \$d = 0\$; \$m = 1, n = 1\$ ar duce la \$d = b\$ (situații absurde, întrucât ar însemna fie să nu avem rețea, fie să nu fie respectate valorile posibile ale lui \$m\$). În cazul particular \$d/b = 4\$ rezultă \$m = 4n\$, astfel că pentru \$m = 4, 8, 12, \dots\$ intensitatea maximului principal este zero.

Întrucât \$\sin \theta \le 1\$, din relațiile (8.68) și (8.73) rezultă că putem observa maximele principale de interferență și minimele de difracție dacă \$\lambda < d\$, respectiv \$\lambda < b\$. Pentru o rețea cu 1000 trăsături / cm și \$b = 2,5 \cdot 10^{-2}\$ cm pe care cade o radiație cu \$\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5}\$ cm, obținem \$d = \frac{1}{1000}\$ cm \$= 10^{-3}\$ cm, \$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = 0,05 m\$; \$m = 0, 1, 2, \dots, 20\$; \$m = \frac{d}{b} \cdot n = 4n\$; \$n = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow I_m = 0\$ pentru \$m = 4, 8, 12, 16, 20\$.

Între maximele principale avem \$N-1\$ minime și \$N-2\$ maxime secundare. Poziția maximelor secundare se determină din relațiile (6.93) și (8.59):

$$\varphi \approx (2\ell + 1)\frac{\pi}{n} ; \quad \ell = 1, 2, 3, \dots ; \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta \Rightarrow$$

$$(2\ell + 1)\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{(2\ell + 1)\lambda}{2Nd} , \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (8.76)$$

Poziția minimelor de interferență se obține pe baza relațiilor (6.92) și (8.59):

$$\varphi = 2\ell\pi / N ; \quad \ell = 1, 2, 3, \dots (\ell \neq mN) ; \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{2\ell\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda\ell}{Nd} , \quad \ell = 1, 2, 3, \dots (\ell \neq mN) \quad (8.77)$$

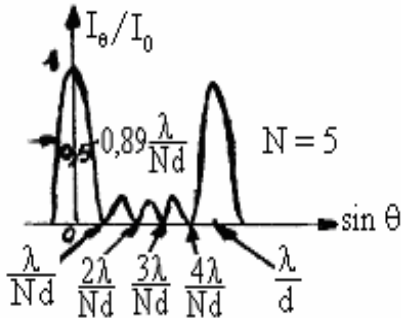
Pentru \$\ell = 1\$ avem primul minim de interferență (\$\sin \theta = \frac{\lambda}{Nd}\$).

Lărgimea totală la semiînălțime a maximului principal se obține pe baza relației (6.89) în care se impune condiția \$I = I_{\max} / 2\$, iar \$\varphi\$ se scrie sub forma \$\varphi = 2m\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2}\$.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2, \quad I_{\max} = N^2 I_0; \quad I = \frac{I_{\max}}{2}, \quad \varphi = 2m\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2},$$

$$\frac{\varphi}{2} = m\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4}, \quad \frac{N\varphi}{2} = Nm\pi \pm \frac{N\Delta\varphi_{1/2}}{4} \Rightarrow I_0 \left[\frac{\sin \left(Nm\pi \pm \frac{N\Delta\varphi_{1/2}}{4} \right)}{\sin \left(m\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4} \right)} \right]^2 = \frac{N^2 I_0}{2} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\sin Nm\pi \cos \frac{N\Delta\varphi_{1/2}}{4} \pm \sin \frac{N\Delta\varphi_{1/2}}{4} \cdot \overbrace{\cos Nm\pi}^{=\pm 1}}{\sin m\pi \cos \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4} \pm \sin \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4} \cdot \overbrace{\cos m\pi}^{=\pm 1}} \right]^2 = \frac{N^2}{2} \Rightarrow$$



$$\left(\frac{\sin \frac{N\Delta\varphi_{1/2}}{4}}{\sin \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4}} \right)^2 = \frac{N^2}{2} \quad (8.78)$$

Soluția numerică a acestei ecuații este:

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{5,5}{N} \quad (8.79)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \stackrel{(8.59)}{=} \frac{2\pi d}{\lambda} \Delta(\sin\theta)_{1/2} \stackrel{(8.79)}{=} \frac{5,5}{N} \Rightarrow \Delta(\sin\theta)_{\frac{1}{2}} \approx 0,89 \frac{\lambda}{Nd} \quad (8.80)$$

Se constată că lărgimea totală la semiînălțime a maximului principal scade dacă N crește. Astfel pe măsură ce numărul de trăsături N crește maximele secundare devin tot mai mici, iar maximele principale sunt mai luminoase și mai fine. Alegând în mod convenabil parametrii unei rețele de difracție, putem face ca scăderea intensității maximelor principale odată cu depărtarea de maximul principal central să fie lentă.

