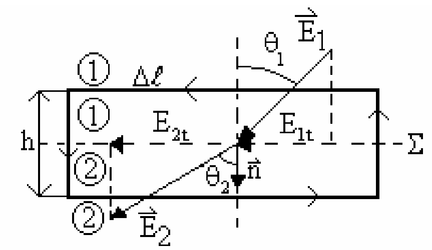
4. Condițiile de continuitate la suprafața de separare a două medii

4.1. Continuitatea componentei tangențiale a lui $\vec{E}$

Considerăm un contur închis Γ de forma unui dreptunghi de laturi $h \to 0$ (h este infinitezimal) şi $\Delta\ell$, astfel încât latura $\Delta\ell$ este paralelă cu suprafața de separare dintre cele două medii ($\Delta\ell$ se consideră suficient de mică încât să putem presupune că vectorul $\vec{E}$ este practic constant pe această distanță).



Din forma integrală a legii inducției electromagnetice (a doua ecuație a lui Maxwell) (3.3) , obținem:

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\vec{B}\cdot\vec{dS} \qquad \Rightarrow$$

$$E_{1t}\Delta\ell - E_{2t}\Delta\ell = -\frac{d}{dt}\left(B\cdot h\cdot\Delta\ell\right)$$

Când laturile h tind la zero, fluxul inducției magnetice prin suprafața $h\cdot\Delta\ell \to 0$ este practice nul, astfel că relația de mai sus devine:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{sau} \quad \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\times\vec{n} = 0$$

Rezultă că la traversarea unei suprafețe încărcate cu o sarcină superficială componenta tangențială a intensității câmpului electric $\vec{E}$ este continuă (componentele tangențiale ale lui $\vec{E}$ pe suprafața de separare sunt egale în cele două medii). Am folosit faptul că sensul de parcurs pe laturile din cele două medii este opus (pe latura de sus sensul de parcurs este opus componentei E_{1t} .

4.2. Continuitatea componentei tangențiale a lui $\vec{H}$

Fie Σ o suprafață pe care este distribuită o sarcină cu densitatea σ. Ne alegem o curbă dreptunghiulară ca în paragraful 4.1 . Din forma integrală a legii lui Ampère (prima ecuație a lui Maxwell) (3.1) obținem:

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{S_\Gamma}\vec{j}_{lib}\cdot\vec{dS} + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\vec{D}\cdot\vec{dS} \qquad \Rightarrow$$

$$H_{1t}\Delta\ell - H_{2t}\Delta\ell = \vec{j}_{lib}\cdot h\cdot\Delta\ell\cdot\vec{n}' + \frac{d}{dt}\left(\vec{D}\cdot h\cdot\Delta\ell\cdot\vec{n}'\right)$$

unde $\vec{n}'$ este versorul normalei la suprafața $S_\Gamma = h\cdot\Delta\ell$ a dreptunghiului considerat. Când laturile paralele cu normala la suprafața de separare a celor două medii tind către zero ($h\to 0$) , fluxul vectorului $\vec{D}$ se anulează. Astfel în cazul mediilor dielectrice ($\vec{j}_{lib} = 0$) componenta tangențială a vectorului $\vec{H}$ este continuă pe suprafața de separare:

$$H_{1t} = H_{2t}$$

Dacă j_S este proiecția vectorului densitate superficială a unui curent de conducție pe direcția $\vec{n}'$ atunci :

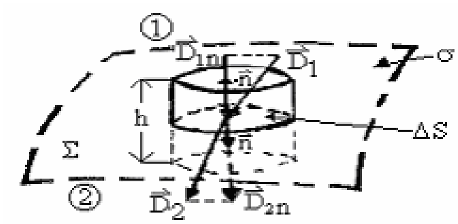
$$I = \int_{S_\Gamma}\vec{j}_{lib}\cdot\vec{dS} \cong j_S\cdot d\ell \qquad \Rightarrow \qquad H_{1t} - H_{2t} = j_S$$

unde j_S este definit ca limita produsului $j \cdot h$ când $h \to 0$ şi $j \to \infty$. În cazul în care conductivităţile mediilor în contact sunt finite, $j_S = 0$, deoarece $\vec{E}$ este finit şi $\sigma \cdot \vec{E} \cdot h \to 0$ când $h \to 0$. Astfel, pentru conductivităţi finite (care este, de fapt, cazul general), rezultă:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \text{sau} \quad \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \times \vec{n} = 0$$

4.3. Discontinuitatea componentei normale a lui $\vec{D}$

Considerăm că suprafaţa de separare dintre cele două medii este intersectată de o suprafaţă gaussiană de formă cilindrică, cu generatoarea perpendiculară pe suprafaţa Σ şi cu bazele paralele la aceasta.



