

5. Unde electromagnetice

5.1. Ecuatiile de undă pentru potențialul scalar V și pentru potențialul vector \vec{A}

Între potențialul scalar V dat de relația (2.20) :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dv' \quad (\rho = \rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{leg}}) \quad (5.1)$$

și potențialul vector \vec{A} dat de relația (2.57) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}}{r} dv' \quad (\vec{j} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) \quad (5.2)$$

trebuie să existe o relație de legătură (condiția Lorentz), întrucât ρ și \vec{j} nu sunt independente (satisfac ecuația de conservare a sarcinii (2.37) :

$$\nabla' \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.3)$$

Din (5.2) rezultă:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{V'} \frac{\vec{j}}{r} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\vec{j}}{r} dv' \quad (5.4)$$

Am trecut ∇ sub integrală deoarece ∇ acționează asupra lui x, y, z , iar integrala operează asupra variabilelor x', y', z' (∇ și \int sunt independente). Folosind identitatea (2.64) :

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5.5)$$

și relațiile:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{j}}{r} = \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad (5.6)$$

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{j}}{r} = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} \quad (5.7)$$

precum și faptul că $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ (ρ depinde de x', y', z' iar ∇ de x, y, z), obținem:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\vec{j}}{r} &= \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} - \nabla' \cdot \frac{\vec{j}}{r} \quad \Rightarrow \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\vec{j}}{r} dv' \end{aligned} \quad (5.8)$$

Pe baza ultimei părți a relației (2.66) rezultă că integrala a doua din (5.8) se anulează (v' include toți curenții). Prin urmare:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} dv' \quad (5.9)$$

Înlocuind $\nabla' \cdot \vec{j}$ din (5.3) în (5.9) și ținând seama că distanța r dintre punctele P și P' nu depinde de timp, obținem condiția Lorentz, care este o consecință a conservării sarcinii electrice:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\partial \rho / \partial t}{r} \cdot dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \frac{\rho}{r} \cdot dV' = -\frac{4\pi\epsilon_0\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (5.10)$$

Cunoscând componentele lui \vec{A} putem determina V din (5.10) și astfel putem afla componentele lui \vec{E} din (2.88) și ale lui \vec{B} din (2.56).

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.88) \equiv (5.11)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.56) \equiv (5.12)$$

În cazul unei antene putem calcula \vec{E} și \vec{H} numai pe baza lui \vec{A} , cunoscând densitatea de curent \vec{j} din antenă (relația (5.2)). Înlocuind \vec{E} din (5.11) în (3.11) obținem:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \xrightarrow{(5.10)}$$

$$\boxed{\Delta V - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (5.13)$$

Aceasta este ecuația de undă neomogenă pentru potențialul scalar V . Dacă $\rho=0$, obținem ecuația de undă omogenă:

$$\Delta V - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (5.14)$$

care are aceeași formă ca și ecuația de propagare a undei în vid, viteza de fază a undei fiind egală cu viteza luminii în vid:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \quad (5.15)$$

Relația (2.56) \equiv (5.12) se obține din a treia ecuație a lui Maxwell (3.10), iar ecuația de undă neomogenă pentru V (5.13) se obține folosind a patra ecuație a lui Maxwell (3.11).

Înlocuind în a doua ecuație a lui Maxwell (3.9) pe \vec{B} din (5.12) obținem relația (2.88) \equiv (5.11):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\Delta V \equiv (5.11)$$

Înlocuind \vec{E} și \vec{B} din (5.11) și (5.12) în prima ecuație a lui Maxwell (3.8):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.8) \equiv (5.16)$$

obținem:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0\mu_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \xrightarrow{(5.10)}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}} \quad (5.17)$$

Aceasta este ecuația de undă neomogenă pentru potențialul vector \vec{A} . Pentru $\vec{j}=0$ se obține ecuația de undă omogenă:

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.18)$$

care are aceeași formă ca și ecuația de propagare a undei în vid.

Astfel în locul ecuațiilor lui Maxwell se pot folosi ecuațiile de undă (5.13) și (5.17). Pentru ca definiția potențialelor electromagnetice V și \vec{A} să fie univocă am folosit condiția de etalonare Lorentz (5.10).

Ecuațiile de undă pentru un mediu omogen, izotrop, liniar și staționar se obțin direct folosind transformările (3.26):

$$\Delta V - \epsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon} \quad (5.19)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_{\text{lib}} \quad (5.20)$$

Relațiile (5.14) și (5.18) au forma ecuațiilor pentru o perturbație care se propagă cu viteza c , arătând posibilitatea existenței undei electromagnetice în spațiul liber.

5.2. Ecuațiile de undă pentru vectorii \vec{E} și \vec{B}

Pentru a elimina vectorul \vec{B} din ecuațiile lui Maxwell (3.8) și (3.9) vom aplica operatorul rotor relației (3.9) și vom folosi identitatea:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \equiv \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (5.21)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (5.22)$$

Înlocuind $\nabla \cdot \vec{E}$ cu ρ/ϵ_0 conform ecuației (3.11), obținem ecuația de undă neomogenă pentru \vec{E} (termenii sursă se trec în membrul drept):

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}} \quad (5.23)$$

În absența surselor se obține ecuația de undă uzuală, viteza de propagare a undei fiind egală cu viteza luminii în vid.

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5.24)$$

În mod analog, aplicând rotorul relației (3.8) și folosind ecuațiile (3.9) și (3.10), obținem:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \vec{j}} \quad (5.25)$$

Aceasta este ecuația de undă neomogenă pentru \vec{B} . Pentru $\vec{j} = 0$ se obține ecuația omogenă:

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.26)$$

Pentru un mediu omogen, izotrop, liniar și staționar obținem ecuațiile următoare (folosim (3.26) în (5.23) și (5.25)):

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho_{\text{lib}}}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \vec{j}_{\text{lib}}}{\partial t} \quad (5.27)$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \vec{j}_{\text{lib}} \quad (5.28)$$

Deși am obținut o ecuație de undă pentru \vec{E} și separate o ecuație de undă pentru \vec{B} , totuși vectorii \vec{E} și \vec{B} sunt interconectați prin ecuațiile lui Maxwell (nu putem avea unde pur electrice sau unde pur magnetice). Se poate arăta că și vectorul \vec{H} satisface o ecuație de undă.

Din ecuațiile lui Maxwell rezultă că vectorii \vec{E} și \vec{H} verifică fiecare ecuația generală a undelor, ceea ce arată că un câmp electromagnetic variabil se propagă în spațiu din aproape în aproape, sub formă de unde numite unde electromagnetice. La studiul undelor electromagnetice se lucrează cu \vec{H} și nu cu \vec{B} , întrucât $\vec{E} \times \vec{H}$ este o densitate de putere, iar E/H este o impedanță, mărimi ce au o mare importanță practică.

Dacă σ este constant, atunci relațiile (5.27) și (5.28) devin:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\nabla \rho_{\text{lib}}}{\varepsilon} \quad (5.29)$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.30)$$

Am folosit relațiile $\vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E}$ și $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Pentru un mediu dielectric putem considera $\sigma = 0$. Dacă în plus mediul este neutru din punct de vedere electric ($\rho_{\text{lib}} = 0$), atunci ecuațiile (5.29) și (5.30) devin:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.31)$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.32)$$

În acest caz câmpul electromagnetic se propagă sub formă de unde electromagnetice cu viteza:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (5.33)$$

Pentru un mediu în care $\rho_{\text{lib}} = 0$, relațiile (5.29) și (5.30) se pot scrie sub forma (având în vedere în (5.30) relația $\vec{B} = \mu \vec{H}$)

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.34)$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (5.35)$$

Deoarece $\epsilon > \epsilon_0$ și $\mu > \mu_0$, din (5.33) rezultă că $v < c$, în acord cu principiile relativității.

Raportul

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (5.36)$$

se numește indice de refracție absolute al mediului (neconductor).

5.3. Teorema lui Poynting

Teorema lui Poynting exprimă conservarea energiei într-un câmp electromagnetic. Pentru a găsi o relație cantitativă a conservării energiei câmpului electromagnetic într-un mediu omogen, izotrop, liniar și staționar, vom folosi relațiile (3.27), (3.28) și identitatea vectorială:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad \Rightarrow \quad (5.37)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{lib}} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{E} \left(\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{lib}} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{lib}} \quad (5.38)$$

unde

$$\rho_E^e = \frac{\epsilon E^2}{2} \quad (5.39)$$

reprezintă densitatea volumică de energie electrică (vezi relația (2.31)), iar

$$\rho_E^m = \frac{\mu H^2}{2} \quad (5.40)$$

este densitatea volumică de energie magnetică (vezi relația (2.92)).

Integrând relația (5.38) pe un volum v limitat de suprafața Σ și aplicând teorema divergenței la membrul stâng al ecuației, obținem:

$$-\int_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho_E^e + \rho_E^m) dv + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}_{lib} dv \quad (5.41)$$

Relația (5.41) exprimă teorema lui Poynting. Prima integrală din membrul drept reprezintă creșterea în interiorul volumului v a densității de energie electrică și magnetică, în unitatea de timp. Integrala a doua din membrul drept reprezintă energia disipată în unitatea de timp sub formă de căldură, prin efect Joule. Astfel primul membru al relației (5.41) reprezintă viteza cu care energia electromagnetică intră în volumul v . Vectorul Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (5.42)$$

reprezintă densitatea fluxului de energie, adică energia transferată normal pe unitatea de arie și în unitatea de timp prin frontiera Σ . Relația (5.41) poate fi pusă sub forma:

$$-\frac{dE}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}_{lib} dv \quad (5.43)$$

Această relație arată că viteza de scădere a energiei electromagnetice dintr-un domeniu v este egală cu suma dintre fluxul vectorului \vec{S} prin suprafața domeniului și căldura produsă în unitatea de timp prin efect Joule. Relația (5.41) sau (5.43) reprezintă legea conservării energiei câmpului electromagnetic și demonstrează existența undelor electromagnetice (un câmp electromagnetic transportă energie dintr-un punct al spațiului în altul).

5.4. Proprietățile undelor electromagnetice în medii dielectrice

În domeniul undelor electromagnetice intră undele hertziene, microundele, radiațiile infraroșii, vizibile, ultraviolete, X și γ . Undele lungi radio au frecvența de ordinul a 100 Hz, iar radiațiile cosmice γ au frecvența de ordinul a 10^{24} Hz. Spre deosebire de undele elastice, care sunt scalare, undele electromagnetice sunt unde vectoriale.

Pentru a studia structura undelor electromagnetice vom considera un mediu dielectric ($\sigma = 0$) nelimitat, neutru din punct de vedere electric ($\rho_{lib} = 0$). În acest caz ($\vec{j}_{lib} = \sigma \vec{E} = 0$) soluțiile particulare ale ecuațiilor (5.31) și (5.32) sunt de forma unei armonice plane:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.44)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.45)$$

Faptul că se consideră cazul unei monocromatice nu diminuează generalitatea concluziilor, deoarece o undă de orice formă (o undă reală) poate fi considerată ca o suprapunere de unde armonice plane. Dacă toți vectorii \vec{E} sunt paraleli la o direcție dată, atunci avem o undă liniar polarizată. O undă plană nepolarizată se poate reprezenta ca o sumă de unde polarizate liniar. În relațiile (5.44) – (5.45) \vec{k} este vectorul de undă

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{s} \quad (5.46)$$

unde \vec{s} este versorul direcției de propagare a unde. În cazul particular considerat, ecuațiile lui Maxwell (3.27) – (3.29) devin:

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.47)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.48)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.49)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.50)$$

Forma exponențială (5.44) – (5.45) a soluțiilor ecuațiilor (5.47) – (5.50) simplifică foarte mult calculele, deoarece operațiile de derivare se reduce la simple înmulțiri. Astfel:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = i\omega \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = i\omega \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) = \nabla \cdot (E_{0x} \vec{i} + E_{0y} \vec{j} + E_{0z} \vec{k}) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_x E_x - ik_y E_y - ik_z E_z = -i(\vec{k} \cdot \vec{E}) \quad \Rightarrow \\ \nabla \cdot \vec{E} &= -i(\vec{k} \cdot \vec{E}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \rightarrow -i\vec{k} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Înlocuind (5.51) – (5.52) în (5.47) – (5.50), obținem:

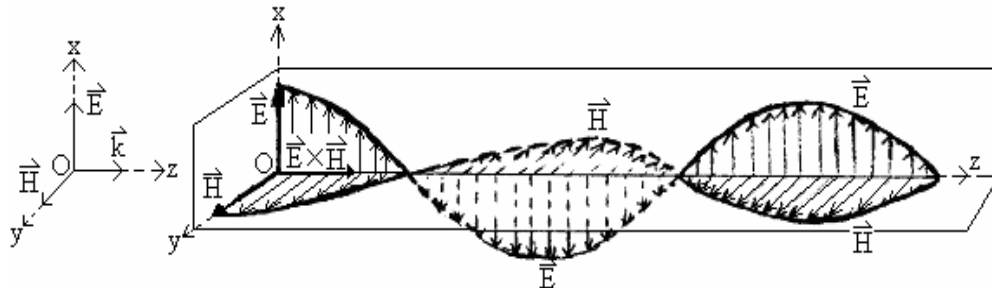
$$-i\vec{k} \times \vec{H} = \varepsilon \cdot i\omega \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon \omega} \cdot \vec{k} \times \vec{H} \quad (\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{E} \perp \vec{H}) \quad (5.53)$$

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -\mu \cdot i\omega \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu \omega} \cdot \vec{k} \times \vec{E} \quad (\vec{H} \perp \vec{k}, \quad \vec{H} \perp \vec{E}) \quad (5.54)$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{H}) \quad (5.55)$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{E}) \quad (5.56)$$

Se constată că vectorii \vec{E} și \vec{H} sunt perpendiculari între ei. De asemenea, \vec{E} și \vec{H} oscilează perpendicular pe direcția de propagare (unda electromagnetică este o undă transversală). Vectorii \vec{E} , \vec{H} și \vec{k} formează un triedru drept. Pentru o undă electromagnetică ce se propagă în vid, reprezentarea grafică a vectorilor \vec{E} și \vec{H} la un moment dat, în funcție de coordonata spațială a direcției de propagare, este de forma:



Din (5.54) rezultă:

$$|\vec{k} \times \vec{E}| = \mu \omega |\vec{H}| \quad \Rightarrow \quad k E \sin 90^\circ = \mu \omega H \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{\omega} = \mu \cdot \frac{H}{E} \quad (5.57)$$

Dar

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi\nu} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{\nu} \stackrel{(5.33)}{=} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (5.58)$$

Egalând expresiile lui k/ω din (5.57) și (5.58) obținem:

$$\mu \frac{H}{E} = \sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow \boxed{\sqrt{\mu} H = \sqrt{\varepsilon} E} \quad (5.59)$$

Rezultă că modulele vectorilor \vec{E} și \vec{H} sunt proporționale.

Se definește impedanța caracteristică a mediului Z prin raportul

$$Z = \frac{E}{H} \stackrel{(5.59)}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad (5.60)$$

unde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega \quad (5.61)$$

este impedanța caracteristică a vidului.

Din relația (5.59) rezultă:

$$\frac{\rho_E^e}{\rho_E^m} = \frac{\varepsilon E^2 / 2}{\mu H^2 / 2} = 1 \quad (5.62)$$

adică densitățile de energie electrică și magnetică sunt egale. Astfel densitatea de energie electromagnetică este:

$$\rho_E = \rho_E^e + \rho_E^m = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \stackrel{(5.62)}{=} \varepsilon E^2 = \mu H^2 \quad (5.63)$$

Vectorul Poynting $|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}|$ reprezintă energia ce trece în unitatea de timp prin unitatea de arie a unei suprafețe perpendiculare pe direcția de propagare a undei.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E H \vec{s} \stackrel{(5.59)}{=} E \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \vec{s} \Rightarrow \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{s} \quad (5.64)$$

Luând partea reală a lui \vec{E} din (5.44) (abandonând pentru moment notația fazorială) și presupunând că unda se propagă în direcția axei z , obținem:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k z), \quad \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - k z) \vec{s} \quad (5.65)$$

Intensitatea undei este definită ca media temporală a mărimii vectorului Poynting:

$$\begin{aligned} I = \overline{|\vec{S}|} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt \stackrel{(5.65)}{=} \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - k z) dt = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos[2(\omega t - k z)]}{2} dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2} \quad (5.66)$$

deoarece media temporală a lui $\cos^2(\omega t - kz)$ este 1/2.

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t - kz) \right]_0^T &= \\ = \frac{1}{4T\omega} [\sin 2(\omega T - kz) - \sin(-2kz)] &= \frac{1}{4T\omega} (\sin 2\omega T \cos kz - \sin 2kz \cos 2\omega T + \sin 2kz) = \\ = \frac{1}{4T\omega} \left(\underbrace{\sin 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \cos kz}_{=0} - \underbrace{\sin 2kz \cdot \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T}_{=1} + \sin 2kz \right) &= 0 \end{aligned}$$

Rezultă că intensitatea undei electromagnetice plane este proporțională cu pătratul amplitudinii vectorului \vec{E} .

Relația (5.66) se poate pune sub forma:

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon E_0^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon \overline{E^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \epsilon E^2 \stackrel{(5.58), (5.63)}{=} v \cdot \overline{\rho_E} \quad (5.67)$$

Astfel intensitatea undei se exprimă ca produsul dintre viteza de fază și valoarea medie temporală a densității de energie electromagnetică.

Viteza de fază este dată de relația (5.36)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (5.68)$$

unde n este indicele de refracție

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (5.69)$$

Deoarece $\epsilon_r > 1$, $\mu_r > 1$, rezultă că $v < c$. Într-un mediu nemagnetic ($\mu_r = 1$)

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (5.70)$$

În vid, viteza de fază este $v = c$ (relația (5.15)), astfel că

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \stackrel{(5.67)}{=} c \cdot \overline{\rho_E} \quad (5.71)$$

Deoarece $B = \mu_0 H$, rezultă

$$\frac{E}{B} = \frac{E}{\mu_0 H} \stackrel{(5.57)}{=} \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\omega \mu_0}{k} \stackrel{(5.58)}{=} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (5.72)$$

Ca exemplu, considerăm un fascicul cu raza $r = 10^{-4}$ m și puterea la vârf $P_0 = 7,5 \cdot 10^{12}$ W, emis în vid de un laser care funcționează în regim de impulsuri. În acest caz

$$I_0 = \left| \vec{S}_0 \right| = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} = 2,39 \cdot 10^{20} \text{ W/m}^2$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \overline{E_0^2} = \frac{1}{Z_0} \cdot \overline{E_0^2} \Rightarrow \overline{E_0^2} = Z_0 I_0 = 120\pi \cdot I_0 \Rightarrow \sqrt{\overline{E_0^2}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$$

$$E/B = c \Rightarrow \sqrt{\overline{B_0^2}} = \sqrt{\overline{E_0^2}}/c = 10^3 \text{ T}$$

Valorile obținute sunt foarte mari (la numai $3 \cdot 10^6$ V/m are loc descărcarea în aer între doi electrozi). Un astfel de fascicul produce vaporizarea instantanee a sticlei.

5.5. Starea de polarizare a undelor electromagnetice

Undele electromagnetice sunt unde transversale, întrucât vectorii \vec{E} și \vec{H} oscilează perpendicular pe direcția de propagare a undei. Deoarece efectele luminoase sunt datorate vectorului \vec{E} , se analizează numai modul de oscilație a acestui vector. Unda electromagnetică este liniar polarizată sau plan polarizată dacă vectorul intensitate de câmp electric \vec{E} oscilează astfel încât rămâne tot timpul paralel cu o direcție din planul perpendicular pe direcția de propagare. Dacă \vec{E} oscilează după diferite direcții situate în planul perpendicular pe direcția de propagare, fără a exista vreo direcție preferențială (amplitudinea este aceeași pentru orice direcție) unda se numește nepolarizată. Sursele convenționale ca Soarele, becurile cu incandescență etc. emit unde luminoase nepolarizate, deoarece câmpul emis de fiecare atom din sursă oscilează independent de câmpurile emise de ceilalți atomi (actele de emisie ale atomilor sursei sunt necorelate). Unda rezultantă emisă de o sursă convențională se numește undă naturală.