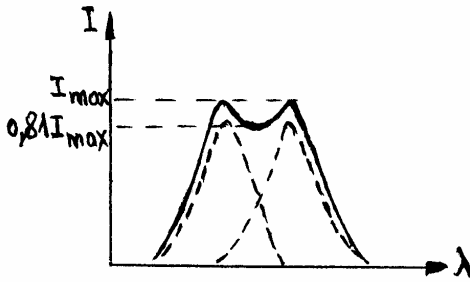
Rețelele de difracție sunt folosite pentru separarea liniilor spectrale emise de atomi sau de molecule. Presupunem că pe o rețea cad două unde monocromatice, cu lungimile de undă λ și $\lambda + \delta\lambda$. Fiecare radiație va genera un sistem propriu de franje. Dacă maximul principal corespunzător lungimii de undă $\lambda + \delta\lambda$ coincide cu primul minim al radiației cu lungimea de undă λ , atunci cele două componente sunt separate. Această afirmație constituie criteriul lui Rayleigh (două componente de intensități egale se consideră rezolvate dacă maximul principal de difracție al uneia coincide cu primul minim al celeilalte).

Poziția maximului principal de ordinul m pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda + \delta\lambda$ este dată de relația:

$$\sin(\theta + \delta\theta) = m \cdot \frac{\lambda + \Delta\lambda}{d} \quad (8.81)$$

Pentru radiația cu lungimea de undă λ , primul minim alăturat maximului de ordinul m trebuie să corespundă aceluiași unghi $\theta + \delta\theta$, în conformitate cu criteriul lui Rayleigh:

$$\sin(\theta + \delta\theta) = \frac{m\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} \quad (8.82)$$



(din relația (8.77) pentru $\ell = 1$ am obținut poziția primului minim de interferență ($\sin\theta = \frac{\lambda}{Nd}$) de după maximumul principal de ordinul zero). Din (8.81) și (8.82) obținem:

$$m \cdot \delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow P = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \quad (8.83)$$

Se constată că puterea de rezoluție P este proporțională cu ordinul spectrului m și cu numărul total de fante ale rețelei. Din (8.68) rezultă valoarea maximă a ordinului de difracție:

$$m_{\max} = \left(\frac{d \cdot \sin\theta}{\lambda} \right)_{\max} = \frac{d}{\lambda} \quad (8.84)$$

Valoarea maximă a puterii de rezoluție va fi:

$$P_{\max} = m_{\max} \cdot N = \frac{dN}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} \quad (8.85)$$

unde $L = Nd$ este distanța pe care sunt trasate cele N trăsături ale rețelei. Pentru $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, $L = 10 \text{ cm}$ se obține o putere de rezoluție de $2 \cdot 10^5$. Puterea de rezoluție caracterizează capacitatea unui aparat optic de a separa două imagini (sau două linii spectrale) apropiate (imaginile diferitelor puncte ale unui obiect, date de un instrument optic, sunt în realitate figuri de difracție).

Diferențiind relația (8.68) obținem dispersia unghiulară D :