Notăm cu $h \to 0$ înălţimea infinitezimală a cilindrului, a cărui arie a bazei este ΔS (suficient de mică pentru a putea presupune că $\vec{D}$ este uniform peste ea. Deoarece densitatea de sarcină superficială liberă pe interfaţă este σ_{lib} rezultă că sarcina din interiorul suprafeţei cilindrice elementare este $q_{lib} = \sigma_{lib} \cdot \Delta S$.

Din forma integrală a legii lui Gauss (a patra ecuaţie a lui Maxwell) (3.5) sau din (2.109) , a cărei formă integrală este:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_V \rho_{lib} dv \tag{4.1}$$

rezultă:

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n} \cdot \Delta S + \vec{D}_1 \left(-\vec{n}\right) \cdot \Delta S \approx \sigma_{lib} \cdot \Delta S$$

unde am neglijat fluxul prin suprafaţa laterală a cilindrului (când $h \to 0$ aria suprafeţei laterale tinde la zero) şi sarcinile volumice libere din interiorul cilindrului (când $h \to 0$ volumul cilindruluitinde la zero). Obţinem:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{lib} \quad \text{sau} \quad \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = \sigma_{lib}$$

Această relaţie arată că prezenţa unei pături superficiale încărcate electric duce la discontinuitatea componentei normale a lui $\vec{D}$.

Dacă densitatea de sarcină superficială liberă σ_{lib} este nulă pe interfaţă, atunci există o continuitate a componentei noprmale a lui $\vec{D}$:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \Rightarrow \quad D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2 \cos\theta_2$$

Din condiţia de continuitate a componentei tangenţiale a lui $\vec{E}$ rezultă:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

Din ultimele două relaţii rezultă:

$$\varepsilon_{r2} \cdot tg\theta_1 = \varepsilon_{r1} \cdot tg\theta_2$$

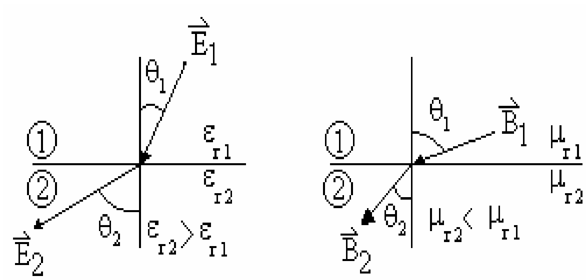
Liniile lui $\vec{E}$ preferă mediul cu permitivitatea mai mare pentru că străbat un drum mai lung în acel mediu.

4.4. Continuitatea componentei normale a lui $\vec{B}$

Aplicând legea fluxului magnetic (a treia ecuație a lui Maxwell) (3.4) la suprafața cilindrică elementară ale cărei baze sunt situate în cele două medii diferite şi ținând seama că fluxul magnetic prin suprafața laterală a cilindrului este nul (pentru $h \to 0$ aria suprafeței laterale este neglijabilă) rezultă:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0 \quad \Rightarrow \qquad B_{1n} = B_{2n} \qquad \Rightarrow \quad B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$$

Rezultă că există o continuitate a componentei normale a lui $\vec{B}$.



Folosind relația $\vec{B} = \mu \vec{H}$ şi condițiile de continuitate a componentei tangențiale a lui $\vec{H}$:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \Rightarrow$$

$$H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$$

obținem:

$$\mu_{r2} \cdot tg\theta_1 = \mu_{r1} \cdot tg\theta_2$$

Rezultă că liniile lui $\vec{B}$ sunt mai îndepărtate de normală în mediul liniar şi izotrop cu permeabilitatea magnetică mai mare (liniile lui $\vec{B}$ preferă mediul cu permeabilitate magnetică mare).