OPTICA ELECTROMAGNETICĂ

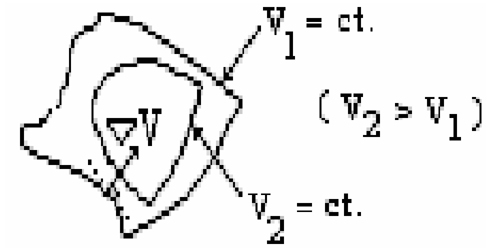
1. Bazele matematice ale opticii electromagnetice

1.1. Gradientul unei funcţii scalare V

Numim gradientul unei funcţii scalare, diferenţiabile, V, vectorul:

$$\nabla V = \vec{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (1.1)$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt versorii axelor de coordonate.



Gradientul unei funcţii într-un punct este un vector a cărui direcţie coincide cu cea mai mare curbură (raza este minimă) şi a cărui mărime este egală cu panta măsurată în această direcţie. Direcţia lui ∇V într-un punct oarecare este direcţia de mişcare pornind de la acest punct pentru creşterea cea mai rapidă a funcţiei V (la o sferă creşterea cea mai rapidă este pe direcţia razei, astfel că în orice punct ∇V este un vector radial).

Produsul scalar dintre ∇V şi vectorul de deplasare infinitezimală $\vec{dl}$:

$$\vec{dl} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \qquad (1.2)$$

este diferenţiala funcţiei V :

$$dV = \nabla V \cdot \vec{dl} = |\nabla V| \cdot \left|\vec{dl}\right| \cdot \cos\alpha \qquad (1.3)$$

$$dV = \left(\vec{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz\right) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (1.4)$$

unde α este unghiul dintre ∇V şi $\vec{dl}$. Valoarea maximă a lui dV corespunde lui $\alpha = 0^0$. Din relaţia (1.3) rezultă:

$$|\nabla V| = \frac{dV}{\left|\vec{dl}\right|}, \qquad \alpha = 0^0 \qquad (1.5)$$

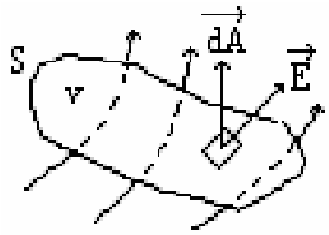
adică mărimea gradientului este egală cu variaţia maximă a funcţiei V pe unitatea de deplasare. Vectorul ∇V este orientat spre valorile mai mari ale funcţiei V .

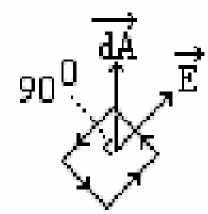
1.2. Divergenţa unei funcţii vectoriale $\vec{E}$

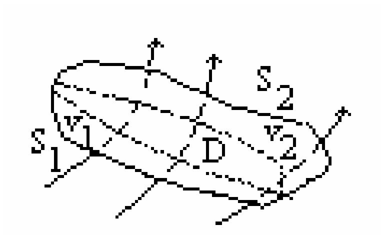
Se defineşte fluxul total Φ_E al unui vector $\vec{E}$ printr-o suprafaţă S care delimitează un volum finit v :

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dA} \qquad (1.6)$$

unde $\overrightarrow{dA}$ este un vector de mărime egală cu aria unui element infinitezimal al suprafeței S , a cărui direcție coincide cu normala exterioară la acest element de suprafață.







Dacă împărțim volumul v printr-o suprafață D , vom obține un volum v_1 delimitat de o suprafață S_1 , care include suprafața D și un volum v_2 delimitat de o suprafață S_2 , care de asemenea include suprafața D. Este evident că:

$$\Phi_E = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}_2 \qquad (1.7)$$

deoarece fiecare porțiune din D contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală și cu un semn opus în a doua integrală, întrucât direcția „spre exterior” dintr-un caz devine direcție „spre interior” în celălalt. Astfel orice flux care iese din v_1 prin suprafața D este un flux ce intră în v_2 .

Divizând volumul inițial v în N volume $v_1, v_2, \dots, v_N$, delimitate de suprafețele $S_1, S_2, \dots, S_N$ putem scrie:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}_i = \sum_{i=1}^{N} v_i \left[\frac{\int_{S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}_i}{v_i} \right] \qquad (1.8)$$

Pentru $N \to \infty$, $v_i \to 0$, v_i trece în dv (ambii fiind infinitezimali), iar limita raportului din paranteza pătrată este o proprietate caracteristică funcției vectoriale $\vec{E}$ în vecinătatea unui punct, numită <u>divergența lui $\vec{E}$</u>:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{v_i} \int_{S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA_i} \qquad (1.9)$$

Rezultă:

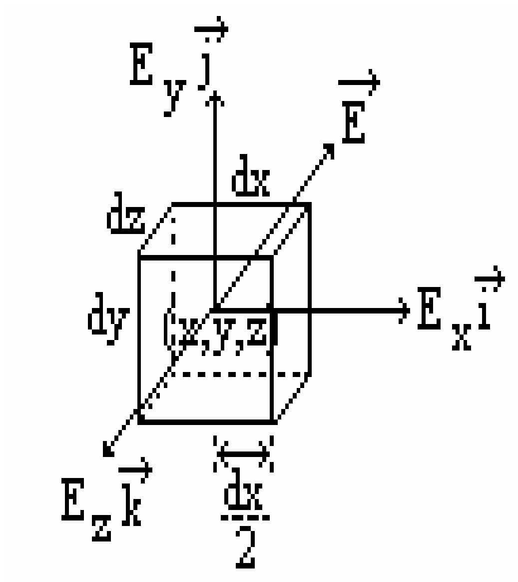
$$\Phi_E = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dv \qquad (1.10)$$

sau:

$$\boxed{\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dv} \qquad (1.11)$$

Această formulă exprimă <u>teorema divergenței</u> (teorema lui Green sau a lui Gauss-Ostrogradski, numită uneori și teorema lui Gauss). În integrala din membrul stîng al relației (1.11) intră numai valorile lui $\vec{E}$ de pe suprafața de arie S , iar în integrala din membrul drept intră valorile lui $\vec{E}$ din întreg volumul v .

Pentru a obține o expresie a divergenței în coordonate carteziene, vom considera un paralelipiped infinitezimal de volum $dv = dx\,dy\,dz$, cu laturile dx , dy , dz , centrat în jurul unui punct de coordonate (x , y , z) . Componentele E_x , E_y , E_z ale vectorului $\vec{E}$ depind de x , y şi z . Se presupune că valoarea lui E_x în centrul feței din dreapta este egală cu valoarea medie a lui E_x pe suprafața acestei fețe. În aproximația de ordinul întâi în raport cu dx (la dezvoltarea în serie Taylor reținem numai primii doi termeni), pe suprafața din dreapta valoarea medie este:



$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$$

Fluxul elementar prin această suprafață este:

$$d\Phi_{\rightarrow} = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

Fluxul elementar prin suprafața din stânga este:

$$d\Phi_{\leftarrow} = -\left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

unde semnul minus din fața parantezei se datorează faptului că $\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{dydz}$ pe această suprafață este orientat spre exterior (stânga), în timp ce $E_x\,\vec{i}$ este orientat spre dreapta.

Fluxul elementar prin cele două suprafețe este:

$$d\Phi_{\rightarrow} + d\Phi_{\leftarrow} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dv$$

În acelaşi mod se determină fluxul elementar prin celelalte suprafețe ale paralelipipedului. Astfel fluxul elementar prin toate suprafețele acestui paralelipiped este:

$$d\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dv \tag{1.12}$$

Dar, prin definiție, fluxul pe unitatea de volum reprezintă divergența lui $\vec{E}$:

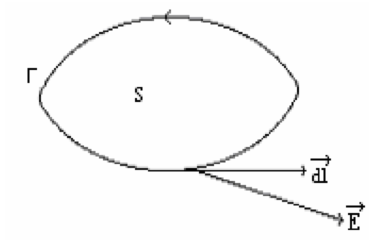
$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{1.13}$$

Din relația (1.12) şi din definiția fluxului (1.6) rezultă formula lui Green (1.11) :

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \int_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dv = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\cdot dv \tag{1.14}$$

1.3. Rotorul unei funcții vectoriale $\vec{E}$

Se definește circulația vectorului $\vec{E}$, C_E , de-a lungul unui contur închis Γ care mărginește o suprafață S , în felul următor:

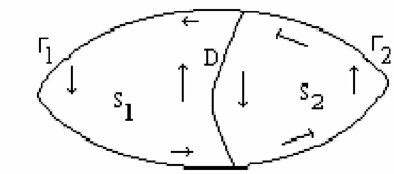


$$C_E = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (1.15)$$

unde $\vec{dl}$ este un vector de mărime egală cu lungimea unui element infinitezimal al curbei Γ, a cărui direcție coincide cu tangenta la contur în punctul în care se consideră $\vec{E}$. Se alege un sens de parcurs al conturului Γ.

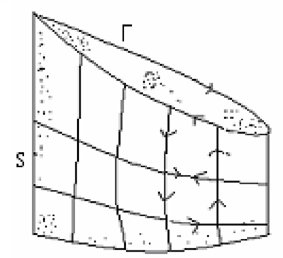
Un câmp vectorial este conservativ dacă $C_E = 0$.

