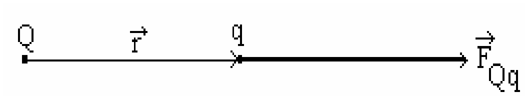
2. Bazele experimentale ale opticii electromagnetice

2.1. Legea lui Coulomb

În experienţa lui Coulomb s-a stabilit că în jurul unui corp încărcat cu sarcină electrică apare un câmp de forţă, care acţionează asupra unei sarcini electrice de probă aflate în apropiere. Interacţiunea dintre sarcinile electrice se realizează prin intermediul câmpului electric. Sarcina electrică de probă se consideră punctiformă şi de valoare suficient de mică, pentru a nu perturba distribuţia câmpului electric. Legea lui Coulomb se exprimă prin relaţia (1.53) sau:

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.1}$$

unde q este sarcina corpului de probă, aflat în vid la distanţa r de sarcina punctiformă staţionară Q. Forţa este repulsivă dacă sarcinile au acelaşi semn şi este atractivă dacă sarcinile sunt de semn contrar.



Se defineşte intensitatea câmpului electric în vid ca raportul dintre forţa care se exercită în vid asupra corpului de probă şi sarcina lui electrică q atunci când aceasta din urmă tinde practic către zero.

Trebuie să ţinem seama de faptul că nu putem diviza o sarcină electrică decît pînă la sarcina electronului e, întrucât sarcina unei particule este un multiplu întreg de sarcini elementare $q = \pm n e$.

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{F}_{Qq}}{q} \tag{2.2}$$

Pentru o distribuţie discretă de sarcini $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$, intensitatea câmpului electric într-un punct de coordonate x, y, z este:

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} \tag{2.3}$$

sau:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N \tag{2.3'}$$

Această relaţie exprimă principiul superpoziţiei câmpurilor electrice (intensitatea câmpului electric rezultant este egală cu suma vectorială a intensităţilor câmpurilor electrice generate de fiecare sarcină electrică).

Dacă sursa câmpului electric este o distribuţie continuă de sarcini, atunci în relaţia (2.3) trebuie să înlocuim suma cu integrala corespunzătoare:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(x',y',z')}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \, dx'\, dy'\, dz' \tag{2.4}$$

unde ρ este densitatea volumică de sarcină, definită ca limita raportului dintre sarcina electrică $\Delta Q'$ a unui element de volum $\Delta v'$ al corpului şi respectivul element de volum, atunci când acesta din urmă tinde către volumul limită v'_m care corespunde sarcinii electrice elementare e:

$$\rho = \lim_{\Delta v' \to v'_m} \frac{\Delta Q'}{\Delta v'} \tag{2.5}$$

Elementul de volum $dx' dy' dz'$ este centrat în jurul punctului P' (x', y', z') , iar versorul $\frac{\vec{r}}{r}$ este orientat de la punctul current P' către punctul P (x, y, z) în care se determină intensitatea câmpului electric. Variabilele de integrare x', y', z' mătură întreg volumul v' în care se află sarcini electrice. Dacă sarcina Q' este repartizată în mod neuniform în volumul v' , vom împărţi acest volum în elemente mici de volum $\Delta v'$ care trebuie să fie suficient de mari ca să conţină un număr mare de sarcini elementare discrete (pentru ca sarcina $\Delta Q'$ conţinută în $\Delta v'$ să poată fi considerată continuă) şi suficient de mici (pentru a considera sarcina $\Delta Q'$ constantă în volumul v'). Principiul superpoziţiei poate fi justificat în mod direct (cu ajutorul balanţei lui Cavendish) prin aceleaşi experimente ce au stabilit valabilitatea legii lui Coulomb.

Liniile de câmp electric sînt curbe tangente în fiecare punct la direcţia locală a vectorului intensitate de câmp electric $\vec{E}$. Într-un câmp electrostatic fiecare linie de câmp porneşte de pe o sarcină pozitivă şi se sfârşeşte pe una negativă. Deoarece o linie de câmp electric este tangentă în fiecare punct P (x, y, z) la vectorul $\vec{E}(x, y, z)$ rezultă:

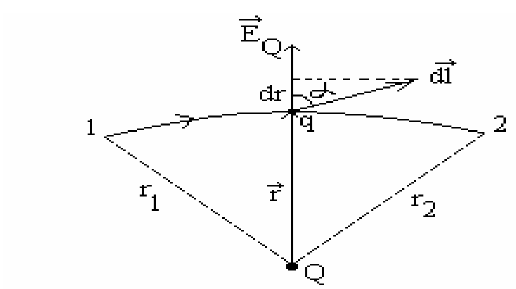
$$\vec{dl} = c\,\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz = c\left(\vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z\right) \quad \Rightarrow$$

$$dx = c\,E_x\,, \quad dy = c\,E_y\,, \quad dz = c\,E_z \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \tag{2.6}$$

unde $\vec{dl}$ este un element infinitesimal de pe linia de câmp electric, iar c este un scalar arbitrar. Relaţia (2.6) reprezintă ecuaţia diferenţială a liniilor de câmp electric.

2.2. Lucrul mecanic al forţelor electrice. Energia potenţială electrică. Potenţialul câmpului electrostatic

Forţa (2.1) care acţionează asupra unei sarcini electrice de probă q aflate în câmpul electric generat de o sarcină Q este o forţă de tip central. Se ştie că forţele centrale sunt forţe conservative, adică forţe care derivă dintr-un potenţial.



Calculăm lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unei sarcini electrice de probă q în câmpul electrostatic al sarcinii electrice Q din punctul 1 în punctul 2 , pe o traiectorie oarecare. Lucrul mecanic elementar se exprimă ca produsul scalar dintre forţa $\vec{F}_{Qq}$ şi elementul de drum $\vec{dl}$ de pe traiectoria aleasă

$$dL = \vec{F}_{Qq} \cdot \vec{dl} = \underline{q\,\vec{E}_q} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{dl}}{r} \tag{2.7}$$

Deoarece $\vec{r} \cdot \vec{dl} = r \cdot dl \cdot \cos\alpha = r \cdot dr$, rezultă:

$$L_{12} = q \int_1^2 \vec{E}_Q \cdot \vec{dl} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.8}$$

Se constată că lucrul mecanic depinde numai de poziţia punctului iniţial şi a celui final. Dacă sarcina de probă se întoarce în punctul iniţial pe o traiectorie oarecare, atunci lucrul mecanic L_{21} efectuat de sarcina de probă împotriva câmpului este $L_{21} = -L_{12}$. Astfel lucrul mecanic efectuat la deplasarea cu viteză constantă a unei sarcini de probă q pe o curbă închisă Γ în câmpul unei sarcini fixe Q (sau în general în câmpul unei distribuţii de sarcini staţionare) este nul.

$$q \oint_{\Gamma} \vec{E}_Q \cdot \vec{dl} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \oint_{\Gamma} \vec{E}_Q \cdot \vec{dl} = 0 \tag{2.9}$$

Relaţia (2.9) exprimă faptul că un câmp electrostatic este un câmp conservativ (aceasta este una din proprietăţile fundamentale ale câmpului electrostatic). Aplicând teorema lui Stokes (1.20) rezultă:

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0 \tag{2.10}$$

adică un câmp electrostatic (câmpul oricărei distribuţii de sarcini fixe) este un câmp irotaţional. Relaţia (2.10) duce la concluzia că intensitatea câmpului electrostatic poate fi scrisă ca fiind gradientul unei mărimi scalare V numită potenţial electric.

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{2.11}$$

Semnul minus arată că intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ este orientată în sensul scăderii potenţialului V. Astfel $\vec{E}$ are sensul opus variaţiei potenţialului ($\vec{E}$ este îndreptat dinspre regiunea cu potenţial pozitiv spre regiunea cu potenţial negativ).