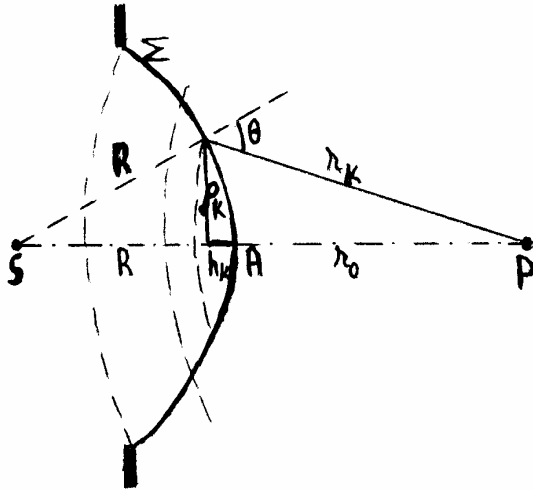
$$d \cdot \cos\theta d\theta = m \cdot d\lambda \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos\theta} = \frac{m}{d \sqrt{1 - \frac{m^2 \lambda^2}{d^2}}} \quad (8.86)$$

care caracterizează gradul de extindere a spectrului în jurul unei anumite lungimi de undă. D este mare pentru m mare și d mic. Undele cu λ mare sunt mai puternic dispersate decât cele cu λ mic (invers ca la o prismă).

8.4. Difracția Fresnel

Difracția Fresnel are loc atunci când variațiile distanței r dintre punctul de observare și punctele fronturilor de undă sunt mari ($\delta r \geq 1000 \lambda$).

Fie Σ poziția instantanee a unui front de undă sferică de rază R care provine de la sursa punctiformă S și P punctul în care analizăm difracția pe un orificiu circular de rază ρ practicat într-un paravan. Pentru simplificarea calculului se folosește așa numita construcție zonală a lui Fresnel. Se trasează diferite secțiuni de sfere cu centrul în punctul de observație P , de raze $r_0, r_0 + \frac{\lambda}{2}, \dots, r_0 + \frac{m\lambda}{2}$ unde $r_0 = SA$, A fiind punctul de intersecție al dreptei SP cu frontul de undă Σ . Sferele construite divid frontul de undă sferic Σ în zone sferice (zone Fresnel) cu ariile: $\Delta\Sigma_1, \Delta\Sigma_2, \dots, \Delta\Sigma_m$.



Dacă R și r_0 sunt mult mai mari decât λ se poate considera că factorul de înclinare Q nu variază în interiorul aceleiași zone (Fresnel presupune că toate sursele ce se găsesc pe o anumită zonă trimit unde care sosesc în fază în punctul P). Alegerea razelor sferelor construite face ca undele care provin de la zone adiacente să ajungă în P în opoziție de fază. Amplitudinea unei unde care ajunge în P de la o zonă k oarecare este dependentă de suprafața zonei, de distanța r_k de la zonă la punctul P și de unghiul de înclinare θ dintre r_k și normala la suprafața zonei.

Calculul ariei zonei Fresnel de ordinul k se face astfel:

$$r_k - r_{k-1} = \frac{\lambda}{2}, r_k = r_0 + k \frac{\lambda}{2}, r_k^2 = r_0^2 + r_0 k \lambda + \frac{k^2 \lambda^2}{4} \Rightarrow$$

$$r_k^2 - r_0^2 = r_0 k \lambda \quad (8.87)$$

$$R^2 = (R - h_k)^2 + \rho_k^2, r_k^2 = \rho_k^2 + (h_k + r_0)^2 \Rightarrow r_k^2 - h_k^2 - 2 h_k r_0 - r_0^2 =$$

$$= R^2 - R^2 + 2 R h_k - h_k^2 \Rightarrow r_k^2 - r_0^2 = 2 h_k (r_0 + h_k) \Rightarrow$$

$$h_k = \frac{r_k^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} \quad (8.88)$$

Din (8.87) și (8.88) obținem:

$$h_k = \frac{r_0 k \lambda}{2(R + r_0)} \quad (8.89)$$

Înălțimea H_k a zonei k este:

$$H_k = h_k - h_{k-1} = \frac{r_0 \lambda}{2(R + r_0)} [k - (k - 1)] \Rightarrow H_k = \frac{r_0 \lambda}{2(R + r_0)} \quad (8.90)$$

Suprafața $\Delta \Sigma_k$ a zonei k este:

$$\Delta \Sigma_k = 2 \pi R H_k = \frac{\pi R r_0 \lambda}{R + r_0} \quad (8.91)$$