Dacă împărțim suprafața S printr-o curbă D , vom obține o suprafață S_1 delimitată de un contur Γ_1 care include curba D și o suprafață S_2 delimitată de un contur Γ_2 care de asemenea include curba D . Este evident că:



$$C_E = \oint_{\Gamma_1} \vec{E}\cdot\vec{dl_1} + \oint_{\Gamma_2} \vec{E}\cdot\vec{dl_2} \qquad (1.16)$$

deoarece drumul D este parcurs în sensuri opuse și nu-și aduce contribuția. În locul suprafeței S se poate lua orice suprafață care se sprijină pe conturul Γ. Divizând suprafața inițială S în N suprafețe $S_1, S_2, \ldots, S_N$ delimitate de contururile $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$, putem scrie:



$$C_E = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\Gamma_i} \vec{E}\cdot\vec{dl}_i = \sum_{i=1}^{N} S_i \left[\frac{\oint_{\Gamma_i} \vec{E}\cdot\vec{dl}_i}{S_i}\right] \qquad (1.17)$$

unde S_i este mărimea vectorului infinitezimal $\vec{S}_i = \left|\vec{S}_i\right| \vec{n}_i$, iar $\vec{n}_i$ este versorul normalei la elementul de suprafață centrat în jurul unui punct P . Pentru $N \to \infty$, $S_i \to 0$, suma trece în integrală, S_i trece în dS , iar limita raportului din paranteza pătrată este o proprietate caracteristică funcției vectoriale $\vec{E}$ în vecinătatea unui punct, care se exprimă prin produsul scalar dintre un vector notat cu $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ (rotorul lui $\vec{E}$) și versorul normalei la elementul de suprafață din jurul punctului considerat:

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)\cdot\vec{n}_i = \lim_{S_i\to 0} \frac{1}{S_i} \oint_{\Gamma_i} \vec{E}\cdot\vec{dl}_i \qquad (1.18)$$

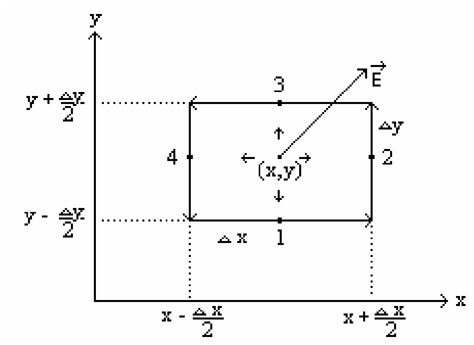
Astfel mărimea rotorului este egală cu valoarea limită a circulației pe unitatea de suprafață a planului din jurul punctului ales. Componenta x a lui $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ se obține alegând $\vec{n}_i = \vec{i}$. Direcția vectorului $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ este în orice punct normală la planul caer trece prin acel punct și pentru care mărimea circulației este maximă (circulația este maximă atunci când vectorul $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ este perpendicular pe suprafață). Din relația (1.17) rezultă:

$$C_E = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot dS$$

sau:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_{S} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot dS \qquad (1.20)$$

Această formulă exprimă <u>teorema lui Stokes</u>. În integrala din membrul stâng al relației (1.20) intră numai valorile lui $\vec{E}$ de pe conturul Γ, iar în integrala din membrul drept intră valorile lui $\vec{E}$ de pe întreaga suprafață S care se sprijină pe curba Γ.



Pentru a obține o expresie a rotorului în coordonate carteziene, vom considera un dreptunghi elementar de arie $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$ în planul xy , centrat în jurul unui punct de coordonate (x, y, 0) . În acest caz $\vec{n}_i = \vec{k}$. Valorile medii ale lui E_x şi E_y se consideră la mijlocul segmentelor. În punctul 1 , în aproximația de ordinul întîi din dezvoltarea în serie Taylor a componentelor E_x şi E_y, obținem:

$$\underline{E_x - \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}} \;,\quad E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

În aceeaşi aproximație, în punctele 2, 3, 4, obținem:

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \;,\quad \underline{E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}} \quad \text{pe latura din dreapta}$$

$$\underline{E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}} \;,\quad E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} \quad \text{pe latura de sus}$$

$$E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \;,\quad \underline{E_y - \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}} \quad \text{pe latura din stânga}$$

Rezultă:

$$\oint_{\subset} \vec{E} \cdot \vec{dl} \;=\; \overline{E}x\;\Delta x \;+\; \overline{E}y\;\Delta y \;=$$

$$= \left[\left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}\right) + \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) - \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}\right) - \left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \Delta x \;+$$

$$+ \left[\left(E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}\right) + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) - \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}\right) - \left(E_y - \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \Delta y$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_{\subset} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \Delta x\, \Delta y \qquad (1.21)$$

Semnul $-$ din fața parantezelor de mai sus se datorează faptului că sensul de parcurs pe latura corespunzătoare este opus sensului pozitiv al axei Ox sau Oy . Termenii dispăruți nu îşi aduc contribuţia deoarece pe laturile 2 şi 4 x = constant $\Rightarrow$ $\Delta x = 0$ în $\overline{E}x \cdot \Delta x$, iar pe laturile 1 şi 3 y = constant $\Rightarrow$ $\Delta y = 0$ în $\overline{E}y \cdot \Delta y$.

