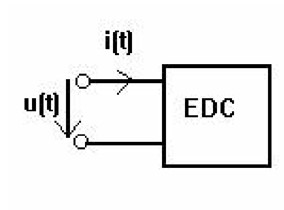
CAPITOLUL 2

CIRCUITE REZISTIVE

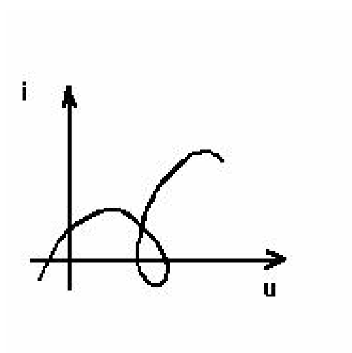
2.1. Elemente de circuit

2.1.1. Elementele dipolare

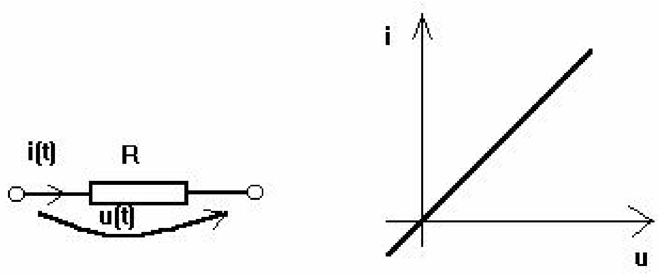
Fie un element dipolar de circuit (EDC) pentru care definim multimea perechilor admisibile tensiune-curent ca perechile de numere reale {u (t), i(t)} la momentul t de timp.



Rezistorul ideal este EDC pentru care multimea perechilor admisibile tensiune-curent poate fi reprezentata printr-o curba in planul u-i. Daca curba este o dreapta care trece prin origine rezistorul este liniar; in celelalte cazuri rezistorul este neliniar.



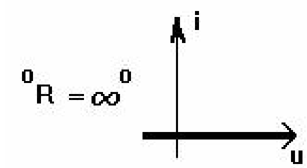
Ecuatia f(u,i)=0 a acestei curbe se numeste *ecuatia constitutiva* a rezistorului. Aceasta curba se numeste *caracteristica rezistorului*. Daca rezistorul este *invariabil in timp* caracteristica se pastreaza aceeasi pentru orice t. Daca rezistorul este variabil in timp caracteristica se modifica in functie de t. Un *rezistor liniar* satisface legea lui Ohm: u (t) = R•i(t) pentru orice t, unde u(t) este tensiunea la borne, i(t) este intensitatea curentului si R este *rezistenta*. Daca u se masoara in V(volt) si i in A



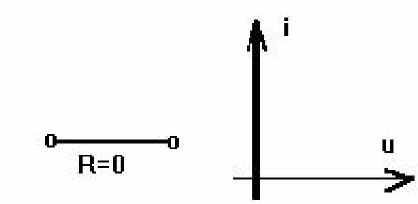
(amper) atunci R se masoara in Ω (ohm). Inversul rezistentei se numeste *conductanta* G = 1/R si se masoara in S (siemens) (1 S=$1\Omega^{-1}$).

Pentru un rezistor liniar cu R∈(0,+∞], valorile extreme ale lui R reprezinta urmatoarele situatii:

-rezistorul corespunzator mersului in gol la care curentul i este nul pentru orice valoare a tensiunii (R=∞, G = 0)



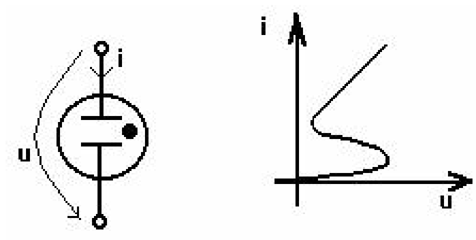
- rezistorul corespunzator mersului in scurtcircuit la care tensiunea u este nula pentru orice valoare a curentului (R = 0, G = ∞)