Se constată că aria unei zone Fresnel nu este dependentă de ordinul ei, adică ariile tuturor zonelor Fresnel sunt egale între ele. Odată cu creșterea ordinului k al zonei, crește distanța r_k , dar și unghiul θ . Conform relației (8.1) rezultă că amplitudinile E_k scad atunci când crește ordinul zonei, adică

$$E_1 > E_2 > E_3 > \dots > E_k > \dots > E_m \quad (8.92)$$

În cazul în care nu există paravanul cu apertură, valoarea absolută a amplitudinii undei rezultante în P este:

$$\left| E_p \right|_{\infty} = \left| E_1 \right| - \left| E_2 \right| + \left| E_3 \right| - \left| E_4 \right| + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left| E_k \right| \quad (8.93)$$

alternarea semnelor datorându-se faptului că diferența de drum de $\lambda/2$ corespunde unei diferențe de fază egale cu π radiani ($e^{i\pi} = -1$). Variația factorului de înclinare $Q(\theta)$ fiind lentă, la fel ca și cea a distanței r_k , putem considera că amplitudinea corespunzătoare unei zone Fresnel este egală cu media aritmetică a amplitudinilor provenite de la cele două zone adiacente. Astfel relația (8.93) se pune sub forma:

$$\left| E_p \right|_{\infty} = \frac{1}{2} \left| E_1 \right| + \left(\frac{1}{2} \left| E_1 \right| - \left| E_2 \right| + \frac{1}{2} \left| E_3 \right| \right) + \left(\frac{1}{2} \left| E_3 \right| - \left| E_4 \right| + \frac{1}{2} \left| E_5 \right| \right) + \dots \quad (8.94)$$

Conform ipotezei făcute, parantezele sunt nule, iar $\left| E_m \right| \rightarrow 0$ pentru $m \rightarrow \infty$. Rezultă:

$$\left| E_p \right|_{\infty} = \frac{1}{2} \left| E_1 \right| \quad \Rightarrow \quad I_{p\infty} = \frac{1}{4} \cdot I_1 \quad (8.95)$$

În acest caz intensitatea totală a undei în punctul de observație P este egală numai cu un sfert din intensitatea I_1 dată de zona centrală, obținută cu o deschidere care lasă neacoperită numai zona centrală. Acest lucru se explică prin redistribuirea spațială a intensității datorită difracției.

Dacă numărul de zone neobturate este finit, atunci în locul relațiilor (8.95) avem:

$$\left| E_p \right| = \frac{1}{2} \left(\left| E_1 \right| \pm \left| E_m \right| \right), \quad I_p \sim \left| E_p \right|^2 \quad (8.96)$$

unde semnul + se ia pentru m impar, iar semnul - pentru m par.

Astfel pentru $m = 3$ rezultă:

$$\left| E_p \right| = \frac{1}{2} \left| E_1 \right| + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \left| E_1 \right| - \left| E_2 \right| + \frac{1}{2} \left| E_3 \right| \right)}_{=0} + \frac{1}{2} \left| E_3 \right| = \frac{1}{2} \left(\left| E_1 \right| + \left| E_3 \right| \right)$$

iar pentru $m = 4$ avem:

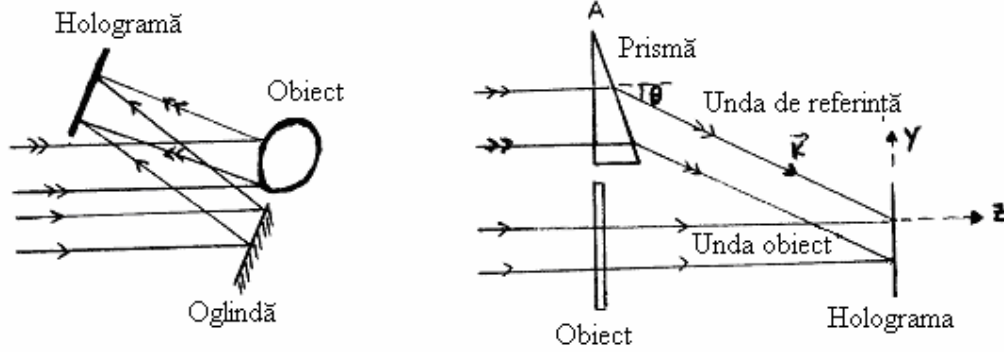
$$\left| E_p \right| = \frac{1}{2} \left| E_1 \right| + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \left| E_1 \right| - \left| E_2 \right| + \frac{1}{2} \left| E_3 \right| \right)}_{=0} + \frac{1}{2} \left(\left| E_3 \right| - \left| E_4 \right| \right) = \frac{1}{2} \left| E_1 \right| - \frac{1}{2} \left| E_4 \right|$$

Când numărul zonelor descoperite este par undele care se suprapun în punctul P se anulează reciproc, obținându-se un minim, în timp ce pentru un număr impar de zone neacoperite se obține un maxim de difracție.