Din definiţia rotorului rezultă că atunci când normala la suprafaţa dreptunghiului coincide cu direcţia pozitivă a axei Oz, iar aria suprafeţei tinde către zero, limita raportului dintre integrala de linie din jurul suprafeţei dreptunghiului şi aria suprafeţei este componenta z a vectorului rot $\vec{E}$:

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)_z = \lim_{\Delta x\,\Delta y \to 0} \frac{\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \qquad (1.22)$$

La fel se pot considera suprafeţe dreptunghiulare în planele yz şi zx, pentru a obţine celelalte două componente ale lui rot $\vec{E}$. Rezultatul nu depinde de forma suprafeţei elementare. Prin urmare în cazul general avem:

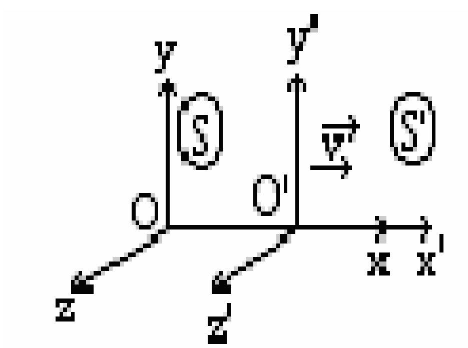
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.23)$$

sau:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \qquad (1.24)$$

1.4. Transformările Lorentz

Considerăm două sisteme de referinţă inerţiale S şi S'.



Sistemul S' se deplasează de-a lungul axei comune Ox cu viteza relativă v, faţă de sistemul S. Presupunem că la momentul iniţial (t = t' = 0) originile O şi O', precum şi axele de coordonate ale celor două sisteme de referinţă coincid. Deoarece Oy ‖ O'y', Oz ‖ O'z' rezultă că:

$$y = y' \qquad z = z' \qquad (1.25)$$

Din proprietatea de omogenitate a spaţiului şi timpului în cele două sisteme de referinţă inerţiale rezultă că transformările care leagă coordonatele unui eveniment în cele două sisteme trebuie să fie <u>liniare</u> (o transformare neliniară va conduce la o acceleraţie într-un sistem, chiar dacă în celălalt sistem viteza este constantă):

$$x' = ax + bt \qquad (1.26)$$

$$x = ax' + bt' \qquad (1.27)$$

unde a şi b sunt coeficienţi constanţi care au aceleaşi valori în ambele sisteme, conform primului principiu al relativităţii restrânse (<u>legile fizicii au aceeaşi formă în toate sistemele de referinţă inerţiale</u>). Pentru un observator din sistemul S, originea sistemului S' se mişcă în lungul axei x cu viteza v, astfel că pentru x' = 0, x = vt, relaţia (1.26) devine:

$$0 = avt + bt \tag{1.28}$$

Pentru un observator din sistemul S' , originea sistemului S se mişcă în lungul axei x' cu viteza – v , astfel că pentru x = 0 , x' = – vt' , relaţia (1.27) devine:

$$0 = -avt' + bt' \tag{1.29}$$

Scăzând ecuaţia (1.28) din (1.26) şi ecuaţia (1.29) din (1.27) se elimină constanta b:

$$x' - 0 = a\,(x - vt) + bt - bt \quad \Rightarrow \quad x' = a\,(x - vt) \tag{1.30}$$

$$x - 0 = a\,(x' + vt') + bt' - bt' \quad \Rightarrow \quad x = a\,(x' + vt') \tag{1.31}$$

Pentru a determina constanta a vom considera că la momentul iniţial t = t' = 0 , din originea comună a sistemelor în vid se lansează un semnal luminos. Conform <u>principiului invarianţei vitezei luminii în vid</u>, distanţele x şi x' străbătute de semnal în S şi S' sunt:

$$x = ct\,, \qquad x' = ct' \tag{1.32}$$

Înlocuim x şi x' din (1.32) în (1.30) şi (1.31) :

$$ct' = a\,(c - v)\,t \tag{1.33}$$

$$ct = a\,(c + v)\,t' \tag{1.34}$$

Efectuând produsul relaţiilor (1.33) şi (1.34) se obţine o ecuaţie în a :

$$c^2\,t\,t' = a^2\left(c^2 - v^2\right)t\,t' \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.35}$$

Înlocuind (1.35) în (1.30) şi (1.31) rezultă:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.36}$$

Eliminând variabila x din relaţiile (1.36) rezultă o ecuaţie în t :

$$x' = \frac{\dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt'}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad x'\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) - \frac{vt'}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad -x'\frac{v^2}{c^2} - vt' = -vt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t' + \frac{v}{c^2}x' \quad \Rightarrow$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.37)$$

În mod analog, eliminând variabila x' din relațiile (1.36) se obține:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.38)$$