Pentru deplasarea sarcinii q din punctul 1 până la infinit ($r_2 \to \infty$) se consumă lucru mecanic:

$$L = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \tag{2.12}$$

egal cu lucrul mecanic necesar aducerii sarcinii q de la infinit în punctul 1 :

$$L = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_1} \frac{-dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

Sarcina q se deplasează în sensul în care acţionează forţa lui Coulomb din partea sarcinii Q asupra sarcinii q. Am ţinut seama de faptul că forţa ce trebuie aplicată pentru a deplasa una din sarcini (q) spre cealaltă (Q) este egală cu forţa lui Coulomb şi de sens opus acesteia. Astfel lucrul mecanic nu depinde de ordinea introducerii sarcinilor în sistem şi este independent şi de drumul parcurs de sarcini. Rezultă că acest lucru mecanic exprimă o proprietate a dispunerii finale a sarcinilor şi de aceea se numeşte energie potenţială electrică a sistemului de sarcini analizat. În cazul unui sistem în care se află N sarcini putem însuma pe perechi, astfel că energia potenţială a sistemului este:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}} \tag{2.13}$$

În (2.13) se ia $j = 1$ şi se însumează după $k = 2, 3, 4, \ldots, N$; apoi se ia $j = 2$ şi se însumează după $k = 1, 3, 4, \ldots, N$; etc. pînă la $j = N$. Evident, în felul acesta fiecare pereche apare în sumă de două ori, de aceea în faţa sumei s-a pus factorul 1/2.

La definirea oricărei energii potenţiale se consideră un nivel de referinţă. În cazul nostru s-a ales energia potenţială egală cu zero pentru situaţia în care sarcinile există, dar se află depărtate una de alta la infinit.

Prin <u>diferența de potențial</u> $V_1 - V_2$ între punctele 1 și 2 se înțelege lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului electrostatic pentru deplasarea sarcinii electrice pozitive, de valoare egală cu unitatea, din punctul 1 în punctul 2 :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.14}$$

Dacă potențialul punctului final 2 este zero, atunci potențialul în punctul 1 este:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \tag{2.15}$$

adică potențialul într-un punct oarecare se determină ca lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului electric pentru deplasarea sarcinii electrice pozitive egale cu unitatea din punctul respectiv până în punctul în care potențialul V este zero. Punctul în care potențialul V este zero poate fi ales arbitrar. De regulă se consideră că punctul de potențial nul se află la infinit și în acest caz potențialul V_1 într-un punct 1 , oarecare, este dat de formula:

$$V_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{2.16}$$

Din relațiile (2.8) și (2.14) rezultă:

$$L_{12} = q\,(V_1 - V_2) \tag{2.17}$$

Pe baza definiției potențialului într-un punct, energia potențială electrică a sistemului de N sarcini din (2.13) se scrie:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \tag{2.18}$$

Această relație poate fi pusă sub forma:

$$U = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2 + \ldots + q_N V_N\right) = \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \ldots + \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{1N}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \ldots + \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{2N}}\right) + \ldots + \frac{1}{2} q_N \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{N1}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{N2}} + \ldots + \frac{q_{N-1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{NN-1}}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \ldots + \frac{q_1 q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{1N}}}_{U_1} + \underbrace{\frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}} + \ldots + \frac{q_2 q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{2N}}}_{U_2} + \ldots + \underbrace{\frac{q_{N-1} q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_{N-1N}}}_{U_{N-1}} =$$

$$= U_1 + U_2 + \ldots + U_{N-1}$$

Pentru o distribuție continuă a sarcinii electrice vom înlocui q_i din relația (2.18) cu $\rho\, dv' = \rho\, dx'\, dy'\, dz'$, iar suma trece într-o integrală de volum:

$$U = \frac{1}{2}\int_{V'} v\,\rho\, dv' \tag{2.19}$$

Principiul superpoziției se aplică şi în cazul potențialelor, la fel ca în cazul câmpurilor electrice. Astfel potențialul unei distribuții continue de sarcină electrică este:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r} \tag{2.20}$$

unde

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

este distanța de la punctul P' (x', y', z') din elementul de volum $dx'\,dy'\,dz'$ (acest element de volum este centrat în jurul punctului P') la punctul P (x, y, z) în care se determină potențialul. Se constată că diferența dintre această integrală (2.20) şi integrala care dă intensitatea câmpului electric al distribuției de sarcină (2.4) constă în faptul că aici apare r şi nu r^2, iar integrala este un scalar şi nu un vector. Dacă determinăm potențialul într-un punct din interiorul distribuției continue de sarcină pe baza formulei (2.20) s-ar părea că pentru r = 0 potențialul V ar fi infinit. Acest lucru nu este adevărat, deoarece cu cât este mai mică raza unei pături sferice centrate în jurul punctului P , cu atât contribuția acesteia la potențial este mai mică. Astfel sarcina dintr-o pătură sferică de grosime dr' şi de rază r' centrată în jurul punctului P' contribuie la elemental de potențial dV cu

$$\frac{4\pi r'^2 dr'\rho}{4\pi\varepsilon_0 r'} = r'dr'\rho/\varepsilon_0$$

O pătură sferică de rază r' mai mică are o contribuție mai mică la potențialul dV . Rezultă că potențialul V este o funcție convergentă (integrala (2.20) este finită). La fel se arată că $\vec{E}$ din (2.4) este o funcție convergentă.

2.3. Legea lui Gauss

Fluxul intensității câmpului electric $\vec{E}$ prin suprafața unei sfere de rază r , în centrul căreia se află o sarcină electrică punctiformă q , este:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \oiint_S E\cdot dA = E\oiint_S dA = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.21}$$

În general, fluxul vectorului $\vec{E}$ printr-o suprafață închisă, de orice formă, este egal cu suma algebrică a sarcinilor electrice din interiorul volumului limitat de suprafața respectivă, împărțită la permitivitatea vidului ε_0 :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \tag{2.22}$$

Dacă în interiorul suprafeței S sarcinile electrice sunt distribuite continuu, cu o densitate volumică de sarcină electrică ρ, vom înlocui în relația (2.22) suma cu o integrală de volum:

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dv} \tag{2.23}$$

unde v este volumul limitat de suprafața închisă S .

Relația (2.22) sau relația (2.23) exprimă legea lui Gauss sub formă integrală. În relația (2.21) am dedus legea lui Gauss pe baza legii lui Coulomb. Astfel legea lui Gauss este echivalentă cu legea lui Coulomb pentru sarcini staționare. Legea lui Gauss se aplică însă şi în cazul sarcinilor în mişcare (chiar şi în cazul sarcinilor în mişcare accelerată). Legea lui Gauss poate fi obținută în cazul general, dacă se ține seama de faptul că integrala din elementul de unghi solid

$$d\Omega = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\overrightarrow{dA}}{r^2} = \frac{dA \cos\alpha}{r^2} \tag{2.24}$$

(α este unghiul dintre intensitatea câmpului electric ce străbate elementul de suprafață dA şi normala la acesta) este egală cu 4π :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \; \underset{=\!=}{(2.2)} \; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.25}$$

Aplicând teorema divergenței (1.11) membrului stâng al relației (2.2) rezultă:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dv \tag{2.26}$$

Deoarece această ecuație este valabilă pentru orice volum finit v , integranții sunt egali:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{2.27}$$

Relația (2.27) exprimă <u>legea lui Gauss sub formă diferențială</u>.

Legea lui Gauss sub formă integrală (2.23) este o lege <u>nelocală</u> (se referă la o regiune finită şi nu la un punct specific al spațiului), iar legea lui Gauss sub formă diferențială este o lege <u>locală</u> (leagă comportarea lui $\vec{E}$ în vecinătatea infinitezimală a unui punct dat de valoarea densității de sarcină în acel punct).

Înlocuind în (2.27) intensitatea câmpului electric din relația (2.11) obținem <u>ecuația lui Poisson</u>:

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla(\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{2.28}$$

Această ecuație leagă densitatea de sarcină volumică locală (dintr-un punct dat) de derivate spațială de ordinal doi a lui V în regiunea punctului respective. Pentru $\rho = 0$, ecuația (2.28) se numeşte <u>ecuația lui Laplace</u>:

$$\Delta V = 0 \tag{2.29}$$

Înlocuind ρ din (2.28) în (2.19) obținem energia potențială U a unei distribuții de sarcină în funcție de intensitatea câmpului electric:

$$U = \frac{1}{2}\int_{V'} V \rho\, dv' = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} V\, \Delta V\, dv' = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{(\infty)} \nabla(V \nabla V)\, dv' - \int_{(\infty)} (\nabla V)(\nabla V)\, dv'\right] =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{(S_\infty)} V \nabla V\, \overrightarrow{dA} - \int_{(\infty)} (\nabla V)(\nabla V)\, dv'\right] = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{(\infty)} (\nabla V)(\nabla V)\, dv' \; \underset{=\!=}{(2.11)} \; \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{(\infty)} \vec{E} \cdot \vec{E}\, dv'$$

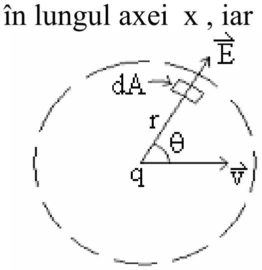
$$\Rightarrow \qquad \boxed{U = \int_{V'} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dv'} \tag{2.30}$$