Dacă unda plană nu este polarizată liniar, atunci ea se poate exprima ca suma a două unde polarizate liniar, ale căror vectori intensitate de câmp electric \vec{E}_1 și \vec{E}_2 se află de-a lungul a două direcții reciproc perpendiculare din planul considerat, cele două unde componente având aceeași frecvență, iar între vectorii \vec{E}_1 și \vec{E}_2 existând un defazaj φ . Într-o undă plană, liniar polarizată, vectorii \vec{E} și \vec{H} au forma (5.44) – (5.45), unde \vec{E}_0 și \vec{H}_0 sunt vectori independenți de timp și de coordonatele spațiale. Dacă propagarea undei se face după direcția axei z , atunci vectorul \vec{E} are forma $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ unde amplitudinea \vec{E}_0 a undei liniar polarizate este o mărime reală, constantă. Planul determinat de direcția de oscilație a vectorului \vec{E} și direcția de propagare a undei se numește plan de vibrație (oscilație), iar planul format de direcția de oscilație a vectorului \vec{H} și direcția de propagare a undei se numește plan de polarizare.

Prin compunerea a două oscilații armonice perpendiculare de aceeași pulsație

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz)}, \quad E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \quad (5.73)$$

$$E_y = E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \varphi)}, \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (5.74)$$

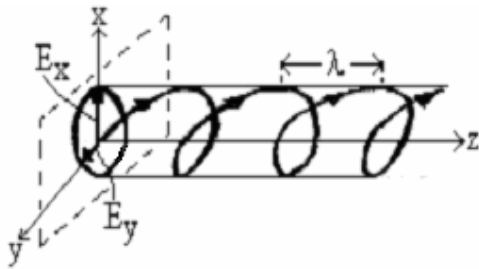
se obține în general o oscilație eliptică a cărei formă și al cărei sens de parcurgere depend de E_x și E_y . Eliminând timpul t între relațiile (5.73) și (5.74) se obține ecuația unei elipse înscrise într-un dreptunghi de laturi $2A$ și $2B$ ($A = E_{0x}$, $B = E_{0y}$):

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - \frac{2E_x E_y}{2E_{0x} E_{0y}} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (5.75)$$

În cursul propagării undei, vectorul rezultat

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \quad (5.76)$$

suferă și o mișcare de translație pe direcția z , astfel că în realitate vârful acestui vector descrie o elice, înfășurată pe un cilindru de secțiune eliptică, având pasul egal cu lungimea de undă λ . Proiecția locului geometric pe care-l descrie în spațiu vârful vectorului rezultat \vec{E} pe un plan perpendicular pe direcția de propagare este o elipsă de semiaxe E_{0x} și E_{0y} .



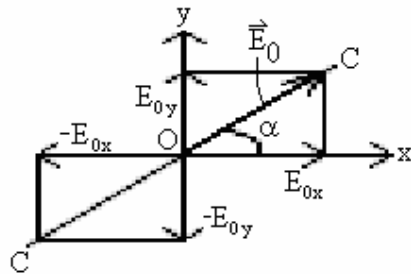
O astfel de undă se numește eliptic polarizată. Dacă pentru un observator aflat de-a lungul axei Oz și care privește astfel încât unda să vină spre el, sensul de rotire al vectorului \vec{E} pe lice este același cu sensul de rotire al acelor de ceasornic, unda se numește eliptic polarizată dreapta. În caz contrar, unda este eliptic polarizată stânga. Am considerat că observatorul privește spre sursa de oscilație.

Dacă $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ are loc o polarizare dreapta, iar dacă $\varphi \in (0, \pi)$ unda este polarizată stânga.

Dacă $\varphi = 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), atunci oscilațiile sunt în concordanță de fază, iar relația (5.75) se reduce la forma:

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot E_x \quad (5.77)$$

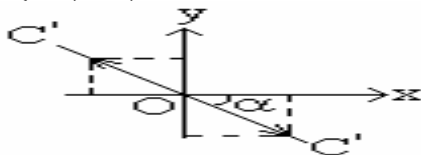
care este ecuația unei drepte ce trece prin origine și este situată în cadranele I și III.



În acest caz particular unda electromagnetică rezultantă este liniar polarizată, vectorul \vec{E} fiind tot timpul paralel cu CC , care face unghiul α cu axa Ox , unde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

Dacă $\varphi = (2m+1)\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), atunci oscilațiile sunt în opoziție de fază, iar relația (5.75) se reduce la forma:



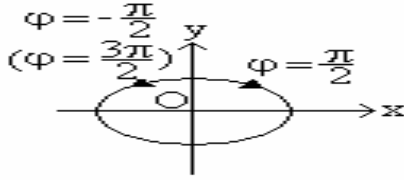
$$E_y = - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot E_x \quad (5.78)$$

care reprezintă cealaltă diagonală a dreptunghiului.

În acest caz unda este tot liniar polarizată, dar direcția de polarizare face un unghi α cu axa Ox .

Dacă $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), atunci oscilațiile sunt în cuadratură de fază, iar relația (5.75) devine:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1 \quad (5.79)$$



care reprezintă ecuația unei elipse raportate la axele sale.

Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci vârful vectorului \vec{E} se deplasează pe elipsă în sensul acelor de ceasornic, iar dacă $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, în sens invers. În particular, dacă $E_{0x} = E_{0y}$ elipsa devine un cerc de ecuație

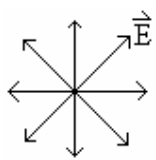
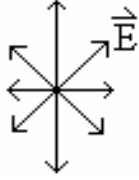

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{0x}^2 = E_{0y}^2 \quad (5.80)$$

unda fiind circular polarizată.

Se definește gradul de polarizare P

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad (5.81)$$

unde I_1 este intensitatea unei corespunzătoare direcției privilegiate, în care intensitatea câmpului electric are valoarea maximă, iar I_2 este intensitatea unei pentru o direcție perpendiculară pe prima, în care intensitatea câmpului electric are valoarea minimă. Se constată că pentru o undă nepolarizată $I_1 = I_2$, $P = 0$ (cazul luminii naturale); pentru o undă liniar polarizată $I_2 = 0$, $P = 1$ (unda total polarizată), iar pentru o undă parțial polarizată $0 < P < 1$.

		
undă nepolarizată	undă parțial polarizată	undă liniar polarizată

5.6. Propagarea undelor electromagnetice în medii conductoare ($\sigma \neq 0$)

În interiorul unui conductor nu există densitate de sarcină ($\rho_{\text{lib}} = 0$). Pe baza relațiilor (5.51) și (5.52), ecuațiile lui Maxwell (3.27) – (3.29') devin:

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad -i \vec{k} \times \vec{H} - i \omega \epsilon \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (5.82)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad -i \vec{k} \times \vec{E} + i \omega \mu \vec{H} = 0 \quad (5.83)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.84)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{lib}} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.85)$$

Din (5.82) și (5.83) rezultă:

$$\vec{E}(\sigma + i\omega\epsilon) = -i\vec{k} \times \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{-\vec{k} \times \vec{H}}{\omega\epsilon - i\sigma} \quad (5.86)$$

$$\omega\mu\vec{H} = \vec{k} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega\mu} \quad (5.87)$$

Din aceste relații se constată transversalitatea și ortogonalitatea vectorilor \vec{E} și \vec{H} .
Din aceleași relații se determină impedanța caracteristică a mediului de propagare ($Z = \left| \frac{\vec{E}}{\vec{H}} \right|$)

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{k}{\omega\epsilon - i\sigma} = \frac{\omega\mu}{k} \quad (5.88)$$

Din ultima parte a relației (5.88) rezultă:

$$k^2 = \omega\mu(\omega\epsilon - i\sigma) = \omega^2\mu\epsilon \left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}\right) = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma \quad (5.89)$$

La același rezultat se ajunge folosind relațiile (5.28) și (3.28):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -\mu \nabla \times \vec{j}_{\text{lib}}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \\ \mu \Delta \vec{H} - \epsilon\mu^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= -\mu\sigma \nabla \times \vec{E} = \mu^2 \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow i\omega(i\omega) = -\omega^2, \\ \nabla \rightarrow -i\vec{k}, \quad \Delta \rightarrow -i\vec{k}(-i\vec{k}) &= -k^2 \quad \Rightarrow \quad -\mu k^2 \vec{H} + \epsilon\mu^2 \omega^2 \vec{H} = \mu^2 \sigma i\omega \vec{H} \quad \Rightarrow \\ \underline{k^2 = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma} & \quad (5.89) \end{aligned}$$

Se constată că într-un mediu conductor k este o mărime complexă

$$k^* = a - ib \quad (5.90)$$

Pentru un mediu nedisipativ ($\sigma = 0$), în care nu există pierderi prin efect Joule și nu are loc o atenuare a undei, k este o mărime reală

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon \quad (5.91)$$

Relația (5.89) este de aceeași formă cu (5.91) dacă se introduce o permitivitate electrică complexă

$$\epsilon^* = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \quad (5.92)$$

Înlocuind (5.90) în (5.89) și identificând părțile reale și cele imaginare, obținem:

$$a^2 - 2iab - b^2 = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = \omega^2\mu\epsilon \\ 2ab = \omega\mu\sigma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (5.93)$$

$$a = \frac{\omega\mu\sigma}{2b} \quad (5.95)$$

$$\frac{(\omega\mu\sigma)^2}{4b^2} - b^2 = \omega^2\epsilon\mu \quad \Rightarrow \quad 4b^4 + 4\omega^2\epsilon\mu b^2 - (\omega\mu\sigma)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$b^2 = x \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 4\omega^2\epsilon\mu x - (\omega\mu\sigma)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\omega^2\epsilon\mu \pm \sqrt{4(\omega^2\epsilon\mu)^2 + 4(\omega\mu\sigma)^2}}{4} = \frac{-\omega^2\epsilon\mu \pm \omega^2\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\omega\mu\sigma}{\omega^2\epsilon\mu}\right)^2}}{2}$$

b^2 fiind pozitiv, vom lua numai semnul + în fața radicalului:

$$b^2 = \frac{\omega^2\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right) \quad (5.96)$$

Înlocuind în (5.93), obținem:

$$a^2 = b^2 + \omega^2\epsilon\mu = \frac{\omega^2\epsilon\mu}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - \frac{\omega^2\epsilon\mu}{2} + \omega^2\epsilon\mu \quad \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{\omega^2\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right) \quad (5.97)$$

Pentru o undă electromagnetică plană care se propagă în interiorul unui conductor în lungul axei z , intensitatea câmpului electric este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \stackrel{(5.90)}{=} \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (a - ib)z]} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-bz} \cdot e^{i(\omega t - az)}} \quad (5.98)$$

Se constată că amplitudinea $\vec{E}_0 e^{-bz}$ scade exponențial datorită atenuării produse de mediul conductor. Atenuarea este legată de partea imaginară b a mărimii complexe k . Spre deosebire de ecuația (5.31) care descrie un proces reversibil (ecuația este invariantă la schimbarea semnului timpului, $t \rightarrow -t$), ecuația (5.34) descrie un proces ireversibil, deoarece termenul în σ conduce la atenuarea undei.

Pentru $z = \delta = \frac{1}{b}$, amplitudinea $\vec{E}_0 e^{-bz}$ scade de e ori ($E_0 e^{-b\frac{1}{b}} = \frac{E_0}{e}$). Mărimea δ astfel definită se numește adâncime de pătrundere. Deoarece intensitatea I a undei este proporțională cu pătratul amplitudinii ($E_0^2 e^{-2bz}$) rezultă că și intensitatea undei scade exponențial, iar pentru $z = \delta = \frac{1}{b}$, I scade de e^2 ori. O undă electromagnetică plană care se propagă de-a lungul unui conductor metalic este localizată la suprafața conductorului, datorită absorbției puternice a undei. Acest fenomen este utilizat la liniile de transmisie a energiei electromagnetice și se numește efect pelicular. Astfel la cupru

$\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$, $\delta(60 \text{ Hz}) = 8,53 \text{ mm}$, $\delta(1 \text{ kHz}) = 2,09 \text{ mm}$, $\delta(1 \text{ MHz}) = 66,1 \mu\text{m}$,
 $\delta(3 \text{ GHz}) = 1,21 \mu\text{m}$, iar la aluminiu, $\sigma = 3,54 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$, $\delta(1 \text{ MHz}) = 84,6 \mu\text{m}$.

Se constată că adâncimea de pătrundere a unei electromagnetice este mult mai mică decât lungimea de undă. Astfel $\lambda(3 \text{ GHz}) = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0,1 \text{ m} = 10^5 \mu\text{m}$ în vid, $\lambda(1 \text{ MHz}) = 0,4 \text{ mm}$ în cupru, $\lambda(1 \text{ MHz}) = 300 \text{ m}$ în aer (a fost calculată pentru vid).

La metale, $\epsilon_r = 1$, raportul $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ este mult mai mare ca 1. De aceea putem neglija unitatea din relațiile (5,96) și (5,97), așa încât obținem:

$$b^2 = a^2 - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\omega \mu \sigma}{2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \Rightarrow \delta = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (5.99)$$

La cupru, pentru $v = 1 \text{ MHz}$, obținem:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \frac{5,8 \cdot 10^7}{2 \cdot \pi \cdot 10^6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \approx 10^{12} \gg 1$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 5,8 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \text{ m} = 6,61 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Și în acest caz se definește un indice de refracție, în conformitate cu relația (5.69), cu deosebirea că aici permitivitatea fiind complexă și indicele de refracție va fi complex. Astfel, divizând relația (5.92) cu ϵ_0 obținem:

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (5.100)$$

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - i \epsilon_r'' , \quad \epsilon_r' = \epsilon_r , \quad \epsilon_r'' = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (5.101)$$

$$n^* = \sqrt{\epsilon_r^* \mu_r} ; \quad (5.89) \Rightarrow k^{*2} = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) = \omega^2 \mu \epsilon_0 \epsilon_r \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \Rightarrow$$

$$k^{*2} = \omega^2 \mu \epsilon_0 \epsilon_r^* \quad (5.102)$$

$$k^* = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r^*} \Rightarrow n^* = \frac{k^*}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow n^* = \frac{k^* c}{\omega} \quad (5.103)$$

$$n^* = \frac{c}{\omega} (a - i b) = \frac{c}{\omega} a - i \frac{c}{\omega} b , \quad n^* = n' - i n'' , \quad n' = \frac{ca}{\omega} , \quad n'' = \frac{cb}{\omega} \quad (5.104)$$

Din relațiile (5.98) și (5.104) rezultă că amplitudinea $\vec{E}_0 e^{-bz} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} n'' z}$ are o scădere exponențială datorită părții imaginare a indicelui de refracție complex. De aceea n'' se numește coeficient de extincție.

Deoarece mărimile k^* , ϵ_r^* , n'' depind de pulsația ω , se spune că undele prezintă fenomenul de dispersie în medii conductoare.

Un bun conductor are densitatea curentului de conducție σ_E de cel puțin 50 de ori mai mare decât densitatea curentului de deplasare ($\partial D/\partial t = \varepsilon \partial E/\partial t$):

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \left| \frac{\sigma_E}{\varepsilon \partial E/\partial t} \right| \geq 50$$

Viteza de fază a undei este:

$$v_f = \frac{\omega}{a} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (5.105)$$

Dacă σ și μ nu depind de pulsație, atunci viteza de grup a undei într-un bun conductor este de două ori mai mare decât viteza de fază:

$$v_g = \frac{d\omega}{da} = \frac{1}{da/d\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2}}} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = 2v_f \quad (5.106)$$

La cupru, pentru $\nu = 1$ MHz:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7}} \text{ m/s} = 415 \text{ m/s}, \quad v_g = 830 \text{ m/s}$$

(viteza sunetului în cupru este de $3,6 \cdot 10^3$ m/s).

Indicele de refracție real la cupru, pentru $\nu = 1$ MHz este:

$$n' = \frac{ca}{\omega} = c \sqrt{\frac{\sigma\mu}{2\omega}} = 1,1 \cdot 10^8$$

Impedanța caracteristică Z a conductorului în care se propagă unda electromagnetică se obține din relațiile (5.88) și (5.99):

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{k^*} = \frac{\omega\mu}{a - ib}, \quad a = b = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$k^* = a - ib = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-i) = \sqrt{\omega\mu\sigma'} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \sqrt{\omega\mu\sigma'} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega\mu\sigma'} e^{-i\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4} \Rightarrow \quad (5.107)$$

$$E = H \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad H = E \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (5.108)$$

Din relațiile (5.98) și (5.108) rezultă:

$$E = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \quad (5.109)$$

$$H = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (5.110)$$

Spre deosebire de dielectrics, la care \vec{E} și \vec{H} sunt în fază, în cazul conductorilor între acești vectori există un defazaj de $\pi/4$ radiani.

Pentru $z = \lambda$ și $k = a = 2\pi/\lambda$, amplitudinea undei $E_0 e^{-z/\delta}$ scade de $(1/e)^{2\pi}$ ori ($e^{-bz} = e^{-az} = e^{-(2\pi/\lambda)\lambda} = e^{-2\pi}$). Datorită efectului pelicular, conductorii sunt opaci la radiațiile din spectrul vizibil (exceptând conductorii sub formă de straturi foarte subțiri).

Pentru $\nu = 1$ MHz, impedanța caracteristică la cupru este:

$$|Z| = \left| \frac{E}{H} \right| = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5,8 \cdot 10^7}} \Omega = 3,7 \cdot 10^{-4} \Omega \ll Z_0 \text{ (vid)} = 377 \Omega$$

Vectorii \vec{E} și \vec{H} sunt ortogonali într-o undă polarizată liniar. Dacă unda nu este polarizată liniar, atunci vectorii \vec{E} și \vec{H} pot să nu fie ortogonali.

Media temporală a densității de energie electrică se obține din (5.109) :

$$\overline{\rho_E^e} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \overline{\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} = \frac{\varepsilon}{4} E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta}$$

Media temporală a densității de energie magnetică se obține pe baza relației (5.110) :

$$\overline{\rho_E^m} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega\mu} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \overline{\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\mu}{4} \cdot \frac{\sigma}{\omega\mu} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta}$$

Raportul acestor densități de energie este:

$$\frac{\overline{\rho_E^e}}{\overline{\rho_E^m}} = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{\omega\mu}{\sigma} = \frac{\varepsilon\omega}{\mu} \leq \frac{1}{50} \quad (5.111)$$

Din cauza valorii mari a lui σ , densitatea de energie magnetică este mult mai mare decât densitatea de energie electrică, iar E/j_{lib} este foarte mic. E este mic, dar densitatea de current este mare (de aceea și H este mare).