Relațiile (1.25) , (1.36) , (1.37) şi (1.38) reprezintă <u>transformările Lorentz</u>:

$$\begin{aligned}
x &= a\,(x' + vt') & x' &= a\,(x - vt) \\
y &= y' & y' &= y \\
z &= z' & z' &= z \qquad (1.39) \\
t &= a\,(t' + \frac{v}{c^2}x') & t' &= a\,(t - \frac{v}{c^2}x)
\end{aligned}$$

unde a este dat de relația (1.35) . Relațiile (1.39) arată că este indiferent dacă sistemul S' se deplasează cu viteza $v\vec{i}$ față de sistemul S sau dacă S se deplasează cu viteza $-v\vec{i}$ față de S'. Aceste relații satisfac <u>principiul de corespondență</u>, deoarece pentru viteze mult mai mici decît viteza luminii în vid ($v << c$) raportul v^2/c^2 este neglijabil față de unitate, iar transformările Lorentz trec în transformările Galilei din mecanica clasică. Sub formă vectorială, transformările Lorentz (1.39) se exprimă astfel (indicii $\parallel$ şi $\perp$ se referă la componentele paralele şi respectiv perpendiculare în raport cu direcția de mişcare a lui S' față de S):

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= a\,(\vec{r}'_{\parallel} + \vec{v}t') + \vec{r}'_{\perp} & \vec{r}' &= a\,(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{r}_{\perp} \\
t &= a\,(t' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}'_{\parallel}}{c^2}) & t' &= a\,(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}_{\parallel}}{c^2})
\end{aligned} \qquad (1.40)$$

1.5. <u>Legea compunerii vitezelor (transformarea vitezelor)</u>

Notăm:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}\ ,\ u'_y = \frac{dy'}{dt'}\ ,\ u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt}\ ,\ u_y = \frac{dy}{dt}\ ,\ u_z = \frac{dz}{dt}$$

Din relațiile (1.39) rezultă:

$$u'_x = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{a\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{a\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{a\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{u_y}{a}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_z = \frac{\frac{u_z}{a}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

Aceste relații pot fi scrise compact sub formă vectorială:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}_{\Downarrow} - \vec{v} + \frac{\vec{u}_{\perp}}{a}}{1-\frac{v}{c^2}u_{\Downarrow}} \quad , \quad \vec{u} = \frac{\vec{u}'_{\Downarrow} + \vec{v} + \frac{\vec{u}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v}{c^2}u'_{\Downarrow}} \tag{1.41}$$

1.6. Transformarea unui cuadriimpuls

Se definește cuadrivectorul $(\vec{r}\,, ct)$ ca fiind un vector cu patru coordonate: x, y, z, ct. Relațiile de transformare (1.40) se scriu sub forma:

$$\vec{r} = a(\vec{r}'_{\parallel} + \vec{v}t') + \vec{r}'_{\perp} \qquad \vec{r}' = a(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{r}_{\perp}$$

$$ct = a\left(ct' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}'_{\Downarrow}}{c}\right) \qquad ct' = a\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}_{\Downarrow}}{c}\right) \tag{1.42}$$

Pentru un interval de timp dt măsurat în sistemul S avem un cuadrivector (dr, cdt) = (dx, dy, dz, cdt). Produsul scalar a doi cuadrivectori este definit astfel:

$$(\vec{r}_1, ct_1)\cdot(\vec{r}_2, ct_2) = (x_1, y_1, z_1, ct_1)\cdot(x_2, y_2, z_2, ct_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2 \tag{1.43}$$

Produsul scalar a doi cuadrivectori este un invariant. Norma cuadrivectorului $(\vec{r}\,, ct)$ este:

$$\sqrt{\left|(\vec{r}\,, ct)\cdot(\vec{r}\,, ct)\right|} = \sqrt{\left|x^2+y^2+z^2-c^2t^2\right|} \tag{1.44}$$

Prin definiție, norma unui cuadrivector este reală şi pozitivă. Deşi norma variază în timp, ea este invariantă față de transformarea Lorentz.

Se defineşte cuadriimpulsul:

$$m_0\frac{d}{dt'}(\vec{r}, ct) = m_0\frac{d}{dt_0}(\vec{r}, ct) = \left(m_0\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{dt_0}, m_0c\frac{dt}{dt_0}\right) = (m_0\vec{u}a, m_0ca) = (m\vec{u}, mc) = (\vec{p}, mc) \tag{1.45}$$

unde $dt' = dt_0$ este timpul propriu infinitezimal măsurat în sistemul inerțial ocupat de particulă, iar m_0 este masa de repaus măsurată în acelaşi sistem. Deoarece m_0 şi dt_0 sunt invarianți, rezultă că transformarea unui cuadriimpuls este la fel ca aceea a cuadrivectorului $(\vec{r}\,, ct)$. În locul lui $\vec{r}$ va apare $\vec{p}$, iar în locul lui t va apare m :

$$\vec{p} = a(\vec{p}'_{\parallel} + \vec{v}m') + \vec{p}'_{\perp} \qquad \vec{p}' = a(\vec{p}_{\parallel} - \vec{v}m) + \vec{p}_{\perp}$$

$$ct = a\left(cm' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{p}'_{\Downarrow}}{c}\right) \qquad cm' = a\left(cm - \frac{\vec{v}\cdot\vec{p}_{\Downarrow}}{c}\right) \tag{1.46}$$

Ultimele două relații din (1.46) se pot scrie şi astfel:

$$m = a\ m'\left(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{p}'_{\Downarrow}}{m'c^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad m = a\ m'\left(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'_{\Downarrow}}{c^2}\right) \tag{1.47}$$

$$m' = a\ m\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{p}_{\Downarrow}}{m\,c^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad m' = a\ m\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_{\Downarrow}}{c^2}\right) \tag{1.48}$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă evaluăm energia particulei şi impulsul acesteia în sistemul S .