Am folosit formula $\nabla\left(V\,\nabla\,V\right) = \left(\nabla\,V\right)\left(\nabla\,V\right) + V\,\nabla^2 V$ (∇ acționează ca un operator de derivare), am extins integrala de la volumul v' care include toate regiunile în care există $\vec{E}$ la tot spațiul şi am folosit teorema divergenței pentru a trece una din integrale într-o integrală pe suprafața de la infinit, care se anulează, deoarece pentru $r \to \infty, \frac{1}{r} \to 0$ (la distanță mare V variază ca $\frac{1}{r}$, ∇V variază ca $\frac{1}{r^2}$, suprafața depinde de r^2, astfel că $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r^2 = \frac{1}{r}$). Din (2.30) rezultă că densitatea volumică de energie electrică este:

$$\rho_E^e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \tag{2.31}$$

Legea lui Gauss poate fi generalizată la cazul în care volumul mărginit de suprafața S cuprinde pe lângă sarcinile libere şi un dielectric ce conține sarcini legate (la o moleculă de apă centrul sarcinilor pozitive este separat de centrul sarcinilor negative). În acest caz ρ din ecuația (2.27) reprezintă densitatea de sarcină totală ($\rho = \rho_{lib} + \rho_{leg}$), iar q din (2.25) este sarcina electrică totală ($q = q_{lib} + q_{leg}$).

Legea lui Gauss este valabilă şi în cazul în care sarcina q se mişcă uniform (cu viteză constantă). Acest lucru poate fi demonstrat în cazul în care sarcina q se deplasează cu viteza v în lungul axei x, iar S se consideră o sferă imaginară de rază r şi arie $S = 4\pi r^2$.



Folosind relația (1.63) şi luând elementul de arie sferică egal cu $dA = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$, obținem:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2 r^2 \left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\cdot 2\pi r^2 \cdot \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0 a^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{q}{2\varepsilon_0 a^2}\int_0^{\pi}\frac{-d(\cos\theta)}{\left[1-\beta^2\left(1-\cos^2\theta\right)\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0 a^2}\int_0^{\pi}\frac{-d(\cos\theta)}{\left(\beta^2\cos^2\theta+1-\beta^2\right)^{3/2}} = \frac{q}{2\varepsilon_0 a^2}\int_1^{-1}\frac{-dx}{\left(\beta^2 x^2+\frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2.4. Legea lui Ohm

Se defineşte curentul electric de conducție ca o deplasare ordonată a unor sarcini electrice libere (electroni, ioni) sub acțiunea câmpului electric. Se consideră că sensul curentului electric coincide cu sensul de mişcare al sarcinilor electrice pozitive.

Intensitatea curentului electric I este sarcina electrică ce trece prin suprafața secțiunii transversale a unui conductor în unitatea de timp:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{2.32}$$

Densitatea de curent electric $\vec{j}$ este un vector a cărui mărime este egală în fiecare punct cu sarcina electrică ce trece, în unitatea de timp, prin unitatea de arie orientată normal la direcţia de deplasare ordonată a particulelor şi al cărui versor coincide cu versorul vitezei medii $\vec{v}$ de deplasare a particulelor:

$$\vec{j} = \frac{dq}{dA_n\, dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \qquad (2.33)$$

Din relaţiile (2.32) şi (2.33) rezultă că intensitatea curentului electric I este egală cu fluxul vectorului densitate de curent $\vec{j}$:

$$I = \oiint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dA} \qquad (2.34)$$

Dacă suprafaţa S străbătută de curent este închisă, atunci integrala din (2.34) reprezintă viteza cu care sarcina electrică părăseşte volumul mărginit de suprafaţa S:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dA} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho\, dv = -\frac{dq}{dt} \qquad (2.35)$$

Semnul minus arată că o creştere a fluxului sarcinilor electrice care părăsesc suprafaţa S conduce la o scădere a sarcinii electrice care rămâne în interiorul acelei suprafeţe. Relaţia (2.35) este forma integrală a <u>legii conservării sarcinii electrice</u> în regim dinamic.

Aplicând teorema divergenţei la integrala de suprafaţă din (2.35) obţinem:

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{j}\, dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad (2.36)$$

Derivata totală din faţa integralei a trecut în derivată parţială sub integrală, deoarece ρ poate depinde de x, y, z şi de t. Deoarece volumul de integrare este arbitrar, rezultă:

$$\mathrm{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2.37)$$

Această relaţie reprezintă forma diferenţială a legii conservării sarcinii electrice sau <u>ecuaţia de continuitate</u> a curentului electric (este analoagă ecuaţiei de continuitate din hidrodinamică). În regim staţionar, deşi sarcinile electrice nu se găsesc în echilibru, mărimile macroscopice sunt independente de timp şi deci:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{div}\, \vec{j} = 0 \qquad (2.38)$$

Rezultă că în regim staţionar densitatea de curent electric $\vec{j}$ este un vector solenoidal, liniile de curent (curbele tangente la direcţia locală a lui $\vec{j}$) fiind curbe închise, astfel că un curent electric staţionar se poate stabili numai în circuite închise.

Pentru a menţine un curent electric într-un conductor se foloseşte o <u>sursă electrică</u>, astfel că în interiorul acestei surse are loc trecerea sarcinilor pozitive de la un potenţial mai scăzut la un potenţial mai ridicat, sub acţiunea unor forţe neelectrostatice (de natură electrochimică, electromagnetică etc.) numite <u>forţe imprimate</u> (exterioare). Lucrul mecanic efectuat de forţele imprimate pentru deplasarea unităţii de sarcină electrică pozitivă printr-o porţiune de circuit se numeşte <u>tensiune electromotoare</u>. Pe un circuit întreg, în afara forţelor imprimate $\vec{F}_i$, acţionează şi forţele electrostatice, de natură coulombiană $\vec{F}_C = qE$ şi deci rezultanta forţelor care acţionează asupra sarcinilor electrice este $\vec{F} = \vec{F}_i + \vec{F}_C = q\left(\vec{E}_i + \vec{E}\right)$. Lucrul mecanic efectuat de forţa totală $\vec{F}$ asupra sarcinii electrice q pe o porţiune de circuit este:

$$L_{12} = q\int_1^2 \vec{E}_i \vec{dl} + q\int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl} = q\,\mathcal{E}_{12} + q\,(V_1 - V_2) \quad (2.39)$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele imprimate şi de forțele electrostatice pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă pe o porțiune de circuit se numeşte <u>tensiune electrică</u> (căderea de tensiune) U_{12}:

$$U_{12} = \mathcal{E}_{12} + V_1 - V_2 = L_{12}/q \quad (2.40)$$

Pentru un circuit închis $V_1 = V_2$ (conform relației (2.9)), deci:

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \oint_\Gamma \vec{E}_i \vec{dl} \quad (2.41)$$

adică tensiunea electromotoare pe întregul circuit reprezintă circulația intensității câmpului electric imprimat.

Din relația (2.40) rezultă că tensiunea electrică este egală cu diferența de potențial numai pe porțiunea de circuit în care nu acționează forțele imprimate, adică nu există surse de tensiune electromotoare.

<u>Legea lui Ohm</u> arată că densitatea curentului de conducție

$$j = \frac{I}{S} \quad (2.42)$$

este proporțională cu intensitatea câmpului electric dintr-un conductor:

$$\underline{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right)} \quad (2.43)$$

unde σ este conductivitatea electrică ($\sigma_{Cu} = 5{,}8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\,m^{-1}$, $\sigma_{Al} = 3{,}54 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\,m^{-1}$). Pentru un conductor filiform, omogen, izotrop, de secțiune S constantă, rezistența electrică R depinde de lungimea ℓ şi de natura conductorului:

$$R = \rho\frac{\ell}{S} \quad (2.44)$$

ρ fiind rezistivitatea conductorului:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (2.45)$$

Din relațiile (2.39) şi (2.40) obținem:

$$U = \left(E + E_i\right)\ell \quad (2.46)$$

Pe baza relațiilor (2.42) – (2.46) se obține forma legii lui Ohm care a fost stabilită experimental:

$$\underline{I = \frac{U}{R}} \quad (2.47)$$

Se constată că intensitatea curentului electric printr-un conductor este proporțională cu diferența de potențial aplicată la capetele conductorului.