Folosind părțile reale ale expresiilor (5.109) și (5.110), putem determina valoarea medie temporală a mărimii vectorului Poynting:

$$\left| \vec{S} \right| = \left| \vec{E} \times \vec{H} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \overline{\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left| \vec{S} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta}} \quad (5.112)$$

Obținem același rezultat dacă folosim expresia:

$$\left| \vec{S} \right| = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left| \vec{E} \times \vec{H}^* \right| \quad (5.113)$$

unde E și H au forma exponențială.

$$\begin{aligned} |\bar{S}| &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left[E_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{i(\omega t - z/\delta)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-i(\omega t - z/\delta)} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \end{aligned}$$

Se constată că și intensitatea undei (media temporală a mărimii vectorului Poynting) are o scădere exponențială. Din relația (5.111) și din expresia mediei temporale a densității de energie electrică se constată că intensitatea undei este egală cu produsul dintre valoarea medie temporală a densității de energie electromagnetică și viteza de fază:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} + 1 \right) \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} &\approx E_0^2 \cdot e^{-2z/\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = |\bar{S}| = I \quad \Rightarrow \\ I &= \bar{\rho}_E \cdot v_f, \quad \bar{\rho}_E^e + \bar{\rho}_E^m = \bar{\rho}_E \end{aligned} \quad (5.114)$$

Se definește tangenta unghiului de pierdere electrică prin relația:

$$\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (5.115)$$

Din (5.101) și (5.115) obținem:

$$\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r''}{\varepsilon_0 \varepsilon_r'} = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} = \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \quad (5.116)$$

Similar se definește tangenta unghiului de pierdere magnetică:

$$\operatorname{tg} \delta_\mu = \frac{\mu''}{\mu'} \quad (5.117)$$

Din (5.101), (5.116) și din definiția indicelui de refracție complex obținem:

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r' - i \varepsilon_r'' = \varepsilon_r' \left(1 - i \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \right) = \varepsilon_r' (1 - i \operatorname{tg} \delta_\varepsilon) \quad (5.118)$$

$$n^* = \sqrt{\varepsilon_r^* \mu_r} \quad \Rightarrow \quad n^{*2} = \varepsilon_r^* \mu_r = \mu_r \varepsilon_r' (1 - i \operatorname{tg} \delta_\varepsilon) \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned} n^* = n' - i n'' \quad \Rightarrow \quad n'^2 - 2i n' n'' - n''^2 &= \mu_r \varepsilon_r' (1 - i \operatorname{tg} \delta_\varepsilon) \quad \Rightarrow \\ n'^2 - n''^2 &= \mu_r \varepsilon_r' \\ 2 n' n'' &= \mu_r \varepsilon_r' \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (5.120)$$

Din (5.120), pe baza relațiilor trigonometrice

$$\sin \delta_\varepsilon = 2 \sin \frac{\delta_\varepsilon}{2} \cdot \cos \frac{\delta_\varepsilon}{2}$$

$$\cos \delta_{\varepsilon} = \cos^2 \frac{\delta_{\varepsilon}}{2} - \sin^2 \frac{\delta_{\varepsilon}}{2}$$

obținem:

$$n' = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r'} \cdot \frac{\cos \frac{\delta_{\varepsilon}}{2}}{\sqrt{\cos \delta_{\varepsilon}}}, \quad n'' = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r'} \cdot \frac{\sin \frac{\delta_{\varepsilon}}{2}}{\sqrt{\cos \delta_{\varepsilon}}} \quad (5.121)$$

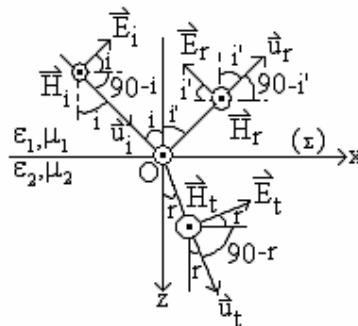
În cazul în care se ține seama și de pierderile magnetice, în locul relațiilor (5.121) avem:

$$n' = \sqrt{\mu_r' \varepsilon_r'} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\delta_{\varepsilon} + \delta_{\mu}}{2} \right)}{\sqrt{\cos \delta_{\varepsilon} \cdot \cos \delta_{\mu}}}, \quad n'' = \sqrt{\mu_r' \varepsilon_r'} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\delta_{\varepsilon} + \delta_{\mu}}{2} \right)}{\sqrt{\cos \delta_{\varepsilon} \cdot \cos \delta_{\mu}}} \quad (5.122)$$

5.7. Reflexia și refracția undelor electromagnetice

5.7.1. Legile reflexiei și refracției

Când o undă electromagnetică întâlnește suprafața de separare a două medii dielectrice diferite, o parte din energia undei se întoarce în primul mediu (se reflectă), iar cealaltă parte trece în mediul al doilea (se refractă). Alegem originea O în punctul de incidență al undei cu planul care separă cele două medii (planul xOy), iar axa Oz îndreptată de la primul mediu spre al doilea mediu, coincidând cu normala la suprafața de separare. Planul xOz , care conține normala la suprafața de separare a celor două medii și direcția de propagare a undei incidente, se numește plan de incidență. Axa Oy este perpendiculară pe planul foii, fiind orientată dinspre foaie înspre noi.



Se presupune că mediile dielectrice sunt medii ideale (omogene, izotrope, liniare, nedisipative și conservative). Nu avem reflexii multiple, deoarece interfața este foarte subțire, iar cele două medii separate au o întindere nelimitată (medii semiinfinite).

Vectorii intensitate de câmp electric pentru unda incidentă, cea reflectată și respective cea refractată au forma:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{\hat{i}(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad (5.123)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{\hat{i}(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_r)} \quad (5.124)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i}(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_t)} \quad (5.125)$$

unde, conform relației (5.58) :

$$\vec{k}_i = \frac{\omega_i}{v_1} \cdot \vec{u}_i, \quad \vec{k}_r = \frac{\omega_r}{v_1} \cdot \vec{u}_r, \quad \vec{k}_t = \frac{\omega_t}{v_2} \cdot \vec{u}_t \quad (5.126)$$

Am presupus că unda incidentă este uniformă și liniar polarizată, vectorul de undă \vec{k}_i fiind real și orientat în direcția de propagare a undei incidente, determinată de versorul \vec{u}_i . Originea vectorului \vec{r} este în punctul O care se află pe suprafața de separare. De asemenea, se presupune că \vec{E}_{0i} este o mărime reală. Întrucât unda incidentă este plană, rezultă că toate razele incidente sunt paralele. Deoarece suprafața de separare este plană, rezultă că legile reflexiei și refracției trebuie să fie aceleași pentru toate punctele de pe interfață. Așadar razele reflectate trebuie să fie paralele între ele și de asemenea razele refractate trebuie să fie paralele între ele.

La interfața $z = 0$ sau $\vec{r}_\Sigma = \vec{u}_x x + \vec{u}_y y$ trebuie îndeplinite condițiile la limită și anume continuitatea componentelor tangențiale ale câmpurilor electrice și magnetice ($E_{1t} = E_{2t}$, $H_{1t} = H_{2t}$), respectiv continuitatea componentelor normale ale inducțiilor electrice și magnetice ($D_{1n} = D_{2n}$, $B_{1n} = B_{2n}$). Aceste relații sunt o consecință a faptului că pe suprafața de separare $z = 0$ dintre cele două medii dielectrice nu avem curenți superficiali, respective distribuții superficiale de sarcini electrice. Componenta tangențială a lui \vec{E} este continuă de-a lungul suprafeței de separare atunci când componenta tangențială a lui $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ în mediul 1 este egală cu componenta tangențială a lui \vec{E}_t în mediul 2 :

$$\left(\vec{E}_i\right)_{tg} + \left(\vec{E}_r\right)_{tg} = \left(\vec{E}_t\right)_{tg} \quad (5.127)$$

Această relație trebuie să fie satisfăcută pentru orice moment t și în orice punct de coordonate $(x, y, 0)$.

Astfel, condițiile la limită sunt îndeplinite numai dacă argumentele celor trei exponențiale din relațiile (5.123) – (5.125) sunt egale:

$$\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_\Sigma = \omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_\Sigma + \varphi_r = \omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}_\Sigma + \varphi_t \quad (5.128)$$

Această relație este satisfăcută pentru orice moment t dacă;

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \quad (5.129)$$

adică în urma reflexiei și refracției la suprafața de separare a doi dielectricsi transparenti pulsația radiației electromagnetice incidente rămâne neschimbată. Din egalitatea termenilor liberi rezultă:

$$0 = \varphi_r = \varphi_t \quad (\text{sau} = \pi) \quad (5.130)$$

adică în urma reflexiei și refracției nu se introduce un defazaj între unda incidentă și unda reflectată, respective refractată; valoarea π se obține dacă anumite amplitudini sunt negative. Prin urmare, unde reflectate și transmise sunt sau în fază, sau în opoziție de fază cu undele incidente. Din (5.128) rezultă:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_\Sigma = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_\Sigma = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_\Sigma \quad (5.131)$$

Deci componentele lui \vec{k}_i , \vec{k}_r și \vec{k}_t paralele la interfață sunt egale. Dacă $k_{iy} = 0$, atunci $k_{ry} = 0$, $k_{ty} = 0$, ca în figura de mai sus. Rezultă că vectorii \vec{k}_i , \vec{k}_r și \vec{k}_t sunt coplanari, planul determinat de acești vectori fiind numit plan de incidență. Am obținut prima lege a fenomenului de reflexie – refracție: razele incidente, reflectate și refractate sunt coplanare.

Folosind relațiile (5.129), (5.130) și componentele versorilor \vec{u}_i ($\sin i, 0, \cos i$), \vec{u}_r ($\sin i', 0, -\cos i'$) și \vec{u}_t ($\sin r, 0, \cos r$), relațiile (5.123) – (5.125) devin:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \sin i + z \cos i}{v_1}\right)} \quad (5.132)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \sin i' - z \cos i'}{v_1}\right)} \quad (5.133)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \sin r + z \cos r}{v_2}\right)} \quad (5.134)$$

Vectorii \vec{E} , \vec{H} și \vec{k} formează un triedru tridreptunghic (în ordinea indicată), atât în unda incidentă, cât și în cea reflectată sau refractată. În general vectorii \vec{E} și \vec{H} nu oscilează în planul de incidență, dar se pot descompune în două componente, una aflată în planul de incidență și alta normală pe acest plan. De aceea vom considera separat două unde: una în care vectorul intensitate de câmp electric se află în planul de incidență, iar vectorul intensitate de câmp magnetic este perpendicular pe planul de incidență (ca în figura de mai sus, unde orientarea vectorilor $\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{u}_i$; $\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{u}_r$; $\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{u}_t$ respectă regula burghiului drept) și una în care orientările celor două câmpuri sunt inversate.

Condiția de continuitate (5.127) poate fi explicitată pe baza figurii și a relațiilor (5.132) – (5.134) (reamintim că în acest caz $z = 0$):

$$E_{0i} \cos i \cdot e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin i}{v_1}\right)} - E_{0r} \cos i' \cdot e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin i'}{v_1}\right)} = E_{0t} \cos r \cdot e^{\hat{i}\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2}\right)} \quad (5.135)$$

Această ecuație este adevărată pentru orice x numai dacă:

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin i'}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2} \quad (5.136)$$

Din această relație obținem a doua lege a reflexiei:

$$i = i' \quad (5.137)$$

(unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie) și legea a doua a refracției (legea lui Snell):

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (5.138)$$

unde am folosit relația (5.68). Legea lui Snell se enunță și sub forma conservării cantității $n \cdot \sin i$ atunci când o undă electromagnetică traversează o interfață:

$$n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r \quad (5.139)$$

5.7.2. Relațiile lui Fresnel

Folosind (5.136), relația (5.135) se reduce la:

$$(E_{oi} - E_{or}) \cos i = E_{ot} \cos r \quad (5.140)$$

Din relațiile (5.54) și (5.126) obținem:

$$\begin{aligned} \vec{H}_i &= \frac{1}{\mu_1 \omega} (\vec{k}_i \times \vec{E}_i) = \frac{1}{\mu_1 \omega} \left(\frac{\omega}{v_1} \cdot \vec{u}_i \times \vec{E}_i \right) \Rightarrow \vec{H}_i = \frac{1}{\mu_1 v_1} (\vec{u}_i \times \vec{E}_i) \\ \vec{H}_r &= \frac{1}{\mu_1 v_1} (\vec{u}_r \times \vec{E}_r) \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{\mu_2 v_2} (\vec{u}_t \times \vec{E}_t) \end{aligned} \quad (5.141)$$

Deoarece toți vectorii intensitate de câmp magnetic au direcția și sensul axei Oy , putem abandona semnul de vector. Din (5.141) obținem:

$$H_i = \frac{1}{\mu_1 v_1} \cdot E_i, \quad H_r = \frac{1}{\mu_1 v_1} \cdot E_r, \quad H_t = \frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot E_t \quad (5.142)$$

Pe baza relațiilor (5.142), (5.132) – (5.134) și (5.136), condiția de continuitate a componenteii tangențiale a lui H de-a lungul suprafeței de separare Σ se exprimă astfel:

$$(\vec{H}_i)_{tg} + (\vec{H}_r)_{tg} = (\vec{H}_t)_{tg} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{oi} + E_{or}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot E_{ot} \quad (5.143)$$

Eliminând E_{ot} între relațiile (5.140) și (5.143) obținem:

$$\begin{aligned} (E_{oi} - E_{or}) \cos i &= \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} (E_{oi} + E_{or}) \cos r \Rightarrow \\ E_{oi} \left(\cos i - \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} \cdot \cos r \right) &= E_{or} \left(\frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} \cdot \cos r + \cos i \right) \Rightarrow \\ \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\Downarrow} &= \frac{\mu_1 v_1 \cos i - \mu_2 v_2 \cos r}{\mu_1 v_1 \cos i + \mu_2 v_2 \cos r} \end{aligned} \quad (5.144)$$

Am pus indicele \Downarrow întrucât am considerat cazul în care vectorii \vec{E}_i , \vec{E}_r și \vec{E}_t sunt paraleli la planul de incidență (ca în figura de mai sus). Pe baza relației (5.68) obținem:

$$\mu_1 v_1 = \mu_1 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = Z_1, \quad \mu_2 v_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = Z_2 \quad (5.145)$$

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{Z_1 \cos i - Z_2 \cos r}{Z_1 \cos i + Z_2 \cos r} \quad (5.146)$$

Înlocuind (5.145) și (5.146) în (5.143) obținem:

$$E_{ot} = \frac{Z_2}{Z_1} (E_{oi} + E_{or}) = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot E_{oi} \left(1 + \frac{Z_1 \cos i - Z_2 \cos r}{Z_1 \cos i + Z_2 \cos r}\right) = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot E_{oi} \left(\frac{2 Z_1 \cos i}{Z_1 \cos i + Z_2 \cos r}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{2 Z_2 \cos i}{Z_1 \cos i + Z_2 \cos r} \quad (5.147)$$

Din (5.138) și (5.145) rezultă:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sin i}{\sin r} \quad (5.148)$$

Pentru medii dielectrice pure (nemagnetice):

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

În acest caz, relațiile (5.146) și (5.147) devin:

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \cos i - \cos r}{\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \cos i + \cos r} = \frac{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i - \cos r}{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i + \cos r} = \frac{\sin i \cdot \cos i - \sin r \cdot \cos r}{\sin i \cdot \cos i + \sin r \cdot \cos r} =$$

$$= \frac{\sin i \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos i}{\cos i \cdot \cos r + \sin i \cdot \sin r} \cdot \frac{\cos i \cdot \cos r - \sin i \cdot \sin r}{\sin i \cdot \cos r + \sin r \cdot \cos i} = \frac{\sin(i-r)}{\cos(i-r)} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(i-r)}{\cos(i-r)} = \frac{\sin(i+r)}{\cos(i+r)}$$

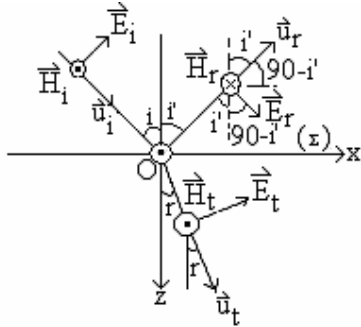
$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \quad (5.149)$$

$$\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \cos i}{\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \cos i + \cos r} = \frac{2 \cdot \cos i}{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i + \cos r} = \frac{2 \cdot \sin r \cdot \cos i}{\sin i \cdot \cos i + \sin r \cdot \cos r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \sin r \cdot \cos i}{\sin(i+r) \cdot \cos(i-r)}} \quad (5.150)$$

(5.146) și (5.147) sau (5.149) și (5.150) sunt relațiile lui Fresnel în cazul în care vectorul \vec{E}_i vibrează paralel cu planul de incidență. Se constată că dacă undele incidente sunt plan polarizate atunci și undele reflectate și refractate vor fi tot plan polarizate, vectorii \vec{E}_r și \vec{E}_t vibrând tot în planul de incidență. Dacă în figura anterioară se schimbă sensul lui \vec{E}_r (este

evident că se schimbă și sensul lui \vec{H}_r) ca în figura de mai jos, atunci în (5.140) $-E_{0r}$ trece în E_{0r} , iar în (5.143) E_{0r} trece în $-E_{0r}$ (deoarece \vec{H}_r are sensul opus axei Oy). În acest caz în ecuațiile (5.146) și (5.149) E_{0r} trece în $-E_{0r}$:



$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{Z_2 \cos r - Z_1 \cos i}{Z_2 \cos r + Z_1 \cos i} \quad (5.146')$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = - \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \quad (5.149')$$

Relațiile (5.147) și (5.150) rămân neschimbate.

Pentru a face distincție între cele două situații prezentate în figurile de mai sus, vom exprima relațiile lui Fresnel (5.149) și (5.150) în funcție de raportul indicilor de refracție, folosind relația (5.138):

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i - \cos r}{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i + \cos r} \Rightarrow \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1} \right) \cos i - \cos r}{\left(\frac{n_2}{n_1} \right) \cos i + \cos r} \quad (5.151)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \cos i}{\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \cos i + \cos r} \Rightarrow \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \cos i}{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos i + \cos r} \quad (5.152)$$

Din relația (5.152) se constată că unda transmisă este întotdeauna în fază cu unda incidentă (E_{0t} și E_{0i} sunt în fază la interfață deoarece raportul lor este întotdeauna pozitiv). Din relațiile (5.151) și (5.138) rezultă că E_{0r} și E_{0i} pot fi în fază (raportul E_{0r} / E_{0i} este pozitiv) sau în opoziție de fază (raportul E_{0r} / E_{0i} este negativ), în funcție atât de raportul n_2 / n_1 , cât și de valorile unghiurilor i și r . Astfel E_{0r} și E_{0i} sunt în fază dacă numărătorul din membrul drept al relației (5.151) este pozitiv (în acest caz numitorul este pozitiv).

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_1} \cos i > \cos r &\Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} \cos i > \cos r \Rightarrow \sin i \cdot \cos i - \sin r \cdot \cos r > 0 \Rightarrow \\ \sin 2i - \sin 2r > 0 &\Rightarrow 2 \sin \frac{2i-2r}{2} \cdot \cos \frac{2i+2r}{2} > 0 \Rightarrow \sin(i-r) \cos(i+r) > 0 \Rightarrow \\ &i > r \quad \text{și} \quad i+r < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\begin{aligned} &(n_1 < n_2) \\ &(\text{aer} - \text{sticlă}) \end{aligned}$$

sau:

$$i < r \quad \text{și} \quad i+r > \frac{\pi}{2} \quad (5.154)$$

$$(n_1 > n_2)$$

(sticlă - aer)

În cazul figurii de mai sus, comparând relațiile (5.149') și (5.149), în locul relației (5.151) obținem (se schimbă semnul):

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow\downarrow} = \frac{\cos r - \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \cos i}{\cos r + \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \cos ir} \quad (5.155)$$

În acest caz E_{0r} și E_{0i} sunt în fază dacă $\sin(r - i) \cos(i + r) > 0 \Rightarrow$

$$i > r \quad \text{și} \quad i + r > \frac{\pi}{2} \quad (5.153')$$

$$(n_1 < n_2)$$

(aer - sticlă)

sau:

$$i < r \quad \text{și} \quad i + r < \frac{\pi}{2} \quad (5.154')$$

$$(n_1 > n_2)$$

(sticlă - aer)

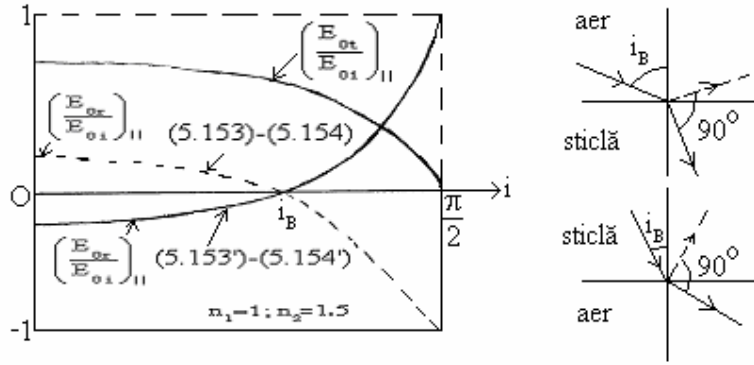
În cazul incidenței pe suprafața aer - sticlă ($n_1 = 1; n_2 = 1,5$), reprezentarea grafică a rapoartelor $(E_{0r}/E_{0i})_{\downarrow\downarrow}$, $(E_{0t}/E_{0i})_{\downarrow\downarrow}$ în funcție de unghiul de incidență i ne arată că E_{0r} este în fază cu E_{0i} dacă este îndeplinită relația (5.153') corespunzătoare figurii de la pagina 68 și nu relația (5.153) corespunzătoare figurii de la pagina 63.