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = \frac{m_0 c^2}{\Delta t'}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{c^2} = \frac{m_0}{\Delta t'}\Delta t = \frac{m_0}{\Delta t_0}\Delta t \tag{1.49}$$

unde $\Delta t = \Delta t_0 \cdot a$ exprimă dilatarea timpului. Mărimea $m_0 / \Delta t_0$ este un invariant relativist. Deci E/c^2 se transformă la fel ca Δt .

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{u} = \frac{m_0}{\Delta t'}\cdot\Delta t\,\vec{u} = \frac{m_0}{\Delta t_0}\cdot\vec{u}\,\Delta t \qquad \Rightarrow$$

$$p_x = \frac{m_0}{\Delta t_0}\cdot\Delta x\ , \qquad p_y = \frac{m_0}{\Delta t_0}\cdot\Delta y\ , \qquad p_z = \frac{m_0}{\Delta t_0}\cdot\Delta z \tag{1.50}$$

Prin urmare p_x, p_y, p_z se transformă la fel ca x, y, z.

$$\begin{aligned} &p_x = a\left(p'_x + v\cdot\frac{E'}{c^2}\right),\quad p_y = p'_y\ ,\quad p_z = p'_z \\ &\frac{E}{c^2} = a\left(\frac{E'}{c^2}+\frac{v}{c^2}p'_x\right) \qquad \Rightarrow \qquad E = a\,(E' + v\,p'_x) \end{aligned} \tag{1.51}$$

Relațiile (1.51) sunt echivalente cu (1.46) .

1.7. Transformarea unei forțe

Din relațiile (1.45) şi (1.46) rezultă:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{a\left(d\vec{p}'_{\Downarrow} + \vec{v}\,dm'\right) + d\vec{p}'_{\perp}}{a\left(dt' + \frac{\vec{v}\cdot d\vec{r}'_{\Downarrow}}{c^2}\right)} = \frac{\vec{F}'_{\Downarrow} + \vec{v}\frac{dm'}{dt'} + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}} = \frac{\vec{F}'_{\Downarrow} + \vec{v}\frac{d}{dt'}\left(\frac{E'}{c^2}\right) + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}} =$$

$$= \frac{\vec{F}'_{\Downarrow} + \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{dE'}{dt'} + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}} = \frac{\vec{F}'_{\Downarrow} + \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{F}'_{\Downarrow}\vec{u}'_{\Downarrow} + \vec{F}'_{\perp}\vec{u}'_{\perp}\right) + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}} = \frac{\vec{F}'_{\Downarrow}\left(1+\frac{v}{c^2}u'_{\Downarrow}\right) + \frac{\vec{v}}{c^2}\vec{F}'_{\perp}\vec{u}'_{\perp} + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{a}}{1+\frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}'_{\Downarrow} + \frac{a\frac{\vec{v}}{c^2}\vec{F}'_{\perp}\vec{u}'_{\perp} + \vec{F}'_{\perp}}{a\left(1 + \frac{v\,u'_{\Downarrow}}{c^2}\right)} \qquad \vec{F}' = \vec{F}_{\Downarrow} + \frac{-a\frac{\vec{v}}{c^2}\vec{F}_{\perp}\vec{u}_{\perp} + \vec{F}_{\perp}}{a\left(1 - \frac{v\,u_{\Downarrow}}{c^2}\right)}} \tag{1.52}$$

Am folosit faptul că $\frac{dE'}{dt'} = \vec{F}'\cdot\vec{u}' = \vec{F}'_{\Downarrow}\cdot\vec{u}'_{\Downarrow} + \vec{F}'_{\perp}\cdot\vec{u}'_{\perp}$.

1.8. Interacţiunea dintre două sarcini elecrice în mişcare

Legea lui Coulomb arată că două sarcini electrice aflate în repaus se resping ori se atrag cu o forţă proporţională cu produsul dintre mărimea sarcinilor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele:

$$\vec{F}'_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cdot\frac{\vec{r}'}{r'} \tag{1.53}$$

unde ε_0 este permitivitatea vidului, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Sarcina electrică totală a unui sistem izolat este un invariant relativist: măsurând sarcina, observatorii aflaţi în diferite sisteme de referinţă obţin aceeaşi valoare. Experimental s-a stabilit că formula (1.53) este valabilă şi în cazul în care o sarcină staţionară Q interacţionează cu o sarcină q în mişcare.