2.5. <u>Legea Biot-Savart</u>

În cazul nerelativist ($a = 1,\ \beta = 0$) , vectorul inducție magnetică generat de o sarcină q în mişcare se obține din relația (1.64):

$$\vec{B}_Q = \frac{\mu_0 Q(\vec{v}\times\vec{r})}{4\pi r^3} \tag{2.48}$$

Sarcina Q aflată în originea sistemului S' se deplasează cu viteza v față de sistemul S. Vectorul inducție magnetică $\vec{B}$ respectă principiul superpoziției. Vom folosi acest principiu pentru a determina inducția magnetică generată de un curent continuu. Din relația (2.33) rezultă:

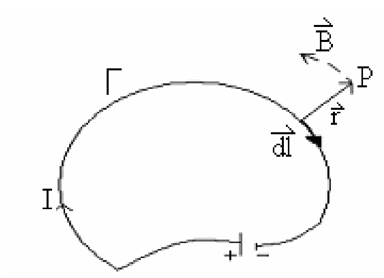
$$\vec{j} = \frac{dq}{dA_n dl}\cdot\frac{dl}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{dq}{dv}\cdot v\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \rho\,\vec{v} \tag{2.49}$$

Pentru un element de circuit de lungime dl , volum dv şi secțiune S vom înlocui în (2.48) sarcina Q cu $\rho\, dv = \rho\, dS\, dl$, astfel că produsul $Q(\vec{v}\times\vec{r})$ trece în

$$\rho\, S\, dl(\vec{v}\times\vec{r}) \ \underset{=}{(2.49)}\ S\, dl(\vec{j}\times\vec{r}) = I(\vec{dl}\times\vec{r})$$

În acest caz relația (2.48) trece în:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \tag{2.50}$$



Inducția magnetică într-un punct P din vecinătatea unui circuit electric prin care intensitatea curentului staționar este I se obține efectuând integrala lui $d\vec{B}$ din relația (2.50):

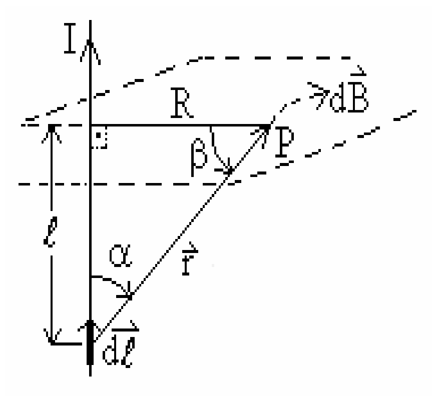
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \tag{2.51}$$

Această relație constituie <u>legea Biot-Savart</u>, care a fost obținută şi experimental. Deoarece:

$$I(\vec{dl}\times\vec{r}) = S\, dl(\vec{j}\times\vec{r}) = (\vec{j}\times\vec{r})d\upsilon'$$

relația (2.51) trece într-o integrală volumică:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}d\upsilon' \tag{2.52}$$



În cazul particular al unui conductor liniar infinit de lung, din relația (2.50) rezultă că liniile vectorului $\vec{B}$ sunt cercuri aflate într-un plan perpendicular pe conductor, iar mărimea lui $\vec{B}$ variază invers proporțional cu distanța R până la conductor. Într-adevăr:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\left|\vec{dl}\times\vec{r}\right|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{dl\cdot r\cdot\sin\alpha}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cdot \cos\beta}{r^2} , \qquad \ell = R \cdot \mathrm{tg}\beta$$

$$\cos\beta = \frac{R}{r} , \quad dl = R \cdot \frac{d\beta}{\cos^2\beta} = R \cdot \frac{d\beta}{R^2} \cdot r^2 = \frac{r^2\, d\beta}{R}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r^2\, d\beta}{R} \cdot \frac{\cos\beta}{r^2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \vec{e} \qquad (2.53)$$

unde $\vec{e}$ este versorul normal pe planul figurii, orientat înspre figură (regula burghiului drept).

Folosind identitatea $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, relația (2.52) devine:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'} \vec{j} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\upsilon' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'} \left(\nabla\frac{1}{r}\right) \times \vec{j}\; d\upsilon' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'} \left(\nabla \times \frac{\vec{j}}{r}\right) d\upsilon' \qquad (2.54)$$

unde am folosit identitatea:

$$\nabla \times \frac{1}{r} \cdot \vec{j} = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{j} + \frac{1}{r}\left(\nabla \times \vec{j}\right) \qquad (2.55)$$

al doilea termen din (2.55) fiind nul deoarece $\vec{j}$ este o funcție de x', y', z', iar în ∇ intră derivatele în raport cu x, y, z . Relația (2.54) se poate scrie sub forma:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\, \vec{A} \qquad (2.56)$$

unde:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'} \frac{\vec{j}}{r}\, d\upsilon'$$

(2.57)
se numește potențial vector.

Din relația (2.56) se constată că $\vec{B}$ este o funcție de derivatele spațiale ale lui $\vec{A}$, iar din relația (2.11) rezultă că $\vec{E}$ este o funcție de derivatele spațiale ale potențialului scalar V ($\vec{E} = -\nabla V$).

2.6. Legea fluxului magnetic

Dirac a postulat în 1931 că un câmp magnetic ar putea apare nu numai datorită deplasării sarcinilor electrice, dacă ar exista „sarcini magnetice” numite monopoli magnetici. Până în prezent nu au fost puse în evidență particule cu aceste proprietăți.

Din relația (2.56) rezultă:

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = \nabla \vec{B} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0 \qquad (2.58)$$

deoarece determinantul corespunzător acestui produs mixt are două linii egale. Utilizând formula divergenței:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{B}\, dv \qquad (2.59)$$

rezultă că fluxul inducției magnetice $\vec{B}$ prin orice suprafață închisă S este nul:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0 \tag{2.60}$$

Relația (2.60) reprezintă <u>forma integrală a legii fluxului magnetic</u>, iar relația (2.58) reprezintă forma locală (diferențială) a acestei legi. Relația (2.60) putea fi scrisă direct ținând seama că liniile de câmp magnetic sunt <u>închise</u> (pentru fiecare element de curent liniile lui $\vec{B}$ sunt cercuri ca în cazul figurii corespunzătoare conductorului liniar). Legea fluxului magnetic exprimă faptul că nu există sarcini magnetice libere (nu putem separa polii unui magnet). Se spune uneori că legea fluxului magnetic reprezintă legea lui Gauss pentru vectorul $\vec{B}$. Legile lui Gauss pentru $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt valabile și în cazul general când $\vec{E}$ și $\vec{B}$ depind de timp.

2.7. <u>Legea lui Ampère pentru circulația inducției magnetice</u>

Legea lui Ampère stabilește legătura dintre inducția magnetică $\vec{B}$ și sursele sale (curenții electrici caracterizați prin intensitatea I), la fel cum legea lui Gauss face legătura între intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ și sursele acestuia (sarcinile electrice caracterizate prin valoarea q a acestora).

Circulația lui $\vec{B}$ de-a lungul unei curbe închise Γ se poate exprima pe baza teoremei lui Stokes (1.20) astfel:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S \left[\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}\right] \cdot \overrightarrow{dS} \tag{2.61}$$

unde am folosit identitatea:

$$\text{rot}\,(\text{rot}\ \vec{A}\,) = \text{grad}\,(\text{div}\ \vec{A}\,) - \Delta \vec{A} \tag{2.62}$$

Din (2.57) rezultă:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\upsilon'} \nabla\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) d\upsilon' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\upsilon'} \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{j}\, d\upsilon' \tag{2.63}$$

unde am folosit identitățile:

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}\ ,\ \ \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.64}$$

∇' este calculat în punctul de coordonate (x', y', z') , iar r este distanța de la (x', y', z') la (x, y, z) . ∇ este calculat în punctul de coordonate (x, y, z) cu același r . Folosind identitatea

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\vec{j}\right) = \underline{\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}} + \left(\frac{1}{r}\right)\left(\nabla'\vec{j}\right) \tag{2.65}$$

și ecuația de continuitate pentru un câmp independent de timp (2.37)

$$\nabla' \cdot \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\ ,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla' \cdot \vec{j} = 0$$

obținem:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\upsilon'} \nabla'\left(\frac{1}{r}\vec{j}\right) d\upsilon' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{1}{r}\vec{j} \cdot \overrightarrow{dS'} = 0 \tag{2.66}$$

unde am folosit formula divergenţei şi faptul că prin suprafaţa S' care mărgineşte volumul v' densitatea de curent este fie 0 , fie se află în planul tangent la suprafaţă, adică $\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS'} = 0$, ($\overrightarrow{dS'}$ are direcţia normalei la suprafaţă). Înlocuind (2.66) în (2.61) obţinem:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_{S} \Delta\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS} \tag{2.67}$$