Se constată că raportul $(E_{0r}/E_{0i})_{\downarrow\downarrow}$ se anulează pentru $i = i_B$ care verifică relația:

$$i_B + r = \frac{\pi}{2} \quad (5.156)$$

Rezultă că în cazul în care este îndeplinită această relație nu există undă reflectată atunci când unda incidentă este polarizată cu vectorul ei \vec{E}_i paralel cu planul de incidență (unda trece prin interfață fără reflexie). Unghiul de incidență i_B (la trecerea aer - sticlă $i_B = 56,3^\circ$) este numit unghi Brewster sau unghi de polarizare, deoarece o undă incidentă nepolarizată pentru care $i = i_B$ este reflectată ca o undă polarizată în care vectorul ei \vec{E}_r este perpendicular pe planul de incidență. Pentru $i = i_B$ relația (5.138) devine:

$$\frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{\sin i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)} = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \operatorname{tg} i_B = n_2/n_1 \Rightarrow i_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \quad (5.157)$$



Relația (5.157) permite determinarea indicelui de refracție relativ (n_2/n_1) dacă i_B este cunoscut din experiență.

Pentru a obține legăturile dintre amplitudinile undelor incidente, reflectate și transmise (relațiile lui Fresnel) în cazul în care unda incidentă este polarizată cu \vec{E}_i perpendicular pe planul de incidență, vom scrie condițiile de continuitate a componentelor tangențiale ale vectorilor \vec{E} și \vec{H} la suprafața de separare a celor două medii:

$$\underbrace{E_{ix}}_{=0} + \underbrace{E_{rx}}_{=0} = \underbrace{E_{tx}}_{=0}, \quad E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}, \quad H_{ix} + H_{rx} = H_{tx}, \quad \underbrace{H_{iy}}_{=0} + \underbrace{H_{ry}}_{=0} = \underbrace{H_{ty}}_{=0} \quad (5.158)$$

Deoarece \vec{E}_i, \vec{E}_r și \vec{E}_t sunt paraleli cu axa Oy , iar \vec{H}_i, \vec{H}_r și \vec{H}_t sunt în planul xOz (nu au componente pe axa Oy), din relațiile (5.158) obținem:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (5.159)$$

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx} \quad (5.160)$$

unde H_{ix}, H_{rx} și H_{tx} se determină pe baza relațiilor (5.141):

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\mu_1 v_1} \vec{u}_i \times \vec{E}_i = \frac{1}{\mu_1 v_1} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin i & 0 & \cos i \\ 0 & E_i & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{ix} = -\frac{1}{\mu_1 v_1} \cdot E_i \cos i \quad (5.161)$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\mu_1 v_1} \vec{u}_r \times \vec{E}_r = \frac{1}{\mu_1 v_1} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin i & 0 & -\cos i \\ 0 & E_r & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{rx} = \frac{1}{\mu_1 v_1} \cdot E_r \cos i \quad (5.162)$$

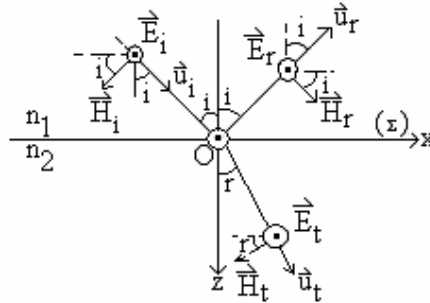
$$\vec{H}_t = \frac{1}{\mu_2 v_2} \vec{u}_t \times \vec{E}_t = \frac{1}{\mu_2 v_2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin r & 0 & \cos r \\ 0 & E_t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{tx} = -\frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot E_t \cos r \quad (5.163)$$

Înlocuind în (5.160), obținem:

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_r - E_i) \cos i = -\frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot E_t \cdot \cos r \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0r} - E_{0i}) \cos i = -\frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot E_{0t} \cdot \cos r \quad (5.164)$$

La același rezultat se ajunge dacă se folosește relația (5.160) și figura de mai jos ($-H_i \cos i + H_r \cos i = -H_t \cos r \Rightarrow (H_{0r} - H_{0i}) \cos i = -H_{0t} \cos r$):



Eliminând E_{0t} între relațiile (5.159) și (5.164), obținem:

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0r} - E_{0i}) \cos i = -\frac{1}{\mu_2 v_2} (E_{0i} + E_{0r}) \cos r \Rightarrow$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} (E_{0r} - E_{0i}) \cos i = -(E_{0i} + E_{0r}) \cos r \Rightarrow$$

$$E_{0r} [(Z_2 / Z_1) \cos i + \cos r] = E_{0i} [(Z_2 / Z_1) \cos i - \cos r] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i - \cos r}{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i + \cos r} \quad (5.165)$$

Din relația (5.159) rezultă:

$$E_{0t} = E_{0i} + \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i - \cos r}{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i + \cos r} E_{0i} = E_{0i} \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i + \cos r + \frac{Z_2}{Z_1} \cos i - \cos r}{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i + \cos r} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \cos i}{\frac{Z_2}{Z_1} \cos i + \cos r} \quad (5.166)$$

(5.165) și (5.166) constituie a doua pereche de relații Fresnel.

Pentru medii nemagnetice:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.167)$$

În acest caz, relațiile lui Fresnel (5.165) și (5.166) devin:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i - \cos r}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i + \cos r} \quad (5.168)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i + \cos r} \quad (5.169)$$

sau:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{\frac{\sin r}{\sin i} \cdot \cos i - \cos r}{\frac{\sin r}{\sin i} \cdot \cos i + \cos r} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}} \quad (5.170)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2 \cdot \frac{\sin r}{\sin i} \cdot \cos i}{\frac{\sin r}{\sin i} \cdot \cos i + \cos r} \quad \boxed{\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin r \cdot \cos i}{\sin(i+r)}} \quad (5.171)$$

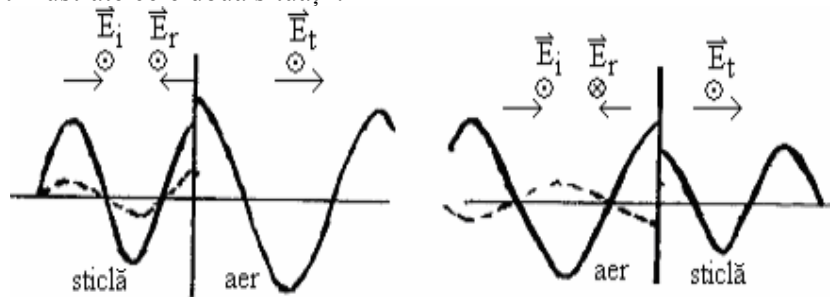
Din relația (5.168) se constată că E_{0r} și E_{0i} sunt în fază dacă:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i - \cos r > 0 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} > 1 \Rightarrow n_1 > n_2 \Rightarrow i < r \text{ și } \cos i > \cos r \quad (5.172)$$

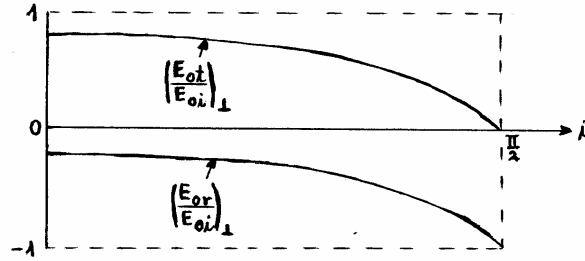
Reflexia are loc cu un defazaj egal cu π dacă:

$$\frac{n_1}{n_2} < 1 \Rightarrow n_1 < n_2 \Rightarrow i > r \text{ și } \cos i < \cos r \quad (5.173)$$

La același rezultat se ajunge pe baza relației (5.170). Din (5.169) sau din (5.171) se constată că unda transmisă este întotdeauna în fază cu unda incidentă. În figurile de mai jos sunt ilustrate cele două situații.



Unda transmisă este parțial polarizată, oricare ar fi unghiul de incidență. Utilizarea unui număr suficient de mare de plăci dielectrice poate face ca unda transmisă să aibă un grad de polarizare foarte mare (intensitatea luminii transmise este mult mai mare decât intensitatea luminii reflectate). În cazul incidenței pe suprafața aer – sticlă, reprezentarea grafică a rapoartelor $\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp}$, $\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp}$ în funcție de unghiul de incidență i este în acord cu relația (5.173).



Pentru medii dielectrice pure ($\mu_r = 1 \Rightarrow \mu = \mu_0$), intensitățile undelor incidente, reflectate și refractate se exprimă cu ajutorul relației (5.66):

$$I_i = |\bar{S}_i| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cdot E_{0i}^2, \quad I_r = |\bar{S}_r| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cdot E_{0r}^2, \quad I_t = |\bar{S}_t| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \cdot E_{0t}^2 \quad (5.174)$$

Fluxurile de energie medii în unitatea de timp și pe unitatea de suprafață a interfeței sunt:

$$\bar{\Phi}_i = |\bar{S}_i| \bar{u}_i \cdot \bar{u}_n = I_i \bar{u}_i \cdot \bar{u}_n = I_i \cos i \quad (5.175)$$

$$\bar{\Phi}_r = |\bar{S}_r| \bar{u}_r \cdot \bar{u}_n = I_r \bar{u}_r \cdot \bar{u}_n = -I_r \cos i \quad (5.176)$$

$$\bar{\Phi}_t = |\bar{S}_t| \bar{u}_t \cdot \bar{u}_n = I_t \bar{u}_t \cdot \bar{u}_n = I_t \cos r \quad (5.177)$$

(proiecțiile mediilor temporale ale vectorilor Poynting pe direcția normalei la suprafața de separare), unde \bar{u}_n este versorul normalei la suprafața de separare, de componente 0, 0, 1, iar \bar{u}_i (sin i, 0, cos i), \bar{u}_r (sin i, 0, -cos i) și \bar{u}_t (sin r, 0, cos r) sunt versorii direcțiilor de propagare a undelor. Se definește coeficientul de reflexie R și coeficientul de transmisie T prin rapoartele:

$$R = \frac{|\bar{\Phi}_r|}{|\bar{\Phi}_i|} \Rightarrow R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 \quad (5.178)$$

$$T = \frac{|\bar{\Phi}_t|}{|\bar{\Phi}_i|} \Rightarrow T = \frac{I_t}{I_i} \cdot \frac{\cos r}{\cos i} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \quad (5.179)$$

Deoarece:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} \stackrel{(5.70)}{=} \frac{n_2}{n_1} \quad (5.180)$$

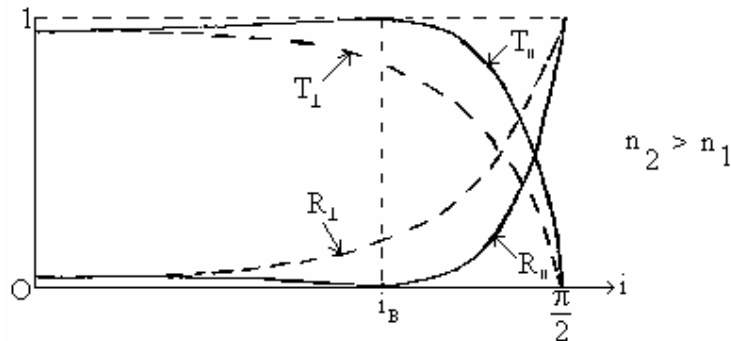
rezultă:

$$T = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \quad (5.181)$$

Întrucât am neglijat pierderile, energia totală se conservă, adică:

$$R + T = 1 \quad (5.182)$$

Relațiile (5.178) , (5.181) și (5.182) sunt valabile atât pentru undele ale căror vectori intensitate de câmp electric sunt în planul de incidență, cât și pentru undele la care vectorii \vec{E}_i , \vec{E}_r și \vec{E}_t sunt paraleli cu interfața.



Din figura de mai sus se constată că pentru unghiul Brewster i_B , $R_{\perp} = 0$ și $T_{\perp} = 1$, în acord cu figura de la pagina 69.

În cazul incidenței normale ($i = r = 0$), cele două perechi de ecuații Fresnel sunt identice (planul de incidență este nedefinit). În acest caz, din relațiile (5.155) , (5.168) , (5.178) , (5.152) , (5.169) și (5.181) obținem:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{1 - \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{n_2}{n_1}}, \quad \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\frac{n_1}{n_2} + 1} = \frac{1 - \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{n_2}{n_1}} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp}; \quad \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

$$R = \left(\frac{1 - n_{21}}{1 + n_{21}}\right)^2 \quad (5.183)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + 1}, \quad \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2} + 1} = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + 1} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp}$$

$$T = \frac{4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2} \quad (5.184)$$

$$R + T = \frac{1 - 2n_{21} + n_{21}^2 + 4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2} = \frac{(n_{21} + 1)^2}{(n_{21} + 1)^2} = 1$$

La trecerea din aer în sticlă, $n_{21} = 1,5$, iar coeficientul de reflexie R calculate pe baza relației (5.183) este destul de mare:

$$R = \left(\frac{1 - 1,5}{1 + 1,5}\right)^2 = \left(\frac{0,5}{2,5}\right)^2 = 0,04 = 4\%$$

Dacă lumina trece prin 5 lentile are loc o pierdere prin reflexie de 20% din intensitatea luminii incidente (vezi relația (5.178)). Pentru a avea un coeficient de reflexivitate mic se impune ca n_{21} să fie cât mai aproape de 1.

5.7.3. Reflexia totală

Pe baza relațiilor (5.152), (5.167) și (5.181) obținem:

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \cos i \cdot \sin r}{\sin i \cdot \cos i + \sin r \cdot \cos r} \Rightarrow \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\downarrow} = \frac{2 \cdot \cos i \cdot \sin r}{\sin(i+r) \cdot \cos(i-r)} \quad (5.185)$$

$$T_{\downarrow} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\downarrow}^2 \cdot \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{4 \cdot \cos^2 i \cdot \sin^2 r}{\sin^2(i+r) \cdot \cos^2(i-r)} \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \Rightarrow$$

$$T_{\downarrow} = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i+r) \cdot \cos^2(i-r)} \quad (5.186)$$

$$T_{\perp} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp}^2 \cdot \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{4 \cdot \sin^2 r \cdot \cos^2 i}{\sin^2(i+r)} \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \Rightarrow$$

$$T_{\perp} = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i+r)} \quad (5.187)$$

Din relațiile (5.186) și (5.187) rezultă că pentru $r = \frac{\pi}{2}$ obținem $\sin 2r = 0$ și deci

$T_{\downarrow} = T_{\perp} = 0$. În acest caz, din (5.167) rezultă:

$$\frac{\sin i_c}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \boxed{\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}} \quad (5.188)$$

În cazul când $n_2 < n_1$ (ca exemplu se consideră trecerea radiației din sticlă în aer), pentru $i \geq i_c$ are loc fenomenul de reflexie totală (nu avem radiație transmisă). În acest caz:

$$\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i \geq 1 \quad (5.189)$$

La trecerea unei unde electromagnetice din sticlă în aer ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$) unghiul critic de incidență i_c pentru care $r = \pi/2$ este de $41,8^\circ$. Pentru $i = 60^\circ$ rezultă $\sin r = 1,3$. Sinusul nu poate fi supraunitar decât pentru valori complexe ale argumentului r . Astfel, pentru $i > i_c$ nu există nici un unghi real după care să aibă loc refracția luminii în cel de-al doilea mediu. Deși, pentru $i > i_c$, coeficientul de reflexivitate R este egal cu unitatea, pătrunderea unde în cel de-al doilea mediu trebuie să aibă loc în orice caz pe o distanță comparabilă cu lungimea de undă a radiației, pentru a putea fi satisfăcută continuitatea componentelor tangențiale ale intensității câmpului electric și a celui magnetic. Unda care pătrunde în mediul al doilea se întoarce în primul mediu din diferite plane situate în imediata vecinătate a suprafeței de separare Σ .

Mediul 2 acționează ca o inductanță pură alimentată de la o sursă de tensiune alternativă (puterea se scurge într-un sens, apoi în sens opus, astfel că valoarea medie a puterii scurse este zero).

Presupunem că r este o mărime complexă de forma:

$$r = A + \hat{i} B \quad (5.190)$$

Pe baza formulei:

$$\sin x = \frac{e^{\hat{i}x} - e^{-\hat{i}x}}{2\hat{i}}$$

obținem:

$$\sin r = \sin(A + \hat{i}B) = \frac{e^{\hat{i}(A + \hat{i}B)} - e^{-\hat{i}(A + \hat{i}B)}}{2\hat{i}} = \frac{e^{\hat{i}A} e^{-B} - e^{-\hat{i}A} e^B}{2\hat{i}} \quad (5.191)$$

Deoarece $\sin r$ este o mărime reală (conform relației (5.189)) vom lua $A = \pi/2$.
Rezultă:

$$r = \frac{\pi}{2} + \hat{i} B \quad (5.192)$$

$$\sin r = \frac{\hat{i}e^{-B} + \hat{i}e^B}{2\hat{i}} = \frac{e^B + e^{-B}}{2} = \text{ch } B; \quad (5.193)$$

$$\cos r = \frac{e^{\hat{i}(A + \hat{i}B)} + e^{-\hat{i}(A + \hat{i}B)}}{2} = \frac{\hat{i}(e^{-B} - e^B)}{2} = -\hat{i} \text{sh } B$$

$$\cos r = \pm \sqrt{1 - \sin^2 r} = \pm \sqrt{-(\sin^2 r - 1)} = \mp \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1} \Rightarrow$$

$$\cos r = -\hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1} \quad (5.194)$$

Am ales semnul $-$ în fața radicalului din (5.194) pentru a fi în acord cu a doua relație din (5.193). Pentru $i = 60^\circ$ rezultă $\sin r = 1,3$; $B = 0,75$; $r = \frac{\pi}{2} + 0,75 \hat{i}$; $\cos r = -0,83 \hat{i}$. Utilizând forma exponențială a unui număr complex:

$$a \pm \hat{i} b = \rho e^{\pm \hat{i} \frac{\varphi}{2}}, \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{tg } \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

putem scrie relațiile (5.151), (5.168), (5.152) și (5.169) sub forma:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{n_{21} \cos i - \cos r}{n_{21} \cos i + \cos r} = \frac{n_{21} \cos i + \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}}{n_{21} \cos i - \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}} = \frac{\rho e^{\hat{i} \frac{\varphi_{\downarrow}}{2}}}{\rho e^{-\hat{i} \frac{\varphi_{\downarrow}}{2}}} = e^{\hat{i} \varphi_{\downarrow}} \quad (5.195)$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\cos i - \cos r}{n_{21} \cos i + \cos r} = \frac{\cos i + \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}}{n_{21} \cos i - \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}} = e^{\hat{i} \varphi_{\perp}}; \quad (E_{0r})_{\perp} = e^{\hat{i} \varphi_{\perp}} (E_{0i})_{\perp} \quad (5.196)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{2 \cos i}{n_{21} \cos i + \cos r} = \frac{2 \cos i}{n_{21} \cos i - \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{n_{21}^2 \cos^2 i + \sin^2 r - 1} \cdot e^{-\hat{i} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2}}} \quad (5.197)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{2 \cos i}{n_{21}}}{\frac{\cos i}{n_{21}} + \cos r} = \frac{\frac{2 \cos i}{n_{21}}}{\frac{\cos i}{n_{21}} - \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}} = \frac{\frac{2 \cos i}{n_{21}}}{\sqrt{\frac{\cos^2 i}{n_{21}^2} + \sin^2 r - 1} \cdot e^{-\hat{i} \frac{\Phi_{\perp}}{2}}} \quad (5.198)$$

unde:

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 r - 1}}{n_{21} \cos i}, \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 r - 1}}{\cos i} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\perp}}{2} = n_{21}^2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2} \quad (5.199)$$

Înlocuind $\sin r$ cu $\frac{\sin i}{n_{21}}$ (conform relației (5.189)) în (5.197) – (5.199) obținem:

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\downarrow} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{n_{21}^2 \cos^2 i + \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} \cdot e^{\hat{i} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2}} \quad (5.200)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{\cos^2 i + n_{21}^2 (\sin^2 r - 1)}} \cdot e^{\hat{i} \frac{\Phi_{\perp}}{2}} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{\cos^2 i + n_{21}^2 \cdot \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - n_{21}^2}} \cdot e^{\hat{i} \frac{\Phi_{\perp}}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(E_{0t} \right)_{\perp} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{1 - n_{21}^2}} \cdot e^{\hat{i} \frac{\Phi_{\perp}}{2}} \cdot \left(E_{0i} \right)_{\perp} \quad (5.201)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}}{n_{21} \cos i} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\downarrow}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{n_{21} \cdot \cos i} \quad (5.202)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_{\perp}}{2} = \frac{n_{21} \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}}{\cos i} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\cos i} \quad (5.203)$$

Dacă în locul relației (5.151) folosim relația (5.155) obținem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)'_{\downarrow} &= \frac{\cos r - n_{21} \cos i}{\cos r + n_{21} \cos i} = \frac{-\hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1} - n_{21} \cos i}{-\hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1} + n_{21} \cos i} = \frac{\sqrt{\sin^2 r - 1} - \hat{i} n_{21} \cos i}{\sqrt{\sin^2 r - 1} + \hat{i} n_{21} \cos i} = e^{-\hat{i} \frac{\varphi'_{\downarrow}}{2}} = \\ &= e^{-\hat{i} \varphi'_{\downarrow}} \Rightarrow \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)'_{\downarrow} = e^{\hat{i} \varphi''_{\downarrow}}, \quad \varphi''_{\downarrow} = -\varphi'_{\downarrow} \end{aligned} \quad (5.204)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi'_{\downarrow}}{2} = \frac{n_{21} \cos i}{\sqrt{\sin^2 r - 1}} \Rightarrow \varphi''_{\downarrow} = -2 \operatorname{arctg} \frac{n_{21} \cdot \cos i}{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}} \quad (5.205)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)'_{\downarrow} &= \frac{\hat{i} \cdot 2 \cdot \cos i}{\sqrt{\sin^2 r - 1} + \hat{i} n_{21} \cos i} = \frac{2 \cdot \cos i \cdot e^{\hat{i} \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\sin^2 r - 1 + n_{21}^2 \cos^2 i} \cdot e^{\hat{i} \frac{\varphi'_{\downarrow}}{2}}} = \\ &= \frac{2 \cos i \cdot e^{\hat{i} \left(\frac{\varphi''_{\downarrow}}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}}{\sqrt{1 - \sin^2 r - n_{21}^2 \cos^2 i}} \end{aligned} \quad (5.206)$$

Din (5.195), (5.196) și (5.204) rezultă:

$$R = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^* \cdot \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = 1 \quad (5.207)$$

adică reflexia totală are loc fără pierderi.