Considerăm că cele două sarcini punctiforme Q şi q se află la distanţa r' una de alta în sistemul de referinţă S' şi la distanţa r măsurată în sistemul S . Presupunem că sarcina Q se află în originea sistemului S', care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ faţă de sistemul S , de-a lungul axei Ox. Sarcina q este în mişcare cu viteza $\vec{u}$ faţă de sistemul S şi cu viteza $\vec{u}'$ faţă de sistemul S'. În sistemul S' sarcina Q este staţionară. Pe baza relaţiilor (1.52) putem scrie:

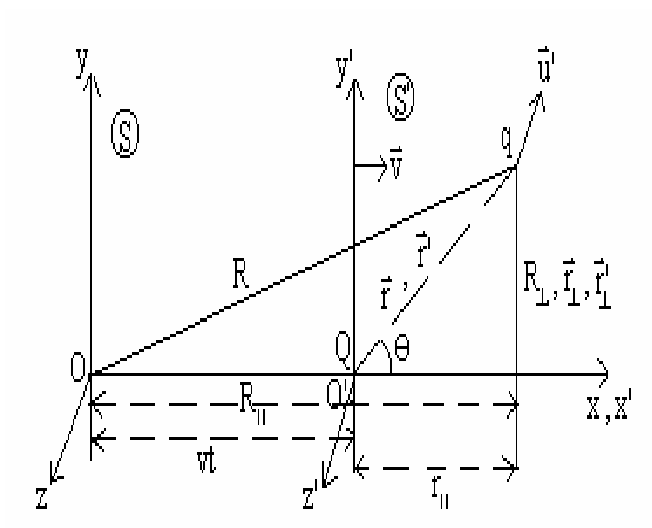
$$\vec{F}_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\cdot\left[\vec{r}'_{\Downarrow} + \frac{a\cdot\frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\vec{r}'_{\perp}\cdot\vec{u}'_{\perp} + \vec{r}'_{\perp}}{a\cdot\left(1 + \frac{vu'_{\Downarrow}}{c^2}\right)}\right] \tag{1.54}$$

Din (1.40) şi din figuă rezultă:

$$\vec{r}'_{\Downarrow} = a\left(\vec{R}_{\Downarrow} - \vec{v}t\right) = a\,\vec{r}_{\Downarrow} \;,\quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{R}_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \tag{1.55}$$

$$\vec{r}'^2 = \vec{r}'^2_{\Downarrow} + \vec{r}'^2_{\perp} = a^2\left(\vec{R}_{\Downarrow} - \vec{v}t\right)^2 + \vec{R}^2_{\perp} = a^2\left[\left(\vec{R}_{\Downarrow} - \vec{v}t\right)^2 + \frac{\vec{R}^2_{\perp}}{a^2}\right] \tag{1.56}$$

$$\beta = \frac{v}{c},\;\; \frac{1}{a^2} = 1 - \beta^2,\;\; r^2 = r^2_{\Downarrow} + r^2_{\perp} = \underline{\left(\vec{R}_{\Downarrow} - \vec{v}t\right)^2 + \vec{R}^2_{\perp}} \qquad \Rightarrow$$



$$\vec r'^2 = a^2\left[\left(\vec R_\parallel - \vec v t\right)^2 + \vec R_\perp^2\left(1-\beta^2\right)\right] =$$

$$= a^2\left(r^2 - \vec R_\perp^2\beta^2\right) = a^2\left(r^2 - r^2\beta^2\sin^2\theta\right),$$

$$\left[\sin\theta = \frac{R_\perp}{r} \;\Rightarrow\; R_\perp = r\cdot\sin\theta\right]$$

$$r'^2 = a^2r^2\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)$$

$$r' = ar\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{1/2}$$

$$r'^3 = a^3r^3\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2} \qquad (1.57)$$

Din (1.41) avem:

$$\vec u'_\parallel = \frac{\vec u_\parallel - \vec v}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel} \;;\; \vec u'_\perp = \frac{\vec u_\perp}{a\left(1-\frac{v}{c^2}u_\parallel\right)} \qquad (1.58)$$

Înlocuind (1.55), (1.57) şi (1.58) în (1.54) obţinem:

$$\vec F_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\cdot\left[a\vec r_\parallel + \frac{a\cdot\frac{\vec v}{c^2}\left[\vec r_\perp\cdot\frac{\vec u_\perp}{a\left(1-\frac{v}{c^2}u_\parallel\right)}\right]+\vec r_\perp}{a\left(1+\frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\vec u_\parallel-\vec v}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel}\right)}\right] =$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^3r^3\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\cdot\left[\frac{a^2\vec r_\parallel + \frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\left(\vec u_\parallel-\vec v\right)a^2\,\vec r_\parallel}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel} + \frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\vec u_\perp\,\vec r_\perp}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel} + \vec r_\perp}{a\left(1+\frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\vec u_\parallel-\vec v}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel}\right)}\right] \qquad (1.59)$$