Potenţialul scalar V dat de ecuaţia (2.20) satisface ecuaţia lui Poisson (2.28):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\upsilon'} \frac{\rho}{r}\,d\upsilon' \ , \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.68}$$

Pentru potenţialul vector dat de relaţia (2.57) putem scrie relaţii analoage cu (2.68) numai în cazul câmpurilor statice:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\upsilon'} \frac{\vec{j}}{r}\,d\upsilon' \ , \quad \Delta\vec{A} = -\rho_0\vec{j} \tag{2.69}$$

unde rolul lui $\frac{1}{\varepsilon_0}$ din (2.68) este jucat de μ_0 în (2.69) . Înlocuind a doua relaţie din (2.69) în (2.67) obţinem <u>legea lui Ampère</u>:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\int_{S} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 I} \tag{2.70}$$

Astfel <u>circulaţia lui $\vec{B}$ de-a lungul unui contur închis este egală cu produsul dintre μ_0 şi intensitatea I a curentului ce străbate suprafaţa conturului</u>. Din a doua relaţie din (2.61) şi a doua relaţie din (2.70) rezultă:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\cdot\vec{j} \tag{2.71}$$

În cazul curenţilor staţionari, legea lui Ampère este valabilă şi în prezenţa materialelor magnetice.

Dacă Γ este un cerc de rază R centrat pe un conductor aflat într-un plan perpendicular pe acesta, $\vec{B}$ are aceeaşi valoare în toate punctele conturului Γ şi este orientat tangenţial, astfel că circulaţia lui $\vec{B}$ din (2.70) devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_{\Gamma} B\,dl = B\oint_{\Gamma} dl = \underline{2\pi R B = \mu_0 I} \qquad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{2.72}$$

Am regăsit astfel, în acest caz particular, formula (2.53) obţinută pe baza legii Biot-Savart.

Relaţiile (2.70) şi (2.71) pot să fie scrise în funcţie de intensitatea câmpului magnetic $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$:

$$\oint \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = I \tag{2.73}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} \tag{2.74}$$

Aceste relaţii sunt valabile numai în cazul curenţilor staţionari. Ele permit determinarea intensităţii câmpului magnetic $\vec{H}$.

Forma cea mai generală a legii lui Ampère este valabilă şi în cazul curenţilor nestaţionari:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{S_\Gamma} \vec{j}\cdot\vec{dS} + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\vec{D}\cdot\vec{dS} \tag{2.75}$$

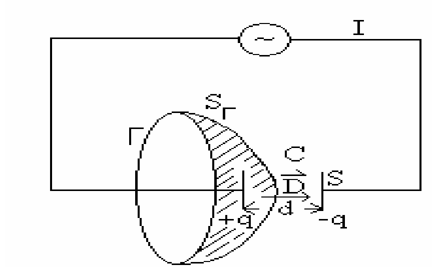
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{2.76}$$

sau:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\int_{S_\Gamma}\left(\vec{j} + \varepsilon_0\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dS} \tag{2.77}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{2.78}$$

Tensiunea magnetomotoare instantanee (circulaţia lui $\vec{H}$ de-a lungul unui contur închis Γ) , în lungul oricărei curbe închise Γ , este egală cu suma dintre intensităţile instantanee ale curenţilor electrici de conducţie şi de deplasare care trec prin orice suprafaţă S_Γ sprijinită pe conturul Γ , cu condiţia ca în decursul timpului conturul Γ să rămână acelaşi. Trecerea de la formele integrale (2.75) , (2.77) la cele diferenţiale (2.76) , (2.78) se obţine folosind teorema lui Stokes.



Al doilea termen din (2.75) se referă, de exemplu, la un circuit care conţine un condensator (circuitul nu este închis, dar conţine o sursă de tensiune alternativă) şi arată că într-un asemenea circuit există un curent dacă fluxul câmpului electric este variabil în timp (curentul circulă cât timp are loc încărcarea sau descărcarea condensatorului, când câmpul dintre plăcile condensatorului este variabil).

Densitatea de curent între plăcile condensatorului se exprimă astfel:

$$j_d = \frac{I_d}{S} = \frac{1}{S}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{1}{S}\frac{d}{dt}(CV) = \frac{1}{S}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{S}{d}V\right) = \frac{d}{dt}(\varepsilon E) = \frac{dD}{dt} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{j}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{2.79}$$

unde $C = \frac{q}{V} = \varepsilon\frac{S}{d}$ este capacitatea condensatorului plan, care se exprimă în funcţie de permitivitatea mediului dintre armături, de suprafaţa armăturii şi de distanţa d dintre armături, E este intensitatea câmpului electric între armături $\left(E = \frac{V}{d}\right)$, care se exprimă în funcţie de diferenţa de potenţial V aplicată armăturilor, iar

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{2.80}$$

este inducţia electrică. Deoarece $\vec{D}$ a fost numit deplasare electrică, $\vec{j}_d$ a primit denumirea de densitatea curentului de deplasare. În general densitatea curentului de deplasare se exprimă ca o sumă dintre un termen $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ corespunzător vidului şi un termen care reprezintă densitatea curentului de polarizare $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, care se datorează deplasării sarcinilor legate:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{2.81}$$

unde $\vec{P}$ este <u>vectorul de polarizare electrică</u> (polarizația), care reprezintă momentul electric al unității de volum. <u>Momentul electric</u> al unei sarcini punctiforme q situate în vid, în raport cu o origine O arbitrară, este prin definiție $\vec{p} = q\,\vec{r}$, unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție (distanța de la O la sarcina q). În cazul a două sarcini electrice punctiforme $+q$ și $-q$ situate la o distanță d fixă una față de cealaltă, momentul electric total este :

$$\vec{p} = q\,\vec{r}_1 + (-q)\,\vec{r}_2 = q\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p} = q\,\vec{d} \tag{2.82}$$

Ansamblul celor două sarcini constituie un <u>dipol electric</u>. Momentul de dipol electric din relația (2.82) este un vector orientat de la sarcina negativă către sarcina pozitivă. Într-un dielectric polar, fiecare moleculă are un moment de dipol permanent (centrul sarcinilor pozitive este separat de centrul sarcinilor negative). Sub acțiunea unui câmp electric moleculele se orientează, astfel că momentul electric total crește. Moleculele unui dielectric nepolar pot obține un moment de dipol electric sub acțiunea unui câmp electric.

2.8. <u>Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)</u>

Tensiunea electromotoare instantanee (circulația lui $\vec{E}$ de-a lungul unui contur închis Γ), în lungul oricărei curbe închise Γ, este egală cu viteza instantanee de scădere a fluxului magnetic care trece prin orice suprafață <u>deschisă</u> S_Γ , limitată de curba Γ , cu condiția ca în decursul timpului conturul Γ să rămână același.

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\Phi_{\vec{B}} \tag{2.83}$$

Această relație exprimă legea inducției electromagnetice sub formă integrală. Pe baza teoremei lui Stokes relația de mai sus devine:

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \underline{\int_{S_\Gamma} \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \underline{-\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Rezultă forma diferențială a legii inducției electromagnetice:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \tag{2.84}$$

Legea inducției electromagnetice arată că dacă un circuit este introdus într-un câmp magnetic variabil, atunci în circuit se induce o tensiune electromotoare proporțională cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața delimitată de circuit.

Formularea dată de Maxwell legii inducției electromagnetice permite interpretarea acesteia în sensul unei legături directe existente, în regim variabil, între componentele electrică și magnetică ale câmpului electromagnetic. În toate experiențele care au pus în evidență fenomenul de inducție electromagnetică, intensitatea câmpului electric imprimat $\vec{E}_i$ și intensitatea câmpului electric coulombian $\vec{E}_C$ sunt nule. Astfel tensiunea electromotoare indusă este egală cu circulația intensității câmpului electric indus.

Deoarece $q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ este o forță, rezultă că $\vec{v} \times \vec{B}$ are aceeași dimensiune ca și $\vec{E}$. Așadar în locul lui $\vec{E}$ din relația (2.83) se poate pune $\vec{v} \times \vec{B}$. Prin urmare legea inducției se aplică atunci când conductorul este deformat într-un câmp cu $\vec{B}$ constant, sau atunci când conductorul este staționar, dar se află într-un câmp cu $\vec{B}$ variabil în timp.