Așadar, deși pătrunde și în mediul al doilea, unda se reflectă totuși în totalitate. Din relațiile (5.195) – (5.205) se constată că există un defazaj între amplitudinile undelor reflectate și transmise față de amplitudinea unei incidente. Întrucât, în general, diferența de fază $\varphi = \varphi_{\downarrow} - \varphi_{\perp}$ dintre cele două unde polarizate în planuri perpendiculare are valori diferite de $n\pi$, unda reflectată total este polarizată eliptic. Pentru $i = 60^\circ$ rezultă $\varphi_{\perp} = 95,7^\circ$ ($n_{21} = 1/1,5$).

Din relațiile (5.134), (5.193) și (5.194) obținem:

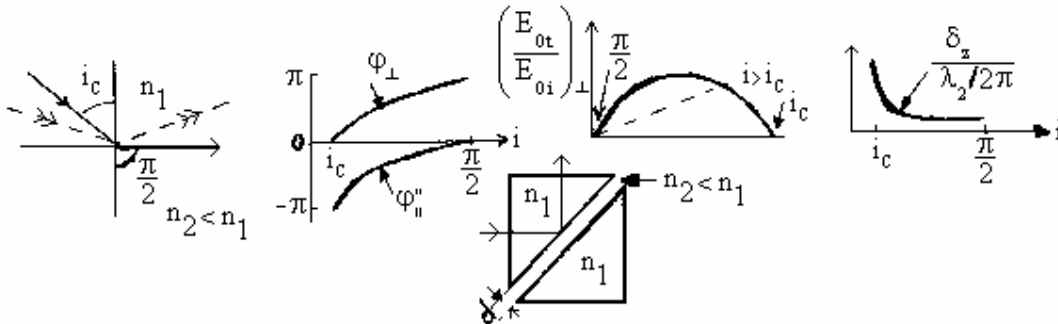
$$\begin{aligned} \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cdot e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r + z \cdot \cos r}{v_2} \right)} &= \vec{E}_{0t} \cdot e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r - \hat{i} z \sqrt{\sin^2 r - 1}}{v_2} \right)} \Rightarrow \\ \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cdot e^{-\frac{\omega z \sqrt{\sin^2 r - 1}}{v_2}} \cdot e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} &= \vec{E}_{0t} \cdot e^{-\frac{z}{\delta_z}} \cdot e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} \end{aligned} \quad (5.208)$$

unde δ_z este distanța de atenuare în direcția perpendiculară la interfață:

$$\delta_z = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\sin^2 r - 1}} = \frac{v_2}{\omega \cdot \text{sh } B} \quad (5.58) = \frac{1}{k_2 \text{ sh } B} = \frac{\lambda_2}{2\pi \cdot \text{sh } B} \quad (5.209)$$

Din relația (5.208) rezultă că în cazul unghiului de refracție complex ($i > i_c$) unda pătrunde în mediul al doilea, dar se atenuază rapid, amplitudinea ei scăzând exponențial cu distanța. Astfel această undă se propagă în lungul axei Ox și este atenuată în lungul axei Oz. Unda descrisă de relația (5.208) care se propagă paralel cu suprafața de separare, pătrunzând în mediul al doilea numai pe o distanță foarte mică (de ordinul lungimii de undă) se numește undă evanescentă. Pentru $i = 60^\circ$, $n_{21} = 1/1,5$, rezultă $\delta_z = \lambda_2 / 5,2$.

Pentru a pune în evidență undele evanescente, se consideră un mediu cu indicele de refracție n_2 aflat între două piese cu indicele de refracție $n_1 > n_2$. Dacă grosimea mediului intermediar $d < \lambda$, atunci unda pătrunde în cea de-a doua piesă (are loc fenomenul de reflexivitate totală frustată). Fenomenul este analog cu efectul tunel din mecanica cuantică (avem un efect tunel optic). Amplitudinea unei evanescente este maximă la unghiul critic (limită) i_c .



În cazul în care una incidentă este polarizată cu \vec{E}_i perpendicular pe planul de incidență, din relațiile (5.113), (5.141), (5.163), (5.201), (5.208) și (5.209) obținem:

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{u}_t \times \vec{E}_t}{\mu_2 v_2} = \frac{1}{\mu_2 v_2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin r & 0 & \cos r \\ 0 & E_t & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_t}{\mu_2 v_2} (-\vec{i} \cdot \cos r + \vec{k} \cdot \sin r) \quad (5.210)$$

$$\vec{E}_t = (\vec{E}_{0t})_{\perp} \cdot \vec{j} \cdot e^{-z/\delta_z} \cdot e^{\hat{i}\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} \quad (5.211)$$

$$(\vec{E}_{0t})_{\perp} = \frac{2 \cdot \cos i}{\sqrt{1 - n_{21}^2}} \cdot e^{\hat{i} \frac{\varphi_{\perp}}{2}} \cdot (\vec{E}_{0i})_{\perp} \Rightarrow (\vec{E}_{0t})_{\perp}^* (\vec{E}_{0t})_{\perp} = \frac{4 \cdot \cos^2 i}{1 - n_{21}^2} \cdot (\vec{E}_{0i})_{\perp}^2 \quad (5.212)$$

$$\overline{S}_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left| \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \right| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(E_{0t} \right)_\perp \cdot \vec{j} \cdot e^{-z/\delta_z} \cdot e^{\hat{i}\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} \cdot \frac{E_t^*}{\mu_2 v_2} \left(-\vec{i} \cos r + \vec{k} \sin r \right) \right]$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \sin r = \frac{\sin i}{n_{21}} \cdot 2 \cdot \sin i \cdot \cos i = \sin 2i$$

$$\overline{S}_{tx} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(E_{0t} \right)_\perp \cdot e^{-z/\delta_z} \cdot e^{\hat{i}\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} \cdot \frac{\left(E_{0t} \right)_\perp^*}{\mu_2 v_2} \cdot e^{-z/\delta_z} \cdot e^{-\hat{i}\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin r}{v_2} \right)} \cdot \sin r \right]$$

$$\overline{S}_{tx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \cos^2 i}{1 - n_{21}^2} \cdot \left(E_{0i} \right)_\perp^2 \cdot e^{-2z/\delta_z} \cdot \frac{1}{\mu_2 v_2} \cdot \sin r, \quad \mu_2 v_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{n_2},$$

$$\overline{S}_{tx} = \frac{2 \cdot \cos^2 i}{1 - n_{21}^2} \cdot \left(E_{0i} \right)_\perp^2 \cdot e^{-2z/\delta_z} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot n_2 \cdot \frac{\sin i}{n_{21}}, \quad \frac{n_2}{n_{21}} = \frac{n_2}{\frac{n_2}{n_1}} = n_1$$

$$\overline{S}_{tx} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{n_1 \cos i \cdot \sin 2i}{1 - n_{21}^2} \cdot \left(E_{0i} \right)_\perp^2 \cdot e^{-2z/\delta_z} \quad (5.213)$$

unde

$$\begin{aligned} \delta_z &= \frac{v_2}{\omega \sqrt{\sin^2 r - 1}} = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} = \frac{1}{k_2 \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} = \\ &= \frac{\lambda_0}{n_2 \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} = \frac{\lambda_0}{2\pi n_2 \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} - 1}} \end{aligned} \quad (5.214)$$

$\overline{S}_{tz} = 0$ deoarece $\cos^* r = \hat{i} \sqrt{\sin^2 r - 1}$ este o mărime complexă care face ca S_{tz} să fie o mărime pur imaginară (partea reală lipsește). Expresia lui \overline{S}_{tz} este obținută din \overline{S}_{tx} , înlocuind $\sin r$ cu $\cos^* r$. Mărimea $\cos i$ este reală, pentru că și i este real.

Deoarece $\overline{S}_{ty} = \overline{S}_{tz} = 0$ rezultă că propagarea undei evanescențe în mediul al doilea are loc paralel cu interfața, în sensul pozitiv al axei Ox .

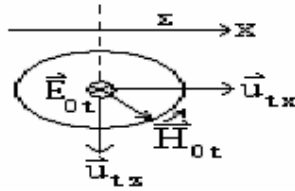
$$\overline{S}_{t\perp} = \overline{S}_{tx\perp} \cdot \vec{i} \quad (5.215)$$

Din relația (5.210) obținem:

$$H_{tx} = -\frac{E_t \cos r}{\mu_2 v_2} = \hat{i} \frac{E_t}{\mu_2 v_2} \cdot \sqrt{\sin^2 r - 1}, \quad \hat{i} = e^{\hat{i} \frac{\pi}{2}} \quad (5.216)$$

$$H_{ty} = 0 \quad (5.217)$$

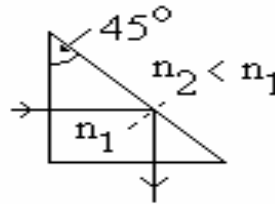
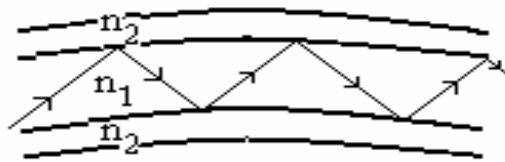
$$H_{tz} = \frac{E_t \sin r}{\mu_2 v_2}$$



$$\vec{u}_t = \vec{u}_{tx} + i \vec{u}_{tz} \quad (5.218)$$

Deoarece $\sin r$ este real și pozitiv, iar $\cos r$ este imaginar și negativ, există un defazaj egal cu $\pi/2$ între componentele x și z ale lui \vec{H}_t . De aceea vectorul \vec{H}_t se rotește cu viteza unghiulară ω . Din acest motiv $\overline{S_{tz}} = 0$ (componenta S_{tz} își schimbă sensul la fiecare jumătate de perioadă). Astfel \vec{H}_t nu este transversal la direcția de propagare a undei evanescente neuniforme. Într-o undă plană neuniformă de forma (5.208) suprafețele echifaze sunt plane, dar amplitudinea pentru o suprafață echifază dată nu este uniformă (propagarea are loc paralel cu axa x , iar atenuarea în lungul axei z). Deoarece în unda transmisă planele echi-amplitudine $x = \text{constant}$ diferă de planele echifază $z = \text{constant}$, direcția de propagare a planelor echi-amplitudine diferă de direcția de propagare a planelor echifază, aceste două direcții făcând între ele un unghi de 90° (cazul reflexiei totale).

Aceste fenomene sunt importante, având aplicații în transmisia și prelucrarea informației cu ajutorul fibrelor optice, precum și în optica integrată pe baza ghidurilor de undă optice planare (straturi dielectrice cu simetrie plană). O fibră optică este formată dintr-un miez cu indice de refracție n_1 și un înveliș cu indicele de refracție $n_2 < n_1$. Lumina este transmisă prin fibră prin reflexii totale la suprafața dintre miez și înveliș. Fibrele optice se assemblează în fascicule, protejate de o teacă elastică. Frecvențele optice fiind de 10^6 ori mai mari decât cele radio, capacitatea de transmisie a informației printr-un canal optic este mult mai mare. Pierderile într-o fibră optică sunt foarte mici (0,15 dB/km pentru $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$). Diametrul unei fibre optice este sub 0,1 mm. O prismă cu reflexie totală permite schimbarea direcției unui fascicul.



5.7.4. Reflexia și refracția pe medii conductoare

Din relațiile (5.134) și (5.136) rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \sin r + z \cos r}{v_2} \right)} = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \omega \left(t - \frac{x \sin i}{v_1} - \frac{z \cos r}{v_2} \right)} = \\ &= \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{\omega}{v_1} \cdot x \sin i \mp \frac{\omega}{v_2} \cdot z \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2}} \right)} \end{aligned}$$

Deoarece:

$$\frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 = \frac{\omega}{2\pi c} \cdot 2\pi n_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} = \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_0}, \quad \frac{\omega}{v_2} = \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \quad (*)$$

($\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ este lungimea de undă în vid, iar $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 / 2\pi$), atunci

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_0} \cdot x \sin i \mp \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \cdot z \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2}} \right)} \quad (5.219)$$

Presupunem că $\left| n_{21} \right| = \left| \frac{n_2}{n_1} \right| \gg 1$. Această condiție este îndeplinită la reflexia și refracția undelor electromagnetice pe un mediu conductor ($n_1 = n_{\text{aer}} = 1,000268$; $n_2 = n_{\text{cupru}} (v=1\text{MHz}) = 1,1 \cdot 10^8$). Desigur că mediul al doilea trebuie să fie un conductor foarte bun ($\sigma_{\text{cupru}} = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$).

Întrucât:

$$\sin i < 1 \Rightarrow \sin^2 i \ll 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2} \ll \ll 1$$

putem aproxima radicalul din relația (5.219) cu 1. Atunci:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_0} \cdot x \sin i \mp \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \cdot z \right)} \quad (5.220)$$

Deoarece pentru $z \rightarrow \infty$ trebuie ca $E_t \rightarrow 0$ (unda transmisă este aproape uniformă, dar este puternic atenuată) vom alege semnul $-$ în fața coeficientului lui z din (5.220).

În plus:

$$\cos r = + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_{21}^2}} \approx 1 \Rightarrow r \approx 0 \quad (5.221)$$

(unghiul de refracție este complex, dar la un conductor foarte bun partea imaginară a lui r este neglijabilă și $r \approx 0$). Rezultă:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_0} \cdot x \sin i - \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \cdot z \right)} \quad (5.222)$$

Deoarece $x \approx z$ (de același ordin de mărime), $\sin i < 1$, $n_1 \ll n_2 \Rightarrow$

$$n_1 \sin i \ll n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_0} \cdot x \sin i \ll \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \cdot z$$

rezultă:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_0} \cdot z \right)} \rightarrow \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - k_2^* \cdot z \right)} \quad (5.223)$$

unde:

$$\frac{n_2}{\lambda_0} = \frac{\omega}{v_2} \rightarrow k_2^* \stackrel{(5.107)}{=} a - \hat{i} b = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1 - \hat{i}) = \frac{1 - \hat{i}}{\delta} \quad (5.224)$$

(am folosit relația (*)) și am înlocuit indicele de refracție n_2 cu mărimea complexă n_2^* , astfel că în locul lui k_2 am pus k_2^*). Atunci (5.223) devine:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{1 - \hat{i}}{\delta} \cdot z \right)} = \vec{E}_{0t} e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \frac{z}{\delta}} \quad (5.225)$$

sau:

$$\boxed{\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{\hat{i} \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right)}} \quad (5.225')$$

Se constată că unda transmisă în mediul conductor este puternic atenuată în direcția axei z , iar direcția de propagare este în lungul normalei la interfață, indiferent de unghiul de incidență. (Ținând seama de aproximațiile făcute, se spune că unda traversează într-o direcție aproape perpendiculară pe suprafața de separare dintre dielectric și metal). Pentru $z = \delta$ amplitudinea unei transmise scade de e ori.

În aproximația considerată ($|n_2| \gg |n_1|$, $\cos r \approx 1$) din relațiile (5.152), (5.155), (5.168) și (5.169) obținem:

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cdot \cos i}{n_{21} \cos i + \cos r} \approx \frac{2}{n_{21}}, \quad i \neq \pi/2 \quad (5.226)$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\cos r - n_{21} \cos i}{\cos r + n_{21} \cos i} \approx -1, \quad i \neq \pi/2 \quad (5.227)$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{\cos i}{n_{21}} - \cos r}{\frac{\cos i}{n_{21}} + \cos r} \approx -1 \quad (5.228)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \cos i}{\frac{\cos i}{n_{21}} + \cos r} \approx \frac{2 \cos i}{n_{21}} \approx 0 \quad (5.229)$$

} valabile și la suprafața de separare a doi dielectrici dacă $n_{21} \gg 1$

Se constată că R este foarte apropiat de unitate ($R_{\text{cupru}}^{\text{masurat}} = 1,17$). Într-un supraconductor σ este real și tinde la infinit, iar δ tinde la zero ($R \approx 1$).

Chiar dacă fasciculul incident este plan polarizat, fasciculul reflectat și cel transmis sunt polarizate eliptic.

Măsurând defazajul între componentele unei reflectate $\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel}$ și coeficientul de reflexie R se poate determina partea reală și partea imaginară a indicelui de refracție complex.

5.8. Ghiduri de undă

Un ghid de undă este o structură tubulară cu pereții metalici sau dielectrice, având o formă cilindrică sau rectangulară. În interiorul tubului se află mediul (neconductor) în care se propagă undele electromagnetice. La frecvențe înalte, singurul mod practice de generare și de transmisie a radiației electromagnetice necesită folosirea unor ghiduri de undă a căror secțiune transversală este comparabilă cu lungimea de undă a radiației.