Paranteza pătrată se prelucrează astfel:

$$\frac{a^2\vec r_\parallel + a^2\,\vec r_\parallel\,\vec u_\parallel\,\frac{\vec v}{c^2\left(1-\frac{v}{c^2}u_\parallel\right)} - \frac{a^2\,\vec r_\parallel}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel}\cdot\vec v\,\frac{\vec v}{c^2} + \frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\vec r_\perp\,\vec u_\perp}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel} + \vec r_\perp}{a\left(1+\frac{\vec v}{c^2}\cdot\frac{\vec u_\parallel-\vec v}{1-\frac{v}{c^2}u_\parallel}\right)} =$$

$$= \frac{a^2\,\vec r_{\Downarrow} c^2 - a^2\,\vec r_{\Downarrow}\cdot v\,u_{\Downarrow} + a^2\,\vec r_{\Downarrow}\,\vec u_{\Downarrow}\,\vec v - a^2\,\vec r_{\Downarrow}\,\vec v\,\vec v + \vec v\,\vec r_{\perp}\,\vec u_{\perp} + \vec r_{\perp}\cdot c^2 - \vec r_{\perp}\cdot\vec v\,\vec u_{\Downarrow}}{a\left[c^2\left(1-\frac{v}{c^2}u_{\Downarrow}\right)+\vec v\,\vec u_{\Downarrow}-\vec v^2\right]} =$$

$$= \frac{a^2\,\vec r_{\Downarrow} c^2\left(1-\frac{v}{c^2}\right)+\vec v\,\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\perp}-\vec v\,\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\Downarrow}+\vec r_{\perp}\cdot c^2}{a\left(c^2-v^2\right)} = \frac{\vec r_{\Downarrow} c^2+\vec r_{\perp}\cdot c^2+\vec v\,\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\perp}-\vec v\,\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\Downarrow}}{\frac{a^2}{a}c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} =$$

$$= a\left(\vec r+\frac{\vec v}{c^2}\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\perp}-\frac{\vec v}{c^2}\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\Downarrow}\right)$$, având în vedere că:

$$\vec r=\vec r_{\Downarrow}+\vec r_{\perp}\,, \qquad a=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad a^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

Rezultă:

$$\vec F_{Qq}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r+\frac{\vec v}{c^2}\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\perp}-\frac{\vec v}{c^2}\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\Downarrow}}{a^2r^3\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} \tag{1.60}$$

Folosind proprietatea $\vec a\times\left(\vec b\times\vec c\right)=\vec b\left(\vec a\cdot\vec c\right)-\vec c\left(\vec a\cdot\vec b\right)$, rezultă:

$$\vec v\left(\vec r_{\perp}\cdot\vec u_{\perp}\right)-\vec v\,\vec u_{\Downarrow}\vec r_{\perp}=\vec v\left(\vec u\cdot\vec r_{\perp}\right)-\vec r_{\perp}\left(\vec u\cdot\vec v\right)=\vec u\times\left(\vec v\times\vec r_{\perp}\right)=\vec u\times\left(\vec v\times\vec r\right)$$

$$\vec F_{Qq}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r+\frac{\vec u\times\left(\vec v\times\vec r\right)}{c^2}}{a^2r^3\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} \tag{1.61}$$

Primul termen reprezintă <u>forța electrică</u> (independentă de viteza $\vec u$), iar cel de-al doilea termen reprezintă <u>forța magnetică</u> (dependentă de viteza $\vec u$). Astfel relația (1.61) se pune sub forma:

$$\vec F_{Qq}=q\left(\vec E_Q+\vec u\times\vec B_Q\right) \tag{1.62}$$

unde:

$$\vec E_Q=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2r^2\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\cdot\frac{\vec r}{r} \tag{1.63}$$

este <u>intensitatea câmpului electric</u> datorat sarcinii Q în locul unde se află sarcina q, iar

$$\vec B_Q=\frac{\mu_0\cdot Q\left(\vec v\times\vec r\right)}{4\pi a^2r^3\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\,, \qquad \left(\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\right) \tag{1.64}$$

este <u>inducția magnetică</u> în locul unde se află sarcina q. Pentru $\theta=\frac{\pi}{2}$ se obțin valorile maxime ale lui $\vec E_Q$ şi $\vec B_Q$:

$$\vec E_{Q_{max}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2r^2\left(1-\beta^2\right)\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\vec r}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,a\,\frac{\vec r}{r} \tag{1.65}$$

$$\vec{B}_{Q_{max}} = \frac{\mu_0 \cdot Q\left(\vec{v}\times\vec{r}\right)}{4\pi r^3}\cdot a \quad , \quad B_{Q_{max}} = \frac{\mu_0 \cdot Q\, v}{4\pi r^2}\, a \qquad (1.66)$$

Pentru $a = 1$ se obțin expresiile nerelativiste. Raportul

$$E_{Q_{max}} / B_{Q_{max}} = \frac{c^2}{v} \qquad (1.67)$$

arată că interacțiunea magnetică este practic neglijabilă în comparație cu cea electrică, interacțiunea magnetică fiind un efect relativist.