Folosind formula (2.56) şi teorema lui Stokes, putem scrie fluxul inducției magnetice sub forma:

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \int_{S_\Gamma} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{dS} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{dl} \qquad (2.85)$$

Înlocuind în (2.83) obținem:

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{dl} = -\oint_\Gamma \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{dl} \qquad (2.86)$$

Derivata totală din fața integralei devine o derivată parțială sub integrală, deoarece $\vec{A}$ depinde şi de coordonatele spațiale şi de timp. Din (2.86) rezultă:

$$\oint_\Gamma \left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dl} = 0 \qquad (2.87)$$

La fel cum am obținut relația (2.11) din (2.9) rezultă:

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \qquad (2.88)$$

unde V este potențialul electric.

Se constată că într-un anumit punct $\vec{E}$ se exprimă în funcție de derivatele lui V şi $\vec{A}$ în regiunea acelui punct.

Comparând relațiile (2.27) şi (2.58) , precum şi (2.68) cu (2.69) se obține corespondența:

$$\vec{E}\to\vec{B}\ ,\ V\to\vec{A}\ ,\ \frac{1}{\varepsilon_0}\to\mu_0 \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_0\to\frac{1}{\mu_0}\ ,\ \rho\to\vec{j} \qquad (2.89)$$

Astfel relațiile (2.19) şi (2.31) :

$$U^e = \frac{1}{2}\int_{V'} v\,\rho\,dv' \quad , \quad \rho_E^e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad (2.90)$$

trec în:

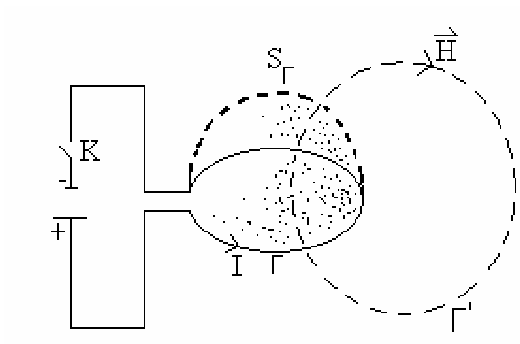
$$U^m = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{A}\cdot\vec{j}\,dv' \quad , \quad \rho_E^m = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (2.91)$$

Prin urmare densitatea volumică de energie magnetică se poate exprima în funcție de $\vec{A}$ şi $\vec{j}$ sau în funcție de $\vec{H}$ şi $\vec{B}$:

$$\rho_E^m = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{j} \quad , \quad \rho_E^m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} \qquad (2.92)$$

Considerăm o spiră parcursă de un curent de intensitate I şi o suprafață deschisă S_Γ sprijinită pe conturul Γ al spirei, care este perpendiculară pe liniile de câmp magnetic (pe liniile lui $\vec{H}$ şi $\vec{B}$). Energia magnetică se exprimă astfel:

$$U^m = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{H}\cdot\vec{B}\,dv' = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma'} H\,dl\int_{S_\Gamma} B\,dS \qquad (2.93)$$



unde $dv' = \overrightarrow{dl} \cdot \overrightarrow{dS}$ este un element de volum având $\overrightarrow{dl}$ şi $\overrightarrow{dS}$ paralele cu $\vec{H}$. Prima integrală din (2.93) este egală cu I conform legii lui Ampère (2.73), iar integrala a doua din (2.93) este fluxul inducţiei magnetice B ($\Phi = \int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$).

Deci:

$$U^m = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \Phi_{\vec{B}} \tag{2.94}$$

Deoarece inductanţa este definită ca raportul dintre flux şi intensitatea curentului:

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{2.95}$$

rezultă:

$$U^m = \frac{L I^2}{2} \tag{2.96}$$

2.9. Legea polarizaţiei electrice

Un dielectric diferă de un conductor prin faptul că nu posedă sarcini libere. Sarcinile unui dielectric sunt legate (conţinute) în atomii sau moleculele acestuia. Moleculele care au un moment de dipol permanent se numesc molecule polare. La moleculele nepolare centrul sarcinilor electrice pozitive coincide cu centrul sarcinilor electrice negative.

În condiţii normale un fotoconductor se comportă ca un dielectric, iar sub acţiunea luminii devine conductor. Dacă o moleculă nepolară se află într-un câmp electric de intensitate $\vec{E}$, atunci centrul sarcinilor electrice negative şi cel al sarcinilor pozitive se deplasează în sensuri opuse, iar molecula capătă un moment electric de dipol:

$$\vec{p} = q\,\vec{d} \tag{2.97}$$

unde d este distanţa dintre centrele sarcinilor opuse. Considerând că molecula suferă o deformare elastică, mărimea $\vec{d}$ este proporţională cu forţa $q\vec{E}$ şi deci cu $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \alpha\,\vec{E} \tag{2.98}$$

unde constanta de proporţionalitate α, numită polarizabilitate, depinde de natura dielectricului.

Polarizaţia electrică $\vec{P}$ într-un anumit punct se exprimă ca produsul dintre numărul n de molecule (dipoli) din unitatea de volum şi momentul de dipol mediu $\vec{p}$ al unei molecule în vecinătatea punctului considerat:

$$\vec{P} = n\,\vec{p} = n\,\alpha\,\vec{E} \tag{2.99}$$

Un dielectric în care $\vec{P}$ este proporţional cu $\vec{E}$ şi orientat în aceeaşi direcţie este un dielectric liniar şi izotrop. În acest caz relaţia (2.99) se poate pune sub forma:

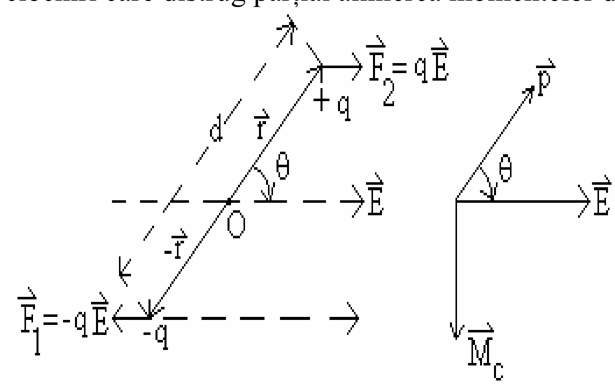
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.100}$$

unde χ_e este <u>susceptibilitatea (susceptivitatea) electrică</u> a mediului dielectric (mărime adimensională). Relația (2.100) exprimă <u>legea polarizației electrice temporare</u> (polarizația permanentă nu depinde de câmpul electric exterior). Un dielectric este <u>omogen</u> dacă susceptibilitatea electrică a acestuia este independentă de coordonate.

<u>Polarizarea electronică</u> este un tip de polarizare electrică în care, sub acțiunea câmpului electric exterior, centrul de sarcină (analog centrului de masă din mecanică) al păturilor electronice dintr-o moleculă se deplasează față de centrul de sarcină al nucleului, pe o distanță foarte mică (de ordinul a 10^{-16} cm).

În cazul în care ionii de sarcini contrare dintr-un cristal ionic (ex. NaCl) suferă deplasări în sensuri opuse, sub acțiunea câmpului electric exterior, avem o <u>polarizare ionică</u>.

<u>Polarizarea de orientare</u> se observă la moleculele polare care posedă un moment electric de dipol datorat unei <u>asimetrii</u> în structura moleculei, constând în alinierea moleculelor față de câmpul electric exterior. Datorită agitației termice a moleculelor au loc ciocniri care distrug parțial alinierea momentelor de dipol electric.