Vom analiza propagarea undelor electromagnetice într-un ghid cu secțiunea rectangulară acând pereții perfect conductori (metalici). Presupunem că mediul de propagare este omogen, izotrop, liniar, staționar, neconductor, neutru din punct de vedere electric ($\rho_{lib} = 0$) și fără pierderi. Pentru o undă care se propagă în sensul pozitiv al axei z putem scrie:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)} = [E_{0x}(x, y)\vec{i} + E_{0y}(x, y)\vec{j} + E_{0z}(x, y)\vec{k}] e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.230)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_z z)} = [H_{0x}(x, y)\vec{i} + H_{0y}(x, y)\vec{j} + H_{0z}(x, y)\vec{k}] e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.231)$$

Înlocuind \vec{E} și \vec{H} în ecuațiile lui Maxwell obținem:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{j}_{lib} = 0 \quad (\text{mediul de propagare este un dielectric, } \sigma = 0, \vec{j}_{lib} = \sigma \vec{E} = 0) \Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial y} + i k_z H_{0y} = i \omega \epsilon E_{0x} \quad (5.232)$$

$$- i k_z H_{0x} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = i \omega \epsilon E_{0y} \quad (5.233)$$

$$\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} = i \omega \epsilon E_{0z} \quad (5.234)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + i k_z E_{0y} = - i \omega \mu H_{0x} \quad (5.235)$$

$$- i k_z E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = - i \omega \mu H_{0y} \quad (5.236)$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = - i \omega \mu H_{0z} \quad (5.237)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0y}}{\partial y} - i k_z H_{0z} = 0 \quad (5.238)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\varepsilon}, \quad \rho_{\text{lib}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} - i k_z E_{0z} = 0 \quad (5.239)$$

Vom exprima componentele transversale $E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y}$ față de direcția axei z în funcție de componentele longitudinale E_{0z}, H_{0z} . Astfel din relațiile (5.232) și (5.236) eliminăm componenta H_{0y} , iar din (5.233) și (5.235) eliminăm H_{0x} :

$$-i k_z E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = -\frac{i \omega \mu}{i k_z} \left(i \omega \varepsilon E_{0x} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right) \quad \Rightarrow$$

$$i E_{0x} (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) = k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{0x} = \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right)} \quad (5.240)$$

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + i k_z E_{0y} = -\frac{i \omega \mu}{i k_z} \left(-\frac{\partial H_{0z}}{\partial x} - i \omega \varepsilon E_{0y} \right) \quad \Rightarrow$$

$$i E_{0y} (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) = k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{0y} = \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right)} \quad (5.241)$$

unde

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{1}{\lambda} \quad (5.242)$$

este mărimea vectorului de undă al unei unde plane uniforme, cu lungimea de undă λ , care ar traversa un mediu nelimitat de frontiere, iar k_z este mărimea vectorului de undă corespunzător undei ghidate (k_z este real întrucât am presupus că nu există atenuare).

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_z} \quad (5.243)$$

Înlocuind E_{0y} din (5.241) în (5.235) obținem H_{0x} :

$$H_{0x} = \frac{1}{-i \omega \mu} \left[\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + i k_z \cdot \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$H_{0x} = -\frac{1}{i \omega \mu} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2 - k_z^2} \right) + \frac{k_z}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial x}, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{H_{0x} = \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(-\omega \varepsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + k_z \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right)} \quad (5.244)$$

Înlocuind E_{0x} din (5.240) în (5.236) obținem H_{0y} :

$$H_{0y} = \frac{1}{i\omega\mu} \left[\frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + i k_z \cdot \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right) \right] \Rightarrow$$

$$H_{0y} = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2 - k_z^2} \right) + \frac{k_z}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial y}, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \Rightarrow$$

$$\boxed{H_{0y} = \frac{1}{i(k^2 - k_z^2)} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right)} \quad (5.245)$$

E_{0z} și H_{0z} se determină prin rezolvarea ecuațiilor de undă (5.27) și (5.28), iar k_z se obține din condițiile la limită. Deoarece $\rho_{\text{lib}} = 0$, $\vec{j}_{\text{lib}} = 0$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, relațiile (5.27) și (5.28), scrise pentru componentele longitudinale $E_z = E_{0z} \cdot \exp[i(\omega t - k_z z)]$, $H_z = H_{0z} \cdot \exp[i(\omega t - k_z z)]$ devin:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho_{\text{lib}}}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \vec{j}_{\text{lib}}}{\partial t} \Rightarrow \Delta E_z - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0, \quad -i k_z (-i k_z) = -k_z^2, \quad i\omega(i\omega) = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} - k_z^2 E_{0z} + \varepsilon \mu \omega^2 E_{0z} = 0, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) E_{0z} = 0} \quad (5.246)$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \vec{j}_{\text{lib}} \Rightarrow \Delta H_z - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0, \quad (B = \mu H) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) H_{0z} = 0} \quad (5.247)$$

Un câmp electromagnetic arbitrar într-un mediu omogen, izotrop, fără surse, poate fi considerat ca o suprapunere de câmpuri mai simple care poartă numele de moduri. Astfel pentru $E_{0z} = 0$ avem un câmp transversal electric TE, pentru $H_{0z} = 0$ avem un câmp transversal magnetic TM, iar pentru $E_{0z} = 0$, $H_{0z} = 0$ avem un câmp transversal electric și magnetic TEM. Întrucât un câmp electromagnetic oarecare dintr-o regiune omogenă, izotropă, fără surse, poate fi considerat ca o sumă de câmpuri TE și TM în raport cu o axă arbitrară (axa z), se poate spune că acest câmp este constituit prin suprapunerea unor câmpuri TEM.

Ne vom ocupa numai de modurile transversal electrice TE, pentru care $E_{0z} = 0$. În acest caz relațiile (5.234), (5.235), (5.236), (5.239), (5.240), (5.241), (5.244) și (5.245) devin:

$$\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} \quad (5.234')$$

$$E_{0y} = -\frac{\omega\mu}{k_z} \cdot H_{0x} \quad (5.235')$$

$$E_{0x} = \frac{\omega\mu}{k_z} \cdot H_{0y} \quad (5.236')$$

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} = -\frac{\partial E_{0y}}{\partial y} \quad (5.239')$$

$$E_{0x} = \frac{\omega\mu}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \quad (5.240')$$

$$E_{0y} = -\frac{\omega\mu}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \quad (5.241')$$

$$H_{0x} = \frac{k_z}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \quad (5.244')$$

$$H_{0y} = \frac{k_z}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \quad (5.245')$$

Din relațiile (5.235') și (5.236') rezultă că $E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - k_z z)}$ și $H_y = H_{0y} e^{i(\omega t - k_z z)}$ sunt în fază, iar E_y și H_x sunt în opoziție de fază. Din aceleași relații obținem:

$$E_{0x} H_{0x} + E_{0y} H_{0y} + E_{0z} H_{0z} = \frac{\omega\mu}{k_z} \cdot H_{0y} H_{0x} - \frac{\omega\mu}{k_z} \cdot H_{0x} H_{0y} = 0 \quad (5.248)$$

adică părțile reale ale lui E_{\perp} și H_{\perp} sunt ortogonale, având:

$$\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_{0\perp} e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \vec{H}_{\perp} = \vec{H}_{0\perp} e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \vec{E}_{0\perp} = E_{0x} \vec{i} + E_{0y} \vec{j}, \quad \vec{H}_{0\perp} = H_{0x} \vec{i} + H_{0y} \vec{j} \quad (5.249)$$

Din relațiile (5.240'), (5.241'), (5.244'), (5.245') și (5.249) rezultă:

$$\vec{E}_{0\perp} = \frac{\omega\mu}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \left(\frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \vec{j} \right), \quad \vec{H}_{0\perp} = \frac{\omega\mu}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \left(\frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (5.250)$$

Din (5.235') și (5.236') se constată că:

$$\frac{E_{0x}}{H_{0y}} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = \frac{\omega\mu}{k_z} = \text{real} \quad (5.251)$$

$$\frac{\operatorname{Re} E_x}{\operatorname{Re} H_y} = \frac{\operatorname{Re} E_y}{\operatorname{Re} (-H_x)} \quad (5.252)$$

iar impedanta undei

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_{0\perp}}{H_{0\perp}} = \frac{\omega \mu}{k_z} \quad (5.253)$$

este o mărime reală pozitivă, dacă nu există pierderi. Relațiile (5.250) se scriu compact sub forma:

$$\vec{E}_{0\perp} = \frac{\omega \mu}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot (\nabla H_{0z} \times \vec{k}), \quad \vec{H}_{0\perp} = \frac{k_z}{i(k^2 - k_z^2)} \cdot \nabla_{\perp} H_{0z} \quad (5.254)$$

unde \vec{k} este versorul axei Oz.

În interiorul unui conductor perfect ($\sigma = \infty$), intensitatea câmpului electric \vec{E} este nulă pentru orice tip de undă electromagnetică, deoarece $\vec{j}_{\text{lib}} \neq \infty$.

$$\vec{j}_{\text{lib}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \begin{matrix} \text{finit} \\ \infty \\ = 0 \end{matrix} \quad (5.255)$$

Datorită continuității componente tangențiale a lui \vec{E} la o interfață, rezultă că această componentă este nulă în imediata vecinătate a suprafeței metalice perfect conductoare care constituie un perete al ghidului de undă.

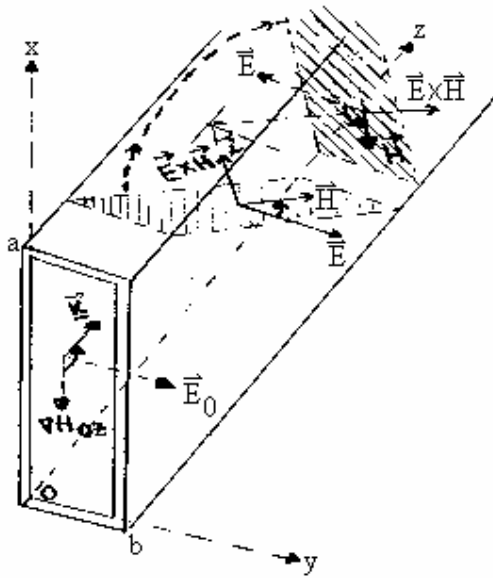
Din ecuația a doua a lui Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$ rezultă că în interiorul unui conductor perfect $\vec{B} = 0$ și deci $\vec{H} = 0$, întrucât $\vec{E} = 0$ conduce la $\nabla \times \vec{E} = 0$. Datorită continuității componente normale a lui \vec{B} la o interfață, rezultă că această componentă este nulă și în imediata vecinătate a suprafeței metalice perfect conductoare a ghidului. Datorită continuității componente tangențiale a lui \vec{H} la suprafața de separare a două medii, rezultă că această componentă este paralelă cu tangenta la suprafață în vecinătatea interfeței, iar mărimea lui \vec{H} tangențial este egală cu densitatea de curent pe suprafață \vec{j}_s

$$\vec{H} = \vec{j}_s \times \vec{n}_s \quad (5.256)$$

unde \vec{n}_s este versorul normalei la suprafață. Astfel densitatea de curent pe suprafață poate fi diferită de zero pentru $\vec{E} = 0$ și $\sigma = \infty$. Din (5.254) rezultă că $\vec{E}_{0\perp}$ este perpendicular pe suprafață, iar ∇H_{0z} este tangent la suprafață (nu există o variație a lui H_{0z} în direcția normală la suprafața metalică a ghidului, pe suprafață).

Astfel condițiile la limită pe suprafața unui conductor perfect al ghidului de undă sunt:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tangent}} &= 0, & \vec{B}_{\text{normal}} &= 0 \\ \vec{H}_{\text{tangent}} &= \vec{j}_s \times \vec{n}_s, & \nabla H_{0z} &\text{este tangent} \end{aligned} \quad (5.257)$$



În figura alăturată vectorii \vec{E}_0 și \vec{H}_0 sunt perpendiculari pe suprafața metalică zOx ; ∇H_{0z} și \vec{H}_0 sunt paraleli cu planul zOx ; \vec{k} este versorul axei Oz ; sensul vectorilor \vec{E}_0 și $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0$ se determină pe baza regulii burghiului drept; $\vec{E}_{0\perp}$ din (5.254) coincide cu \vec{E}_0 , având direcția axei y . Am considerat numai modul transversal electric TE ce rezultă prin reflexia multiplă a unei unde plane pe fețele paralele cu planul yz . Unda se propagă în direcția pozitivă a axei z , în urma acestor reflexii multiple de pereții de sus și de jos. i este unghiul de incidență dintre vectorul Poynting și normala la fața superioară.

Orientarea vectorilor \vec{E}_0 , \vec{H}_0 și $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0$ pentru unda reflectată se verifică prin rotirea planului hașurat din figura de mai sus. Presupunem că mediul de propagare este aerul (în locul lui k vom pune k_0). Aplicând condițiile la limită (5.257) la modul transversal electric (TE), avem

$$\begin{array}{lll} E_{0x} = 0; & E_{0y} \neq 0; & E_{0z} = 0 \end{array} \quad (5.258)$$

(componentă tangențială) (componentă normală) (mod TE)

$$\begin{array}{lll} H_{0x} \neq 0; & H_{0y} = 0; & H_{0z} \neq 0 \end{array} \quad (5.259)$$

(componentă tangențială) (componentă normală) (componentă longitudinală)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = 0 \text{ la } x=0, a \\ \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} = 0 \text{ la } y=0, b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(nu există o variație a lui } H_{0z} \text{ în direcția normală la} \\ \text{suprafața metalică a ghidului, pe suprafață, deoarece} \\ \nabla H_{0z} \text{ este tangent)} \end{array} \quad (5.260)$$

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_{0y}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (5.261)$$

($E_{0x} = 0$); (5.239'); ($E_{0z} = 0$); (5.234'); ($H_{0y} = 0$); (5.240', $E_{0x} = 0$)

Folosind relația (5.261), ecuația de undă (5.247) devine:

$$\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + (k_0^2 - k_z^2) H_{0z} = 0 \quad (5.262)$$

sau:

$$\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + k_x^2 \cdot H_{0z} = 0 \quad (5.263)$$

unde

$$k_x = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} \quad (5.264)$$

este o mărime reală dacă:

$$k_0 > k_z \Rightarrow \lambda_0 < \lambda_z \quad (5.265)$$

adică lungimea de undă a unei unde plane în aer este mai mică decât lungimea de undă măsurată în lungul ghidului de undă care are ca mediu de propagare aerul. Soluția ecuației (5.263) este de forma:

$$H_{0z} = C \cdot \cos k_x x + C' \cdot \sin k_x x \quad (5.266)$$

Impunând prima condiție la limită din relația (5.260), obținem:

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = 0 \text{ la } x=0, a \Rightarrow -C \cdot k_x \cdot \sin k_x x + C' \cdot k_x \cdot \cos k_x x \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow$$

$$C' = 0 \Rightarrow H_{0z} = C \cdot \cos k_x x \Rightarrow \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \Big|_{x=a} = -C \cdot k_x \cdot \sin k_x a = 0 \Rightarrow$$

$$\sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = n\pi, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \boxed{k_x = \frac{n\pi}{a}}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow (5.267)$$

$$H_{0z} = C \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \quad (5.268)$$

Introducând k_x din (5.267) în (5.264), obținem:

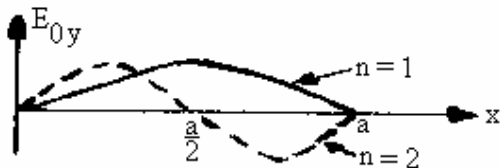
$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = k_0^2 - k_z^2, k_0 = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \boxed{k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \quad (5.269)$$

Din relațiile (5.258), (5.259), (5.241'), (5.244'), (5.264) și (5.268) obținem:

$$\boxed{E_{0x} = 0}; E_{0y} = -\frac{\omega \mu_0}{i(k_0^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = -\frac{\omega \mu_0}{i\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \left(-C \frac{n\pi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{0y} = \frac{\omega \mu_0 a}{i n \pi} \cdot C \sin \frac{n\pi x}{a}}; \boxed{E_{0z} = 0}; H_{0x} = \frac{k_z}{i(k_0^2 - k_z^2)} \cdot \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = \frac{k_z}{i\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \left(-C \cdot \frac{n\pi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{0x} = -\frac{k_z a}{i n \pi} \cdot C \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}}; \boxed{H_{0y} = 0}; \boxed{H_{0z} = C \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}} \quad (5.270)$$



Pentru $n = 1$ avem modul TE_1 , pentru $n = 2$ avem modul de propagare TE_2, \dots

Amplitudinea E_{0y} pentru $n = 1, 2$ are aspectul din figura alăturată.

Din relațiile (5.230), (5.231) și (5.270) rezultă:

$$\vec{E}^{TE} = -i \frac{\omega \mu_0 a}{n\pi} \cdot C \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \vec{j} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.271)$$

$$\vec{H}^{TE} = \left[\hat{i} \cdot \frac{k_z a}{n\pi} \cdot C \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \vec{i} + C \cdot \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \vec{k} \right] \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.272)$$

Din (5.271) rezultă că intensitatea câmpului electric formează unde staționare de-a lungul axei x , iar din (5.272) se constată că intensitatea câmpului magnetic descrie o elipsă în planul $y = \text{constant}$. Exprimând sinusul sub forma exponențială în (5.271), obținem:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \vec{E}^{TE} = -i\vec{j} \frac{\omega\mu_0 aC}{n\pi} \cdot \frac{1}{2i} \left[e^{i\left(\omega t + \frac{n\pi x}{a} - k_z z\right)} - e^{i\left(\omega t - \frac{n\pi x}{a} - k_z z\right)} \right] \quad (5.273)$$

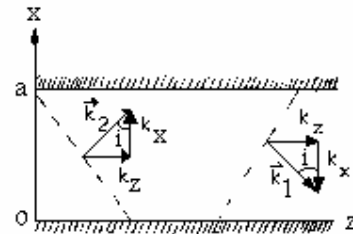
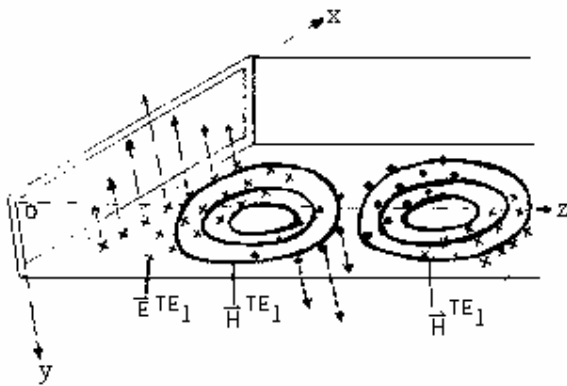
Primul termen din paranteza pătrată reprezintă o undă plană cu vectorul de undă

$$\vec{k}_1 = -\frac{n\pi}{a} \cdot \vec{i} + k_z \cdot \vec{k} ; \quad |\vec{k}_1| = |\vec{k}_0| \quad (5.274)$$

Semnul $-$ din fața celui de-al doilea termen exponențial din paranteza pătrată a ecuației (5.273) arată că unda caracterizată prin vectorul de undă

$$\vec{k}_2 = \frac{n\pi}{a} \cdot \vec{i} + k_z \cdot \vec{k} ; \quad |\vec{k}_2| = |\vec{k}_0| \quad (5.275)$$

este defazată cu π față de unda cu vectorul de undă \vec{k}_1 . Astfel factorul $\sin \frac{n\pi x}{a}$ din \vec{E}^{TE} explică formarea unei staționare prin interferența dintre unda incidentă pe un perete al ghidului de undă și unda reflectată de acel perete. Rezultă că oricare dintre cele două unde poate fi privită ca reflexia celeilalte pe peretele ghidului, adică unda TE se propagă în ghid prin reflexii succesive pe pereții de sus și de jos. În mod similar se poate exprima și \vec{H}^{TE} . În figurile de mai jos am reprezentat liniile de câmp electric, liniile de câmp magnetic și vectorii \vec{k}_1 și \vec{k}_2 .



$$\sin i = \frac{k_z}{|\vec{k}_2|} = \frac{k_z}{k_0} \quad (5.276)$$

Din ecuația (5.269) se constată că pentru pulsații inferioare unei valori critice date de

$$\omega_c = \frac{n \pi c}{a}, \quad (5.277)$$

mărima k_z devine imaginară, astfel că nu există nici o undă, iar câmpul descrește exponențial cu z . Din relația (5.277) putem obține lungimea de undă critică λ_c și frecvența critică ν_c :

$$\frac{2 \pi c}{\lambda_c} = \frac{n \pi c}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_c = \frac{2a}{n}} \quad (5.278)$$

$$\nu_c = \frac{c}{\lambda_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_c = \frac{cn}{2a}} \quad (5.279)$$

Astfel o undă electromagnetică se propagă în lungul ghidului de undă, fără să fie atenuată, numai dacă

$$\omega > \omega_c \text{ sau } \nu > \nu_c \text{ sau } \lambda < \lambda_c \quad (5.280)$$

Ghidul de undă acționează ca un filtru care lasă să treacă numai undele a căror frecvență este mai mare ca ν_c , care depinde de a , însă nu depinde de b . Pentru ca în ghid să existe modul TE_1 trebuie ca

$$\lambda < \frac{2a}{1} = 2a, \quad (5.281)$$

iar pentru ca să lipsească modul TE_2 vom impune

$$\lambda > \frac{2a}{2} = a \quad (5.282)$$

Viteza de fază este

$$\nu_f = \frac{\omega}{k_z} \stackrel{(5.276)}{=} \frac{\omega}{k_0 \cdot \sin i} = \frac{c}{\sin i} > c \quad (5.283)$$

Folosind expresia (5.269) putem determina viteza de grup:

$$\nu_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}}, \quad k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad \frac{dk_z}{d\omega} = \frac{1}{2k_z} \cdot 2\left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} = \frac{\omega}{c^2 k_z} =$$

$$\stackrel{(5.283)}{=} \frac{c}{c^2 \cdot \sin i} = \frac{1}{c \cdot \sin i} \Rightarrow \quad \nu_g = c \cdot \sin i < c \quad (5.284)$$

Se constată că

$$\nu_f \cdot \nu_g = c^2 \quad (5.285)$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H}^* &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x^* & 0 & H_z^* \end{vmatrix} = E_y H_z^* \cdot \vec{i} - E_x H_y^* \cdot \vec{k} = \\ &= -i \frac{\omega \mu_0 a C^2}{n \pi} \cdot \sin \frac{n \pi x}{a} \cdot \cos \frac{n \pi x}{a} \cdot \vec{i} + \frac{\omega \mu_0 a^2 C^2 k_z}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi x}{a} \cdot \vec{k} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{\omega \mu_0 a^2 C^2 k_z}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi x}{a} \cdot \vec{k}$$

atunci intensitatea unei transmise prin ghid este:

$$I = |\vec{S}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} |\vec{E} \times \vec{H}^*| = \frac{\omega \mu_0 a^2 C^2 k_z}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi x}{a} \quad (5.286)$$

Intensitatea unei este independentă de y întrucât \vec{E} și \vec{H} , pentru modul TE considerat, nu depend de y . Dacă integrăm relația (5.286) peste secțiunea transversală a ghidului de undă obținem:

$$\int_0^b \int_0^a I \cdot dx \cdot dy = \frac{\omega \mu_0 b a^3 C^2 k_z}{4 n^2 \pi^2} \quad (5.287)$$

unde am folosit formula:

$$\int \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Rightarrow$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{n \pi x}{a} dx = \frac{a}{n \pi} \left[\frac{n \pi x}{2a} - \frac{\sin 2 \frac{n \pi x}{a}}{4} \right] \Big|_0^a = \frac{a}{2}$$

Astfel:

$$\int_0^a \int_0^b I dx dy = \frac{a b}{2} \cdot I_{\max} \quad (5.288)$$

(I este 0 la $x=0$, a unde \vec{E} este 0; I_{\max} corespunde lui $x = a/2$ pentru $n = 1$).