8.5. Holografie

Prin holografie se înțelege procedeul de obținere a unei imagini tridimensionale identice cu obiectul. Acest procedeu cuprinde două etape: înregistrarea și reconstituirea.

Înregistrarea hologramei constă în fotografierea unei figuri de interferență între o undă care provine de la un obiect și o undă de referință coerentă cu prima. Pentru a îndeplini condiția de coerență se folosește un fascicul de radiație laser. O parte a fascicului este difuzată de obiect (sau transmisă de obiect) constituind așa numita undă obiect, iar cealaltă parte a undei monocromatice emise de laser este reflectată de o oglindă (sau refractată de o prismă al cărei unghi A este foarte mic) și reprezintă unda de referință. Cele două unde interferă pe o placă fotografică. După dezvoltare se obține holograma, care nu are nici o asemănare cu obiectul. Fiecare porțiune din hologramă, primind lumina de la diferite puncte ale obiectului, conține înregistrate într-o formă codificată informații despre întregul obiect. Astfel pentru obținerea imaginii obiectului nu este necesară întreaga hologramă.



Holograma conține informații privind intensitatea și faza undei obiect. La o fotografie obișnuită se înregistrează numai intensitatea undei provenite de la obiect, informația conținută în fază fiind pierdută. Informația privind intensitatea apare în contrastul franjelor de interferență, întrucât gradul de impresionare a plăcii fotografice este proporțional cu intensitatea undei. Informația asupra fazei undei obiect apare în distanța relativă dintre franje, defazajul determinând direcția formării maximelor de interferență.

Unda plană de referință are amplitudinea:

$$E_R = E_{0R} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_R)} \quad (8.97)$$

iar unda obiect:

$$E_O = E_{0O} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_O)} \quad (8.98)$$

Intensitatea câmpului electric rezultat este:

$$E = E_R + E_O = e^{i\omega t} \left(e^{-i\varphi_R} \cdot E_{0R} + e^{-i\varphi_O} \cdot E_{0O} \right) \quad (8.99)$$

Intensitatea undei rezultante pe placa fotografică este:

$$I = E^* E = E_{0R}^2 + E_{0O}^2 + E_{0R} E_{0O} \left[e^{i(\varphi_O - \varphi_R)} + e^{-i(\varphi_O - \varphi_R)} \right] \quad (8.100)$$

sau:

$$I = I_R + I_O + 2\sqrt{I_R I_O} \cdot \cos(\varphi_O - \varphi_R), \quad I_R = E_{0R}^2, \quad I_O = E_{0O}^2 \quad (8.101)$$

unde am folosit formula trigonometrică $(e^{ix} + e^{-ix})/2 = \cos x$.

În cazul hologramei obținute prin transmisie, faza undei de referință în planul $z = 0$ este:

$$\varphi_R = \vec{k} \cdot \vec{r} = \left(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{=0} \cos \theta - \vec{j} \cdot \vec{k} \cdot \sin \theta \right) \left(y \cdot \vec{j} + \underbrace{z \cdot \vec{k}}_{=0} \right) = -k y \sin \theta = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin \theta \quad (8.102)$$

Pentru reconstituirea undei obiect se așează holograma în același loc ca la expunere și se iluminează cu unda de referință de la același laser. Privind prin hologramă vedem imaginea virtuală a obiectului în locul în care s-a aflat obiectul în momentul înregistrării. Observatorul vede prin hologramă ca printr-un geam fumuriu. Pe lângă imaginea virtuală se poate obține și imaginea reală.