Asupra unui dipol electric aflat într-un câmp electric omogen acționează un cuplu de forțe al cărui moment are mărimea:

$$\left|\vec{M}_C\right| = \left|\vec{r}\times\vec{F}_2 + (-\vec{r})\times\vec{F}_1\right| =$$
$$= \left|\vec{r}\times q\vec{E} + (-\vec{r})\times(-q\vec{E})\right| =$$
$$= 2\left|\vec{r}\times q\vec{E}\right| = 2\frac{d}{2}qE\sin\theta = qdE\sin\theta =$$
$$= pE\sin\theta = \left|\vec{p}\times\vec{E}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\vec{M}_C = \vec{p}\times\vec{E} \tag{2.101}$$

Efectul momentului cuplului $\vec{M}_C$ este acela de a orienta dipolul electric în lungul câmpului electric. Într-un câmp electric omogen rezultanta forțelor care acționează asupra sarcinilor dipolului este nulă $\left[q\vec{E} + (-q)\vec{E} = 0\right]$, ceea ce face ca dipolul să nu sufere o mișcare de translație. Variația energiei potențiale a dipolului aflat în câmp electric este egală cu lucrul mechanic necesar pentru variația unghiului θ cu $d\theta$ (pentru schimbarea orientării dipolului în câmpul electric exterior):

$$dU = dL = M_C \cdot d\theta = pE\sin\theta\, d\theta \tag{2.102}$$

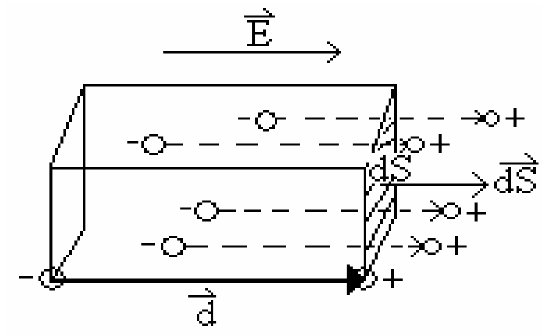
Integrând de la o valoare inițială θ_0 la o valoare finală θ, obținem:

$$U = pE\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\, d\theta = pE(-\cos\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta} = -pE\cos\theta + pE\cos\theta_0$$

Întrucât suntem interesați numai de schimbarea (variația) energiei potențiale, vom alege o orientare de referință $\theta_0 = 90^0$ la care $U = 0$, astfel că:

$$U = -pE\cdot\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E} \tag{2.103}$$

Pentru $\theta = 0$ energia potențială este minimă, $U_0 = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, iar momentul cuplului este nul.



Considerăm un element de arie din interiorul unui dielectric nepolar care este polarizat sub acțiunea unui câmp electric exterior. Sub acțiunea câmpului electric n_+ sarcini pozitive trec prin suprafața elementară dreptunghiulară considerată, în sensul momentului de dipole $\vec{p} = q\vec{d}$ al unei molecule, iar n_- sarcini negative trec prin aceeaşi suprafață elementară în sens contrar.

Sarcina netă care traversează suprafața dS în direcția lui $\vec{d}$ este:

$$dq = n_+ q - n_-(-q) = (n_+ + n_-)q = n \cdot \vec{d} \cdot \overrightarrow{dS}\, q = n \cdot \vec{p} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (2.104)$$

unde d este distanța dintre centrul sarcinii pozitive $+q$ a unei molecule şi centrul sarcinii negative $-q$ a aceleiaşi molecule, $n_+ + n_- = n \cdot \vec{d} \cdot \overrightarrow{dS}$ este numărul de molecule din interiorul paralelipipedului de volum $\vec{d} \cdot \overrightarrow{dS}$, iar $\vec{P} = n\vec{p}$ este polarizația electrică definită de relația (2.99).

Sarcina netă care rămâne în interiorul unui volum υ delimitat de o suprafață S se obține integrând relația (2.104):

$$-q_{pol} = \oint\!\!\oint_S \vec{P} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (2.105)$$

unde semnul minus este legat de faptul că sarcina de polarizare din interiorul suprafeței este <u>negativă</u>, în timp ce orientarea vectorului $\vec{P}$ este spre exteriorul suprafeței. Dacă ρ_{leg} este densitatea volumică a sarcinii legate rămase în interiorul volumului υ atunci, folosind teorema divergenței, relația (2.105) devine:

$$q_{pol} = \underline{\iiint_\upsilon \rho_{leg}\, d\upsilon} = -\oint\!\!\oint_S \vec{P} \cdot \overrightarrow{dS} = \underline{-\iiint_\upsilon \operatorname{div} \vec{P}\, d\upsilon} \qquad \Rightarrow$$

$$\rho_{leg} = -\operatorname{div} \vec{P} = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad (2.106)$$

În cazul în care volumul mărginit de suprafața S cuprinde atât sarcini libere, cât şi sarcini legate, legea lui Gauss (2.27) se scrie astfel:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{leg}}{\varepsilon_0} \qquad (2.107)$$

Înlocuind ρ_{leg} din (2.106) în (2.107) obținem:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{lib} - \nabla \cdot \vec{P} \qquad \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{lib} \qquad (2.108)$$

sau:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \qquad (2.109)$$

unde

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (2.110)$$

este inducția electrică. Înlocuind $\vec{P}$ din (2.100) în (2.110) obținem:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \qquad (2.111)$$

unde ε este permitivitatea absolută a dielectricului. Pentru aer la temperatură şi presiune normală $\varepsilon_r = 1{,}000536$; pentru apă la 25 ^{0}C , $\varepsilon_r = 81$ la 10^2 Hz, 78,2 la 10^6 Hz, 34 la 10^{10} Hz , iar pentru titanatul de bariu $\varepsilon_r = 1250$ la 10^2 Hz, 1140 la 10^6 Hz, 100 la 10^{10} Hz . Laserul cu azot foloseşte condensatoare cu titanat de bariu datorită valorii mari a lui ε_r .

Nu putem privi pe $\vec{D}$ ca pe un câmp vectorial a cărui sursă este distribuția de sarcină liberă ρ_{lib} (vezi relația (2.109)) în acelaşi sens în care distribuția de sarcină totală ρ este sursa lui $\vec{E}$ (relația (2.107)). Câmpul electrostatic $\vec{E}$ este determinat în mod unic – exceptând adăugarea unui câmp constant – de distribuția de sarcină ρ, deoarece pe lângă relația (2.107) există şi condiția universală rot $\vec{E} = 0$. Întrucât rot $\vec{D}$ nu este în general nul, rezultă că pentru determinarea lui $\vec{D}$ pe lângă relația (2.109) mai sunt necesare condițiile de frontieră. $\vec{D}$ se obține integrand relația (2.109) şi impunând condițiile la limită.

Din relațiile (2.109) şi (2.111) rezultă:

$$\nabla\left(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}\right) = \rho_{lib} \quad \Rightarrow \quad \nabla\left(\varepsilon_r \vec{E}\right) = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} \qquad (2.112)$$

Comparând (2.112) cu legea lui Gauss (2.27) obținem:

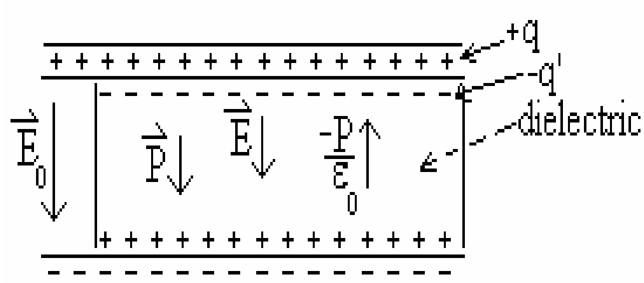
$$\varepsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0 \qquad (2.113)$$

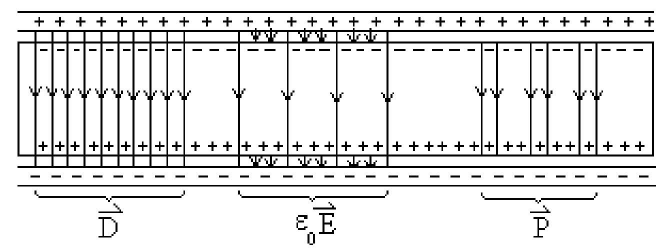
unde $\vec{E}_0$ este intensitatea câmpului electric în vid. Din (2.113) , (2.111) şi (2.100) obținem:

$$\varepsilon_r \vec{E} = \left(1 + \chi_e\right)\vec{E} = \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad (2.114)$$

Orientarea vectorilor din relațiile (2.114) şi (2.110) este ilustrată uşor în cazul unui dielectric aflat între armăturile unui condensator plan încărcat. Se constată că $\vec{D}$ conectează numai sarcinile libere, $\vec{P}$ este dependent numai de sarcinile legate, iar $\vec{E}$ reflectă atât prezența sarcinilor libere, cât şi pe cea a sarcinilor legate.





Prin analogie cu densitatea volumică de energie magnetică (2.92) :

$$\rho_E^m = \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}$$

se poate scrie densitatea volumică de energie electrică:

$$\rho_E^e = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} \overset{(2.110)}{=} \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\rho_E^e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P} \qquad (2.115)$$

unde primul termen a fost dedus separate (relația (2.31)) , iar termenul al doilea este datorat polarizației. Într-un dielectric izotrop, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, putem scrie:

$$\rho_E^e = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \chi_e\right)\varepsilon_0 E^2 \qquad (2.116)$$

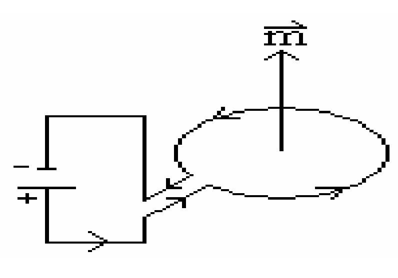
Energia de polarizare este dominantă în dielectricii obişnuiți, deoarece susceptibilitatea electrică χ_e este cuprinsă între 1 şi 4 .