Din (5.271) rezultă:

$$\operatorname{Re} E^{\text{TE}} = \frac{\omega \mu_0 a C}{n \pi} \cdot \sin \frac{n \pi x}{a} \cdot \sin(\omega t - k_z z)$$

$$\rho_E^e = \frac{\varepsilon_0}{2} |\operatorname{Re} E|^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 a^2 C^2}{2 n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi x}{a} \cdot \sin^2(\omega t - k_z z) \quad (5.289)$$

$$\overline{\rho_E^e} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 a^2 C^2}{4 n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi x}{a} \quad (5.290)$$

Se constată că pentru modul TE_1 ($n = 1$), densitatea de energie electrică medie este maximă la centrul ghidului ($x = a/2$).

Relația (5.272) poate fi pusă sub forma:

$$\vec{H}^{\text{TE}} = \left[i \frac{k_z a}{n \pi} \cdot C \cdot \sin \frac{n \pi x}{a} \cdot \vec{i} + C \cdot \cos \frac{n \pi x}{a} \cdot \vec{k} \right] \left[\cos(\omega t - k_z z) + i \cdot \sin(\omega t - k_z z) \right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \vec{H}^{\text{TE}} = -\frac{k_z a C}{n \pi} \cdot \sin \frac{n \pi x}{a} \cdot \sin(\omega t - k_z z) \cdot \vec{i} + C \cdot \cos \frac{n \pi x}{a} \cdot \cos(\omega t - k_z z) \cdot \vec{k}$$

$$\rho_E^m = \frac{\mu_0}{2} |\text{Re } H^{\text{TE}}|^2 = \frac{\mu_0}{2} \left[\frac{k_z^2 a^2 C^2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin^2 (\omega t - k_z z) + C^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos^2 (\omega t - k_z z) \right]$$

$$\overline{\rho_E^m} = \frac{\mu_0}{4} \left[\frac{k_z^2 a^2 C^2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi x}{a} + C^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \right] \quad (5.291)$$

Integrând relațiile (5.290) și (5.291) peste secțiunea transversală a ghidului și folosind relația (5.269), obținem:

$$\int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^e} dx dy = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 a^2 C^2}{4 n^2 \pi^2} \cdot \frac{a b}{2} \quad (5.292)$$

$$\int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^m} dx dy = \frac{\mu_0}{4} \left[\frac{k_z^2 a^2 C^2}{n^2 \cdot \pi^2} + C^2 \right] \cdot \frac{a b}{2}, \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}, \quad k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \cdot \pi^2}{a^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^m} dx dy = \frac{\mu_0 C^2}{4} \left[\frac{k_z^2 a^2}{n^2 \cdot \pi^2} + 1 \right] \cdot \frac{a b}{2} = \frac{\mu_0 C^2}{4} \left[\frac{a^2 \omega^2}{n^2 \cdot \pi^2 c^2} - \frac{a^2 n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 a^2} + 1 \right] \cdot \frac{a b}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^m} dx dy = \frac{\mu_0 \omega^2 a^2 C^2}{4 n^2 \pi^2 c^2} \cdot \frac{a b}{2}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^e} dx dy = \int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^m} dx dy \quad (5.293)$$

Din relațiile (5.287) și (5.284), obținem:

$$\left[\int_0^a \int_0^b I dx dy \right] / v_g = \frac{\mu_0 \omega a^2 C^2 k_z}{2 n^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{a b}{2} \cdot \frac{\omega}{c^2 k_z} = \frac{\mu_0 \omega^2 a^2 C^2}{2 n^2 \cdot \pi^2 c^2} \cdot \frac{a b}{2} = 2 \int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^m} dx dy$$

$$\boxed{\left[\int_0^a \int_0^b I dx dy \right] / v_g = \int_0^a \int_0^b \overline{\rho_E^e} \cdot dx dy}, \quad \overline{\rho_E^e} = \overline{\rho_E^e} + \overline{\rho_E^m} \quad (5.294)$$

unde

$$v_g = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{c^2}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c \lambda_0}{2\pi a}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (5.295)$$

sau

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5.296)$$

Astfel energia transportată în unitatea de timp prin secțiunea transversală a ghidului este egală cu energia conținută într-un volum al ghidului corespunzător unei lungimi egale cu viteza de grup v_g .

În cazurile reale, conductivitatea pereților ghidului este finită.

Similar se tratează ghidurile de undă dielectrice la care reflexia totală apare în interiorul unui dielectric mărginit de un alt dielectric cu indice de refracție mai mic (drept exemplu se consideră fibra optică sau o peliculă din material transparent depusă pe un suport cu indice de refracție mai mic).

5.9. Cavități rezonante

Prin închiderea la capete a unui ghid de undă se obține o cavitate rezonantă. Cavitățile rezonante joacă, la frecvențe înalte, același rol pe care îl are un circuit oscilant la frecvențe joase. Frecvența de rezonanță a unui circuit oscilant $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ poate fi mărită prin

micșorarea inductanței până când bobina se reduce la o singură spiră care leagă plăcile condensatorului plan. Dar inductanța poate fi micșorată în continuare prin legarea în paralel a mai multor spire care unesc plăcile condensatorului la capete. Dacă înlocuim spirele cu o fâșie metalică se obține o cavitate rezonantă prin modificarea unui circuit oscilant. În cazul laserului cu azot, pentru a asigura un puls de curent rapid în vederea creării inversiei de populație, se folosește un condensator plan format din două folii de cupru foarte apropiate între care se află textolit. Acest condensator are o inductanță foarte mică.

Ecuția de undă (5.246) poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor. Se exprimă soluția ecuației ca un produs de două funcții $X(x)$ și $Y(y)$, dependente fiecare numai de câte o singură variabilă:

$$E_{0z}(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (5.297)$$

Impunând soluției (5.297) să verifice ecuația de undă (5.246), obținem:

$$Y \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2)XY = 0 \quad \Rightarrow \quad (5.298)$$

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 - k_z^2 = 0 \quad (5.299)$$

Variabilele x și y fiind independente, primul termen al ecuației (5.299) depinzând numai de x , iar al doilea termen depinzând numai de y , rezultă că această relație este satisfăcută numai dacă fiecare din acești termeni este egal cu o constantă, care trebuie să fie negativă, pentru a elimina cazurile banale în care soluția este neperiodică. Deci:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -M^2, \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -N^2, \quad -M^2 - N^2 + k^2 - k_z^2 = 0 \quad (5.300)$$

Rezultă ecuațiile:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + M^2 X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + N^2 Y = 0 \quad (5.301)$$

Soluțiile acestor două ecuații sunt:

$$X = A_1 \sin Mx + A_2 \cos Mx \quad , \quad Y = B_1 \sin Ny + B_2 \cos Ny \quad (5.302)$$

Pentru modurile TM ($H_{0z} = 0$) , în cazul undelor progresive, soluția generală pentru $E_z(x, y, z, t)$ este:

$$E_z^+(x, y, z, t) = (A_1 \sin Mx + A_2 \cos Mx)(B_1 \sin Ny + B_2 \cos Ny) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.303)$$

Din condițiile la limită (componentele tangențiale ale intensității câmpului electric trebuie să se anuleze pe pereți) rezultă:

$$E_z^+(x=0)=0 \Rightarrow A_2=0 \quad ; \quad E_z^+(y=0)=0 \Rightarrow B_2=0 \quad ; \quad (5.304)$$

$$E_z^+(x=a)=0 \Rightarrow \sin Ma=0 \quad ; \quad \Rightarrow Ma = m\pi \Rightarrow M = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.305)$$

$$E_z^+(y=b)=0 \Rightarrow \sin Nb=0 \quad ; \quad \Rightarrow Nb = n\pi \Rightarrow N = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.306)$$

$$E_z^+ = C^+ \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} \quad , \quad C^+ = A_1 B_1 \quad (5.307)$$

$$-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2 - k_z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - k_z^2 = M^2 + N^2 \quad (5.308)$$

În cazul undelor regresive, obținem:

$$E_z^- = C^- \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (5.309)$$

Din relațiile (5.307) , (5.309) , (5.240) , (5.241) , (5.244) și (5.245) , obținem (pentru unda regresivă k_z trece în $-k_z$) :

$$E_x^\pm = \frac{\pm k_z C^\pm M}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot e^{i(\omega t \mp k_z z)} \quad ; \quad k^2 - k_z^2 = M^2 + N^2 \quad (5.310)$$

$$E_y^\pm = \frac{\pm k_z C^\pm N}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot e^{i(\omega t \mp k_z z)} \quad (5.311)$$

$$H_x^\pm = \frac{-\omega \epsilon C^\pm N}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot e^{i(\omega t \mp k_z z)} \quad (5.312)$$

$$H_y^\pm = \frac{\omega \epsilon C^\pm M}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot e^{i(\omega t \mp k_z z)} \quad (5.313)$$

$$H_z^\pm = 0 \quad (\text{am considerat numai modurile TM}) \quad (5.314)$$

unde am folosit relația (5.308) .

Prin suprapunerea undelor progresive peste undele regresive obținem:

$$E_x = E_x^+ + E_x^- = \frac{k_z M}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \left[C^+ e^{i(\omega t - k_z z)} - C^- e^{i(\omega t + k_z z)} \right] \quad (5.315)$$

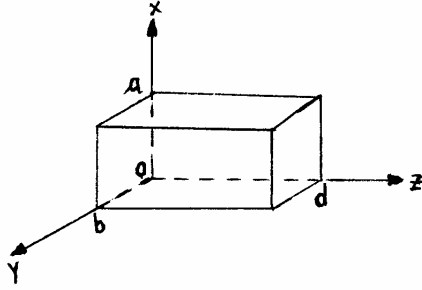
$$E_y = E_y^+ + E_y^- = \frac{k_z N}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \left[C^+ e^{i(\omega t - k_z z)} - C^- e^{i(\omega t + k_z z)} \right] \quad (5.316)$$

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = \sin Mx \cdot \sin Ny \cdot \left[C^+ e^{i(\omega t - k_z z)} + C^- e^{i(\omega t + k_z z)} \right] \quad (5.317)$$

$$H_z = H_z^+ + H_z^- = 0 \quad (5.318)$$

$$H_x = H_x^+ + H_x^- = \frac{-\omega \varepsilon N}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \left[C^+ e^{i(\omega t - k_z z)} + C^- e^{i(\omega t + k_z z)} \right] \quad (5.319)$$

$$H_y = H_y^+ + H_y^- = \frac{\omega \varepsilon M}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \left[C^+ e^{i(\omega t - k_z z)} + C^- e^{i(\omega t + k_z z)} \right] \quad (5.320)$$



Din condițiile la limită impuse la $z = 0$, $z = d$, obținem:

$$\begin{aligned} E_x(z=0) = 0 &\Rightarrow C^+ - C^- = 0 \Rightarrow C^+ = C^- \\ E_y(z=0) = 0 &\Rightarrow C^+ - C^- = 0 \Rightarrow C^+ = C^- = C \end{aligned} \quad (5.321)$$

$$E_x(z=d) = 0 \Rightarrow e^{-ik_z d} - e^{ik_z d} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{ik_z d} - e^{-ik_z d}}{2i} = 0 \Rightarrow \sin k_z d = 0 \Rightarrow k_z d = p\pi, p = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (5.322)$$

$$E_y(z=d) = 0 \Rightarrow e^{-ik_z d} - e^{ik_z d} = 0 \Rightarrow \quad (5.322)$$

Folosind relațiile (5.321), (5.322) și formula trigonometrică

$$\frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i} = \sin k_z z \quad (5.323)$$

obținem:

$$E_x = -\frac{2MC}{M^2 + N^2} \cdot k_z z \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \sin k_z z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.324)$$

$$E_y = -\frac{2NC}{M^2 + N^2} \cdot k_z z \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \sin k_z z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.325)$$

$$E_z = 2C \cdot \sin Mx \cdot \sin Ny \cdot \cos k_z z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.326)$$

$$\left(\frac{e^{ik_z z} + e^{-ik_z z}}{2} = \cos k_z z \right)$$

$$H_x = -\frac{2\omega \varepsilon NC}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \cos k_z z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.327)$$

$$H_y = -\frac{2\omega \varepsilon MC}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \cos k_z z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.328)$$

$$H_z = 0 \quad (5.329)$$

unde

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, 3, \dots \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.330)$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nu luăm în considerare cazurile $m = 0, n = 0$, deoarece obținem soluția banală (toate componentele din (5.324) – (5.329) se anulează). Modul TM de ordinul cel mai mic este TM_{110} ($m = 1, n = 1, p = 0$).

Din relațiile (5.242), (5.305), (5.308) și (5.322) obținem frecvențele de rezonanță ale modurilor TM din cavitate (în cavitate se formează unde staționare tridimensionale):

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2, \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon, \quad \omega = 2\pi\nu \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}} \quad (5.331)$$

În cazul modurilor TE se obține aceeași relație (5.331) dar $p \neq 0$, iar dacă $m = 0$, atunci $n \neq 0$ (pentru $n = 0$ trebuie ca $m \neq 0$). Astfel modurile TE de ordinul cel mai mic sunt TE_{101} și TE_{011} (pentru $a \geq d > b$ modul cu frecvența cea mai mică este TE_{101}).

În acest caz se obțin relațiile:

$$E_x = -\frac{2\omega\mu NC}{M^2 + N^2} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \sin k_z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.332)$$

$$E_y = \frac{2\omega\mu MC}{M^2 + N^2} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \sin k_z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.333)$$

$$E_z = 0 \quad (\text{moduri TE}) \quad (5.334)$$

$$H_x = \frac{2MCK_z}{i(M^2 + N^2)} \cdot \sin Mx \cdot \cos Ny \cdot \cos k_z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.335)$$

$$H_y = \frac{2NCK_z}{i(M^2 + N^2)} \cdot \cos Mx \cdot \sin Ny \cdot \cos k_z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.336)$$

$$H_z = i \cdot 2C \cdot \cos Mx \cdot \cos Ny \cdot \sin k_z \cdot e^{i\omega t} \quad (5.337)$$

unde

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, 3, \dots & \text{sau} & & m &= 1, 2, 3, \dots \\ n &= 1, 2, 3, \dots & & & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ p &= 1, 2, 3, \dots & & & & \end{aligned} \quad (5.338)$$

Numărul de moduri TE este egal cu numărul de moduri TM (în relațiile (5.330) și (5.338) am explicitat 30 de moduri posibile TE și 36 de moduri posibile TM).

Undele staționare se formează datorită reflexiilor de pereți. Pentru a excita în mod eficient un mod de oscilație se folosește un câmp de probă care se aplică în locul unde este maximă intensitatea câmpului electric caracteristică modului de vibrație considerat.

5.10. Dispersia undelor electromagnetice

Prin dispersie se înțelege dependența indicelui de refracție al unui mediu de lungimea de undă a radiației care se propagă în mediul considerat. Este evident că mărimea vectorului de undă k și viteza de fază vor depinde și ele de lungimea de undă (sau de frecvența $\nu = c/\lambda$) a radiației. Astfel undele plane uniforme de frecvențe diferite vor străbate un mediu

care prezintă pierderi (cazul mediului conductor) la viteze de fază diferite. Există structuri de transmisie (ghidurile de undă) care prezintă dispersie, deși mediul de transmisie nu prezintă pierderi. Datorită fenomenului de dispersie, o prismă descompune lumina albă în componentele sale spectrale de la roșu la violet.

Considerăm un mediu dielectric ($\sigma = 0 \Rightarrow \mathbf{j}_{\text{lib}} = \sigma \mathbf{E} = 0$), neutru din punct de vedere electric ($\rho_{\text{lib}} = 0$), nemagnetic ($\mu_r = 1 \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$). În acest caz ecuațiile lui Maxwell se scriu sub forma:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (5.339)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad (5.340)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0 \quad (5.341)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon} = 0 \quad (5.342)$$

unde

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \quad (5.343)$$

Putem obține o relație între intensitatea câmpului electric $\vec{\mathbf{E}}$ și polarizația electrică a mediului $\vec{\mathbf{P}}$ dacă aplicăm operatorul rotor la relația (5.340) și folosim formulele (5.339) și (5.343).

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{\mathbf{H}}) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{D}}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}})}_{=0} - \Delta \vec{\mathbf{E}} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.344)$$

$$\boxed{\Delta \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2}} \quad (5.345)$$

Polarizația electrică $\vec{\mathbf{P}}$ este o proprietate a mediului în care se propagă unda electromagnetică, ce nu poate fi determinată numai pe baza ecuațiilor lui Maxwell. Pentru a explica fenomenul de dispersie vom folosi modelul clasic elaborat de Lorentz, în care se analizează din punct de vedere microscopic interacțiunea dintre radiația electromagnetică și mediul în care aceasta se propagă.