Coeficientul de transmisie în amplitudine al hologramei este dependent de intensitatea undei I din (8.101) prin relația:

$$t = C \cdot I \quad (8.103)$$

unde C este o constantă de proporționalitate. Această relație nu este riguroasă, dar este utilă pentru a explica procedura de reconstrucție a unei obiect. Iluminând holograma cu o undă analogă undei de referință se obține o undă emergentă de amplitudine $t \cdot E_R$:

$$t \cdot E_R = C \cdot I \cdot E_R = C \cdot E_R \left(I_R + I_O + E_O^* \cdot E_R + E_O \cdot E_R^* \right) \quad (8.104)$$

sau:

$$t \cdot E_R = C \cdot I_O \cdot E_R + C \cdot I_R \cdot E_R + C \cdot E_O^* \cdot E_R^2 + C \cdot E_O \cdot |E_R|^2 \quad (8.105)$$

Primii doi termeni $C(I_R + I_O)E_R$ reprezintă, până la factorul constant $C(I_R + I_O)$, unda transmisă direct prin hologramă. Ultimul termen $C E_O |E_R|^2$ reprezintă, până la factorul $C \cdot |E_R|^2$, unda obiect completă (include atât amplitudinea E_{O0} cât și faza φ_O). Penultimul termen $C \cdot E_O^* \cdot E_R^2$ reprezintă o undă asemănătoare cu unda obiect, datorită proporționalității cu E_O^* .

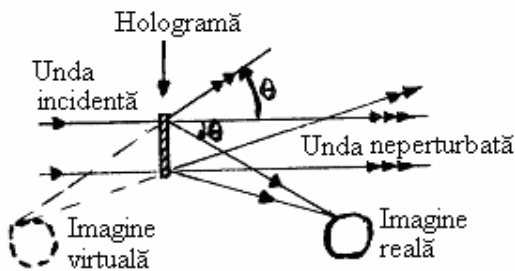
În cazul în care holograma este iluminată cu o undă plană uniformă, incidentă normal,

$$E_N = E_{0N} \cdot e^{i(\omega t - k_N z)} \Big|_{z=0} = E_{0N} \cdot e^{i\omega t} \quad (8.106)$$

atunci unda transmisă prin holograma dezvoltată are amplitudinea:

$$\begin{aligned} t \cdot E_N &= C \cdot I \cdot E_N = C E_N \left[I_R + I_O + E_{0R} E_{0O} \left(e^{i(\varphi_O - \varphi_R)} + e^{-i(\varphi_O - \varphi_R)} \right) \right] = \\ &= C(I_R + I_O) E_{0N} e^{i\omega t} + C E_{0O} E_{0R} E_{0N} \left(e^{i(\omega t + \varphi_O - \varphi_R)} + e^{i(\omega t - \varphi_O + \varphi_R)} \right) \end{aligned} \quad (8.107)$$

Primul termen $C(I_R + I_O) E_{0N} e^{i\omega t}$ reprezintă, până la un factor constant, unda plană uniformă incidentă normal pe hologramă. Termenul al doilea $C E_{0O} E_{0R} E_{0N} e^{i(\omega t + \varphi_O - \varphi_R)}$ reprezintă, până la factorul $C E_{0O} E_{0N}$, dacă faza undei obiect este neglijabilă, unda de referință (8.97) unde φ_R are expresia (8.102). Acest termen explică formarea imaginii reale a obiectului. Ultimul termen din (8.107), având faza $\omega t - \varphi_O + \varphi_R = \omega t - \varphi_O - ky \sin\theta \approx \omega t - ky \sin\theta$ explică formarea imaginii virtuale a obiectului.



Reconstituirea (reconstrucția) este necesară, întrucât holograma nu seamănă cu obiectul. Am presupus că holograma este pozitivul unei plăci fotografice. Dacă se folosește negativul plăcii fotografice, în locul relației (8.103) vom pune $t = C' - I$, unde C' este o constantă (în cazul hologramei pozitive, în urma dezvoltării, argintul din halogenura de argint a emulsiei fotografice se

reduce la starea metalică, iar cantitatea de metal redus este proporțională cu intensitatea luminii incidente, transparența plăcii fiind mai mare acolo unde intensitatea undei a fost mai mare).

Se pot obține și holograme color, iluminând obiectul cu trei radiații laser (roșie, verde și albastră). Se reconstituie toate culorile obiectului folosind lumina albă.