2.10. Legea magnetizației

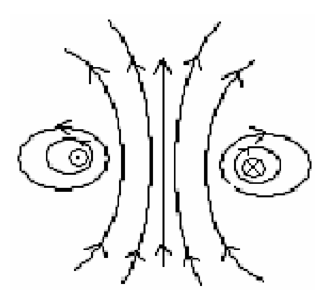
Un dipole magnetic este o buclă circulară parcursă de un current electric continuu. Se defineşte momentul dipolului magnetic $\vec{m}$ ca produsul dintre intensitatea curentului I care trece prin buclă şi aria orientată $\vec{S}$ a buclei:

$$\vec{m} = I\cdot\vec{S} \qquad (2.117)$$

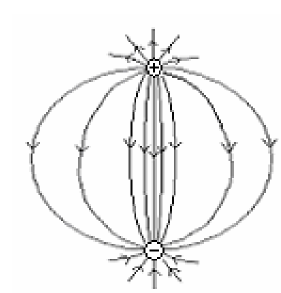
Direcția şi sensul vectorului $\vec{m}$ se determină cu ajutorul regulii burghiului drept: se aşează un burghiu drept perpendicular pe planul buclei, se roteşte burghiul în sensul curentului prin buclă, iar sensul înaintării burghiului este sensul lui $\vec{m}$. În figura de mai jos prezentăm comparative liniile de câmp magnetic ale unui dipol magnetic şi liniile de câmp electric ale unui dipol electric.



dipol magnetic



liniile de câmp ale dipolului magnetic



liniile de câmp ale dipolului electric

Introducând bucla într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}_0$, se constată că asupra sa acționează un cuplu de forțe $\vec{C}$:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}_0 \qquad (2.118)$$

care tinde s-o orienteze astfel ca $\vec{m}$ şi $\vec{B}$ să aibă aceeaşi direcție şi acelaşi sens. $\vec{m}$ din (2.117) corespunde lui $\vec{p}$ din (2.97), iar $\vec{C}$ din (2.118) corespunde lui $\vec{M}_C$ din (2.101). Din punct de vedere magnetic, un mic corp magnetizat este echivalent cu o buclă parcursă de current electric. În cazul unui corp de dimensiuni mari, fiecărei porțiuni elementare i se poate substitui un sistem de bucle de current. Mişcarea electronilor pe orbitele din jurul nucleelor este echivalentă cu o buclă elementară parcursă de curent, care posedă un moment magnetic de dipol, numit moment magnetic orbital.

<u>Magnetizația</u> $\vec{M}$ într-un punct se exprimă ca produsul dintre numărul de atomi (dipoli magnetici) n din unitatea de volum şi momentul de dipol magnetic mediu $\vec{m}$ al unui atom în vecinătatea punctului considerat:

$$\vec{M} = n\,\vec{m} \qquad (2.119)$$

Magnetizația $\vec{M}$ dintr-un mediu magnetic corespunde polarizației $\vec{P}$ din dielectrici (relația (2.99)).

Unele corpuri prezintă o magnetizare permanentă, fiind caracterizate de magnetizația permanentă $\vec{M}_P$. Dacă un asemenea corp este introdus într-un câmp magnetic exterior, atunci el dobândeşte o magnetizare suplimentară, caracterizată de magnetizația temporară $\vec{M}_t$. Magnetizația totală a corpului în prezența câmpului magnetic exterior este:

$$\vec{M} = \vec{M}_P + \vec{M}_t \qquad (2.120)$$

În absența câmpului magnetic exterior magnetizația temporară dispare. Alte corpuri nu prezintă o magnetizare permanentă.

<u>Legea magnetizației temporare</u> arată că magnetizația temporară $\vec{M}_t$ este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$:

$$\vec{M}_t = \chi_m \cdot \vec{H} \qquad (2.121)$$

unde χ_m este <u>susceptibilitatea (susceptivitatea) magnetică</u>. La materiale diamagnetice pure $\chi_m < 0$, $|\chi_m| \approx 10^{-5}$; la materiale paramagnetice $\chi_m > 0$, $|\chi_m| \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$, iar la substanțele feromagnetice $\chi_m \geq 10^{6}$. În absența magnetizării permanente ($\vec{M}_P = 0$), legea magnetizației temporare (2.121) devine:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \qquad (2.122)$$

Analog densității curentului de polarizare (vezi relația (2.81)):

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (2.123)$$

există o <u>densitate de current de magnetizare</u> $\vec{j}_m$:

$$\vec{j}_m = \mathrm{rot}\,\vec{M} = \nabla \times \vec{M} \qquad (2.124)$$

Integrăm această relație pe o suprafață S_Γ trasată în interiorul unui corp magnetizat şi folosim teorema lui Stokes:

$$\iint_{S_\Gamma} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = \underline{\iint_{S_\Gamma} dI} = \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\,\vec{M}\cdot\overrightarrow{dS} = \underline{\oint_\Gamma \vec{M}\cdot\overrightarrow{dl}} \qquad \Rightarrow$$

$$dI = \vec{M}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad \Rightarrow \qquad (2.125)$$

$$dI\cdot\overrightarrow{dS} = \vec{M}\cdot\left(\overrightarrow{dl}\cdot\overrightarrow{dS}\right) \Rightarrow \qquad d\vec{m} = \vec{M}\cdot d\upsilon \qquad (2.126)$$

Am obținut o relație care corespunde definiției magnetizației $\vec{M}$ (magnetizația $\vec{M}$ este o mărime vectorială definită prin limita raportului dintre momentul magnetic $\Delta\vec{m}$ al substanței dintr-un mic domeniu de volum $\Delta\upsilon$ şi volumul domeniului, când $\Delta\upsilon$ tinde către zero).

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\upsilon\to 0}\frac{\Delta\vec{m}}{\Delta\upsilon} = \frac{d\vec{m}}{d\upsilon} \qquad (2.127)$$

Relația (2.71) ($\nabla\times\vec{B} = \mu_0\cdot\vec{j}$) era valabilă în cazul când nu aveam materiale magnetice. În prezența materialelor magnetice trebuie să avem în vedere densitatea curentului de magnetizare:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{lib} + \vec{j}_m\right) \qquad \Rightarrow \qquad (2.128)$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{lib} + \nabla\times\vec{M}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j}_{lib} \qquad (2.129)$$

Comparând relațiile (2.129) şi (2.74) obținem:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (2.130)$$

$\vec{H}$ şi $\vec{M}$ se măsoară în A/m. Din (2.129) şi (2.130) rezultă că în cazul staționar (câmpuri statice) este satisfăcută relația:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_{lib} \qquad (2.131)$$

Din (2.130) se obține următoarea relație de material:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \qquad (2.132)$$

Înlocuind $\vec{M}$ din (2.122) în (2.132) obținem:

$$\vec{B} = \mu_0\left(1 + \chi_m\right)\vec{H} = \mu_0\,\mu_r\,\vec{H} = \mu\,\vec{H} \qquad (2.133)$$

unde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \qquad (2.134)$$

este permeabilitatea magnetică relativă, iar μ este permeabilitatea magnetică a mediului.

Dacă ținem seama de densitatea curentului de deplasare $\vec{j}_d$ (relația (2.81)) , de densitatea curentului de magnetizare $\vec{j}_m$ (relația (2.124)) şi de densitatea curentului datorat mişcării sarcinilor libere $\vec{j}_{lib}$, în locul relațiilor (2.71) şi (2.128) putem scrie o relație mai generală:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{lib} + \vec{j}_d + \vec{j}_m \right) \tag{2.135}$$

sau:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{lib} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \quad \Rightarrow \tag{2.136}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j}_{lib} + \vec{j}_{pol} + \vec{j}_m \right) \quad \Rightarrow \tag{2.137}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right)} \tag{2.138}$$

În aceste condiții, forma generală a legii Biot-Savart este:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\upsilon'} \frac{\left(\vec{j}_{lib} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \times \vec{r}}{r^3} \, d\upsilon' \tag{2.139}$$