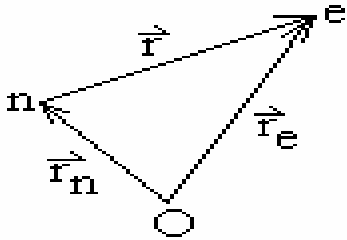
Se presupune că în unitatea de volum avem N atomi identici distribuiți haotic (fiecare atom este neutru din punct de vedere electric), iar în fiecare atom există un electron optic (care se află la distanță mai mare de restul atomului) de sarcină electrică e și masă m ce oscilează în jurul restului atomului (un electron dintr-un atom răspunde la interacțiunea cu o radiație luminoasă ca și cum ar fi legat de atom printr-un resort elastic). Acest model de oscilator al electronului (modelul Lorentz) se referă la modul în care un atom răspunde la o perturbație (sub influența câmpului electromagnetic electronul este deplasat față de poziția de echilibru, dar în același timp este atras de restul atomului). În cazul unui atom format dintr-un nucleu și un electron, forța de legătură $\vec{\mathbf{F}}_{en}$ este suficient de puternică pentru a menține electronul la distanțe destul de mici față de nucleu (nucleul este considerat staționar, deoarece are masa mult mai mare decât aceea a electronului, iar accelerația imprimată nucleului la interacțiunea cu radiația electromagnetică este neglijabilă). Întrucât fenomenele

optice nu implică particule relativiste, vom neglija contribuția magnetică la forța Lorentz care acționează asupra electronului. Ecuația de mișcare a lui Newton pentru electron este:

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = e \vec{E}(\vec{r}_e, t) + \vec{F}_{en}(\vec{r}_{en}) \quad (5.346)$$

unde

$$\vec{r}_e = \vec{r}_n + \vec{r} \quad (5.347)$$



Deoarece

$$|\vec{r}| \leq 10 \text{ \AA} , \lambda_{\text{roșu}} \approx 7800 \text{ \AA} , \lambda_{\text{violet}} \approx 4000 \text{ \AA} ,$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} \approx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (r_n \text{ este } \approx \text{ constant})$$

rezultă că intensitatea câmpului electric nu este sensibilă la variațiile foarte mici ale lui $|\vec{r}|$ astfel că

$$\vec{E}(\vec{r}_e, t) \approx \vec{E}(\vec{r}_n, t) \approx \vec{E}(\vec{R}, t)$$

unde \vec{R} se referă la poziția nucleului presupus staționar.

Astfel ecuația (5.346) devine:

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} - k_{\text{elastic}} \cdot \vec{r} \quad (5.348)$$

unde am înlocuit forța de legătură a electronului cu o forță de natură elastică, în acord cu modelul lui Lorentz. Notând cu ω_0 pulsația proprie a electronului,

$$\omega_0^2 = \frac{k_{\text{elastic}}}{m} , \quad (5.349)$$

obținem ecuația fundamentală a modelului Lorentz (5.348) sub forma

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{r} = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}} \quad (5.350)$$

În timp ce relația (5.345) exprimă legătura între \vec{E} și \vec{P} , relația (5.350) arată dependența lui \vec{r} de \vec{E} . Formula polarizației electrice

$$\vec{P} = N \vec{p} = N e \vec{r} \quad (5.351)$$

exprimă legătura între \vec{P} și \vec{r} . Soluțiile ecuațiilor cuplate (5.345) și (5.350) vor dovedi prezicerile modelului Lorentz privind interacțiunea dintre radiația luminoasă și sistemul atomic.

Presupunem că intensitatea câmpului electric al unei unde liniar polarizate în planul xy , care se propagă în lungul axei z , în zona atomului, este de forma:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.352)$$

Astfel ecuația (5.350) devine:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{r} = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.353)$$

Pentru timpi mult mai mari decât timpul de relaxare putem neglija soluția ecuației omogene, astfel că păstrăm numai soluția particulară a ecuației neomogene:

$$\vec{r} = \frac{e \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.354)$$

Rezultă:

$$\vec{P} = \frac{N e^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.355)$$

Deoarece \vec{E} din relația (5.351) nu depinde de x și y , rezultă că

$$\Delta \rightarrow (-ik)(-ik) = -k^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (i\omega)(i\omega) = -\omega^2$$

Impunând condiția ca \vec{E} din (5.352) și \vec{P} din (5.355) să verifice ecuația (5.345) obținem:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{N e^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \vec{E}$$

sau:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2 \quad (5.356)$$

unde:

$$n = \sqrt{1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}} \quad (5.357)$$

este indicele de refracție al mediului pentru radiația de pulsația ω .

Relațiile (5.356) și (5.357) exprimă dependența de pulsație a mărimii vectorului de undă și a indicelui de refracție. De aceea oricare din aceste formule poate fi considerată ca o relație de dispersie. Viteza de fază depinde de ω pe baza relației:

$$v_f = \frac{\omega}{|k|} = \frac{c}{n} \quad (5.358)$$

unde n este dat de (5.357). Dacă exprimăm polarizația electrică în funcție de polarizabilitatea electronică α sau în funcție de susceptibilitatea electrică χ_e (vezi relațiile (2.99) și (2.100)):

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \alpha \vec{E} \quad (5.359)$$

$$\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (5.360)$$

atunci comparând (5.359) și (5.360) cu (5.355) scrisă sub forma:

$$\vec{P} = \frac{N e^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \vec{E} \quad (5.355')$$

obținem:

$$\alpha = \frac{e^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (5.361)$$

$$\chi_e = \frac{N e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \alpha \quad (5.362)$$

Din (5.357) și (5.362) rezultă:

$$n = \sqrt{1 + \chi_e} \quad (5.363)$$

Rezultatele obținute sunt valabile în gaze rarefiate, unde indicele de refracție este foarte apropiat de 1. În medii condensate, solide sau lichide, trebuie să folosim un câmp electric efectiv $\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, în care se ține seama de polarizarea substanței. În acest caz se obține:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\chi_e}{3} \quad (5.364)$$

Pentru n apropiat de 1, $n^2 + 2 \approx 3$, iar relația (5.364) este identică formulei (5.363).

Dacă într-un atom există Z electroni care răspund independent la un câmp electromagnetic, atunci în locul relației (5.357) obținem:

$$n = \sqrt{1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{N e^2}{4 \pi^2 m \cdot \epsilon_0 c^2} \sum_{i=1}^Z \frac{\lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}} \quad (5.365)$$

unde

$$\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}, \quad \omega_i = \frac{2 \pi c}{\lambda_i} \quad (5.366)$$

Dacă $\lambda_i < \lambda$, putem folosi dezvoltarea binomială

$$(1 + x)^m = 1 + m x + \frac{1}{2} m(m-1)x^2 + \dots \quad (5.367)$$

care este valabilă pentru $|x| < 1$. Obținem:

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = \left(1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}$$

$$n = \left[1 + \frac{N e^2}{4 \pi^2 \epsilon_0 m c^2} \sum_{i=1}^Z \lambda_i^2 \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(5.367)}{\approx} 1 + \frac{N e^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2} \sum_{i=1}^Z \lambda_i^2 \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right) \quad (5.368)$$

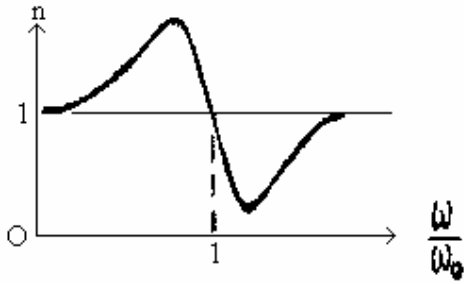
pentru cazul în care $|n^2 - 1| \ll 1$. Această relație se poate scrie și astfel:

$$n - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad (5.369)$$

unde A și B sunt două constante care depind de natura mediului.

Aceasta este formula lui Cauchy, care a fost determinată pe cale semiempirică în 1830, înainte de elaborarea teoriei electromagnetice a luminii. Conform acestei relații, indicele de refracție crește dacă lungimea de undă scade (la trecerea printr-o prismă radiația violetă este deviată mai mult decât radiația roșie).

Dacă $\omega = \omega_0$, experiența arată că $n = 1$, în timp ce din formula (5.357) rezultă $n = \infty$, deci teoria anterioară este inaplicabilă.



Dacă se reprezintă grafic n în funcție de raportul $\frac{\omega}{\omega_0}$ se obține o curbă de dispersie. Când $\omega < \omega_0$, $n > 1$, în timp ce pentru $\omega > \omega_0$, $n < 1$ ($v_f = \frac{c}{n} > c$). Porțiunea din vecinătatea lui ω_0 în care n scade odată cu creșterea pulsației reprezintă dispersia anomală.

În cazul electronilor liberi, deoarece nu există forțe de legătură elastică, pulsațiile de oscilație naturală ω_i sunt nule, iar relația de dispersie devine mult mai simplă (folosim (5.357)):

$$n = \sqrt{1 - \frac{N e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}} \quad (5.370)$$

unde N este numărul de electroni din unitatea de volum. Acest caz se întâlnește în straturile superioare ale atmosferei, unde radiația ultravioletă solară produce electroni liberi prin fotoionizare.

Radiațiile X se propagă în sticlă cu viteza de fază $v_f > c$, la fel ca în cazul electronilor liberi, întrucât frecvențele de oscilație naturale ale mediului sunt mult mai mici decât frecvențele radiațiilor incidente, astfel că $n < 1$.

5.11. Absorbția undelor electromagnetice

Culoarea unui obiect se explică pe baza absorbției selective a radiațiilor de anumite frecvențe și împrăstierii sau transmiterii radiațiilor corespunzătoare celorlalte frecvențe din spectrul vizibil. Astfel un corp are culoarea verde dacă absoarbe toate radiațiile din domeniul vizibil, cu excepția radiației verzi. Un corp este negru dacă absoarbe toate radiațiile din domeniul vizibil. Absorbția în lichide și solide este mult mai complicată decât cea din gaze. Apa este transparentă în vizibil, dar absoarbe în infraroșul apropiat. Pulsația plasmei ω_0 pentru electronii liberi din metale se situează de obicei în ultraviolet. De aceea radiațiile vizibile ($\omega < \omega_0$) nu pot penetra într-un metal, fiind complet reflectate, așa cum undele radio sunt reflectate de ionosferă. Această reflexie puternică explică luciul metalelor. Aurul are o culoare deosebită deoarece absorbția se datorează electronilor legați în atom.

Prin introducerea unei forțe de frecare

$$\vec{F}_f = -\gamma \dot{\vec{r}} \quad (5.371)$$

se elimină nedeterminarea pentru $\omega = \omega_0$ din relația (5.357), se explică de ce nu luăm și soluția corespunzătoare ecuației omogene și se evidențiază mecanismul fizic al absorbției energiei electromagnetice. Forța de frecare apare ca un efect al ciocnirilor dintre moleculele unui gaz. În locul ecuațiilor (5.348) și (5.353) vom scrie:

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} - k_{\text{elastic}} \cdot \vec{r} - \gamma \dot{\vec{r}} \quad (5.372)$$

$$\ddot{\vec{r}} + 2\delta \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.373)$$

unde

$$2\delta = \frac{\gamma}{m} \quad (5.374)$$

În regim staționar, soluția ecuației (5.373) este de forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.375)$$

Impunând soluției (5.375) să verifice ecuația (5.373), obținem:

$$\dot{\vec{r}} = i \omega \vec{r}, \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}, \quad -\omega^2 \vec{r}_0 + 2i \delta \omega \vec{r}_0 + \omega_0^2 \vec{r}_0 = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \delta \omega}, \quad \vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \delta \omega} \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.376)$$

Am neglijat soluția ecuației omogene ($\ddot{\vec{r}} + 2\delta \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0$)

$$\vec{r}' = (\vec{a} \cdot \cos \omega_0' t + \vec{b} \cdot \sin \omega_0' t) \cdot e^{-\delta t} \quad (5.377)$$

deoarece ea aduce o contribuție tranzitorie de durată foarte scurtă.

Această aproximație este valabilă pentru timpi mult mai mari decât timpul de relaxare $\tau' = \frac{1}{\delta}$, deoarece în acest caz $e^{-\delta t} \ll 1$ (putem neglija soluția (5.377)). Pentru mediile transparente la radiațiile vizibile $\omega_0, \omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$; $\delta \approx 10^6 \div 10^{12} \text{ s}^{-1} \ll \omega_0, \omega$ astfel că timpii care prezintă interes fizic sunt mult mai mari decât o perioadă optică ($t \gg \frac{1}{\delta} \gg \frac{1}{\omega_0}, \frac{1}{\omega}$). Rezultă că soluția staționară este valabilă pentru timpi mai mari decât

perioada vibrației oscilatorului ($T_0 = 2\pi/\omega_0$) și cea a vibrației forțate ($T = 2\pi/\omega$) care este înlăturată la $t = 0$, dar nu poate prezice răspunsul oscilatorului în interiorul primelor câteva cicluri după $t = 0$. Restricția cerută ($t \gg 10^{-15} \text{ s}$) nu are semnificație reală în optică, deoarece sub 10^{-13} s nu există până în prezent posibilitatea de rezoluție temporală.

Soluția fizică este partea reală a lui \vec{r} din (5.376):

$$\text{Re } \vec{r} = \frac{\vec{f}_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \cdot \cos(\omega t - k z) + \frac{2\vec{f}_0 \delta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \cdot \sin(\omega t - k z) \quad (5.378)$$

unde

$$\vec{f}_0 = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0 \quad (\text{vezi FIZICA, vol. I, pag. 35}) \quad (5.379)$$

Astfel câmpul electric induce într-un atom un moment de dipol

$$\text{Re } \vec{p} = e \cdot \text{Re } \vec{r} \quad (5.380)$$

Datorită atenuării prin frecare, momentul de dipol nu oscilează în fază cu intensitatea câmpului electric aplicat (termenul proporțional cu $\sin(\omega t - k z)$ arată că există o întârziere de fază în răspunsul dipolului). De aceea se definește un moment de dipol complex

$$\vec{p} = e \cdot \vec{r} = \frac{\frac{e^2}{m} \cdot \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \delta \omega} \cdot e^{i(\omega t - k z)} \quad (5.381)$$

Deoarece $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, $\chi_e = \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \alpha$, rezultă:

$$\alpha = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \delta \omega}, \quad \chi_e = \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \alpha \quad (5.382)$$

Impunând ca \vec{E} din relația (5.352) și

$$\vec{P} = N \vec{p} = \frac{N e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} \cdot \vec{E}$$

să verifice (5.345), obținem:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{N e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} \cdot \vec{E} \quad (5.383)$$

sau $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2$, unde

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)} \quad (5.384)$$

În cazul mai multor electroni

$$\alpha = \sum_{j=1}^Z \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\delta_j\omega} \quad (5.385)$$

Deoarece polarizabilitatea este o mărime aditivă (conform relației de mai sus), vom scrie separat contribuția dipolilor nerezonanți (indicele n) și a celor rezonanți (indicele r) în expresia lui n^2 :

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \chi_e = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \cdot \alpha = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} (\alpha_n + \alpha_r) = 1 + \sum_i \frac{N_{ni}}{\epsilon_0} \cdot \alpha_{ni} + \frac{N_r}{\epsilon_0} \cdot \alpha_r = \\ &= n_n^2 + \frac{N_r}{\epsilon_0} \cdot \alpha_r \quad \Rightarrow \quad n^2 = n_n^2 \left(1 + \frac{N_r \alpha_r}{n_n^2 \epsilon_0} \right) \end{aligned} \quad (5.386)$$

Al doilea termen din paranteză este subunitar, deoarece concentrația dipolilor rezonanți este mică. Folosind dezvoltarea binomială (5.367) obținem:

$$n \approx n_n + \frac{N_r \alpha_r}{2 n_n \epsilon_0} \quad (5.387)$$

Dacă ω este destul de departe de pulsațiile de rezonanță ω_j , atunci putem lua $\delta \approx 0$ fără să afectăm în mod apreciabil rezultatul. Pentru orice pulsație de rezonanță ω_j suntem aproape la rezonanță dacă

$$\left| \omega_j - \omega \right| \leq \delta_j \quad (5.388)$$

Condiția cerută pentru a fi departe de rezonanță este:

$$\left| \omega_j - \omega \right| \gg \delta_j \quad (5.389)$$

Presupunem că există o pulsație $\omega_j = \omega_0$ destul de apropiată de ω pentru a satisface condiția (5.388), iar celelalte pulsații satisfac condiția (5.389). Întrucât o contribuție importantă la α provine numai de la rezonanță ($\omega_j = \omega_0$, $\delta_j = \delta$), putem scrie relația (5.385) astfel:

$$\alpha_r = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} \quad (5.390)$$

Dacă

$$|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \omega \quad (\text{în acord cu (5.388)}) \quad (5.391)$$

atunci

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega(\omega_0 - \omega)$$

$$\alpha_r = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{2\omega(\omega_0 - \omega) + 2i\delta\omega} \Rightarrow \alpha_r = \frac{e^2}{2m\omega} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\delta} \quad (5.392)$$

Înlocuind α_r în (5.387), obținem:

$$n = n_n + \frac{N_r}{2n_n \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2m\omega} \cdot \frac{\omega_0 - \omega - i\delta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2}, \quad n = n' - i n'' \quad (5.393)$$

unde:

$$n' = n'_n + \frac{N_r e^2}{4n_n \varepsilon_0 m \omega} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2} \quad (5.394)$$

$$n'' = n''_n + \frac{N_r e^2}{4n_n \varepsilon_0 m \omega} \cdot \frac{\delta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2} \quad (5.395)$$

$$n_n = n'_n + n''_n; \quad n'_n \gg n''_n \quad (5.396)$$

Folosind relația de dispersie și definiția indicelui de refracție complex, putem scrie formula (5.352) sub forma:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n z\right)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c} \cdot z\right)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n' - i n''}{c} \cdot z\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\omega n''}{c} z} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n'}{c} \cdot z\right)} \quad (5.397)$$

Se constată că unda electromagnetică este atenuată exponențial în lungul direcției de propagare. Deoarece intensitatea undei este proporțională cu pătratul amplitudinii vectorului \vec{E} rezultă:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\frac{2\omega n''}{c} z} = I(0) \cdot e^{-a z} \quad (5.398)$$

unde $I(0)$ este intensitatea undei pentru $z = 0$, iar a este coeficientul de absorbție datorat rezonanței la pulsația ω_0 .

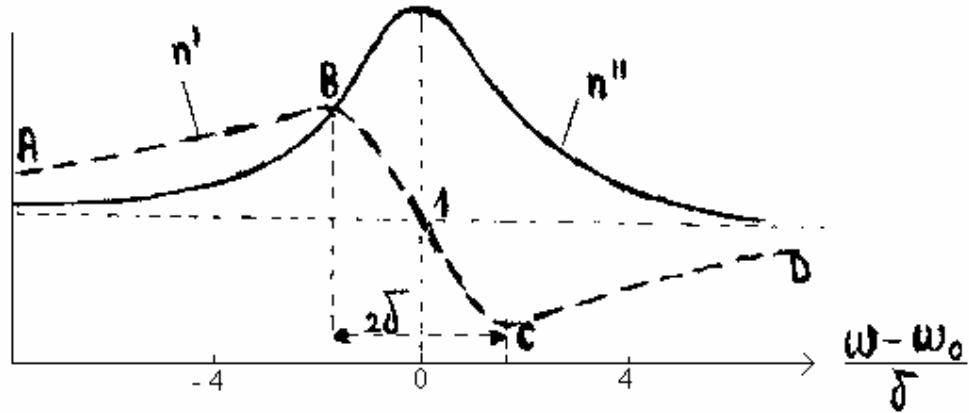
$$a = \frac{2\omega n''}{c} = a''_n + \frac{N_r e^2}{2n_n c \cdot \varepsilon_0 m} \cdot \frac{\delta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2} \quad (5.399)$$

$$a''_n = \frac{2\omega}{c} \cdot n'' \quad (5.400)$$

a''_n este coeficientul de absorbție datorat atomilor nerezonanți.

Din relația (5.398) se constată că absorbția undei este determinată de partea imaginară a indicelui de refracție.

Graficul funcției $n'(\omega)$ se numește curbă de dispersie, iar graficul funcției $n''(\omega)$ este o curbă de absorbție. Viteza de fază a undei (5.397) este c/n' . Drept “indice de refracție” se consideră partea reală a indicelui de refracție complex. Dispersia anomală (porțiunea BC a curbei de dispersie) este prezentă numai în apropierea benzilor de absorbție.



$$AB, CD \Rightarrow \frac{dn'}{d\omega} > 0 \text{ (dispersie normală)}$$

$$BC \Rightarrow \frac{dn'}{d\omega} < 0 \text{ (dispersie anomală)}$$