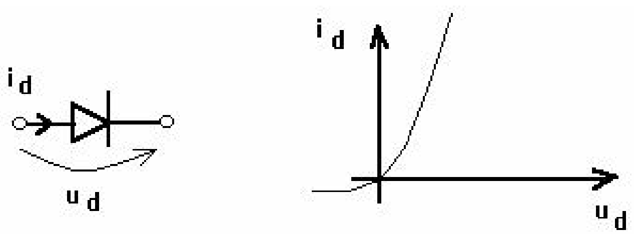
Daca valoarea lui R este o functie de un parametru p , (u(t)=R(p)i(t)) rezistorul liniar este *parametric*; de exemplu un contactor inchis-deschis se modeleaza printr-un rezistor parametric avand $R(p)=\begin{cases} 0 & daca \quad p = inchis \\ \infty & daca \quad p = deschis \end{cases}$

Modelarea unui dispozitiv printr-un rezistor liniar este de obicei o aproximatie a fenomenului real, dispozitivele fiind de regula neliniare. Sunt multe exemple in care neliniaritatea joaca un rol esential in functionarea dispozitivului:

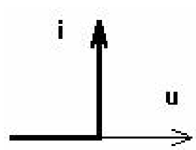
- tubul cu neon



- jonctiunea pn (dioda semiconductoare) cu caracteristica $i_d = I_S(e^{u_d/u_T} - 1)$ unde I_s si u_T sunt constante în raport cu u_d si i_d

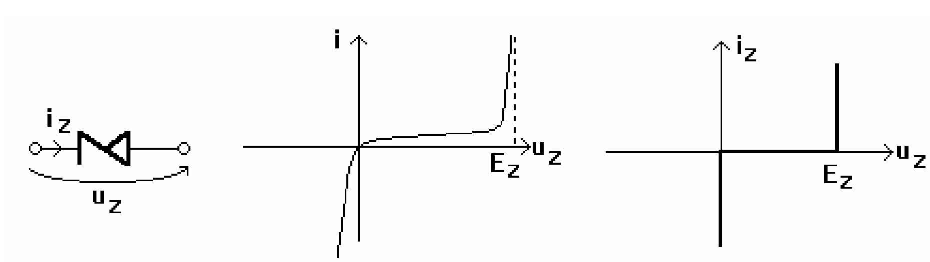


Daca se aproximeaza caracteristica neliniara cu segmente de dreapta, se obtine un rezistor cu caracteristica liniara pe portiuni. De exemplu dioda ideala care este un model simplificat al diodei



semiconductoare .

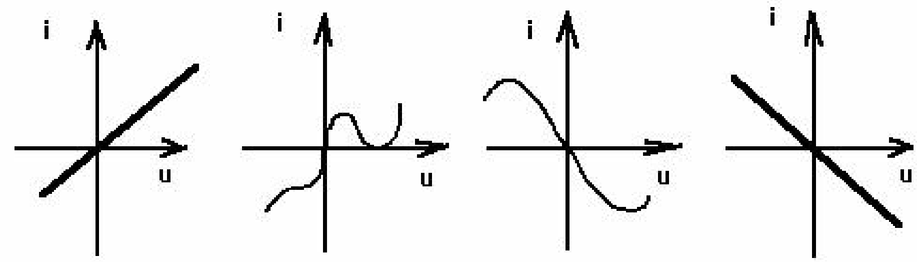
-dioda Zener este o dioda care are pentru u<0 o zona in care se poate considera u≅const. si este utilizata la stabilizarea tensiunii; in figura este data caracteristica si modelul ei liniarizat pe portiuni



Daca rezistorul are o ecuatie constitutiva de forma i=î(u) se numeste *rezistor controlat in tensiune*, iar daca aceasta ecuatie are forma u = û(i) rezistorul este *controlat in curent*

O alta clasificare a rezistoarelor se face tinand seama de semnul puterii absorbite:

-un rezistor este *pasiv* daca caracteristica sa se afla in cadranele I si III ($R \geq 0$ pentru un rezistor liniar); puterea absorbita de rezistor la momentul de timp t este: $p(t) = u(t)\, i(t) \geq 0$ (pentru rezistorul liniar $p(t)= R\, i^2(t) = G\, u^2(t)$), adica rezistorul pasiv absoarbe pentru orice t o putere



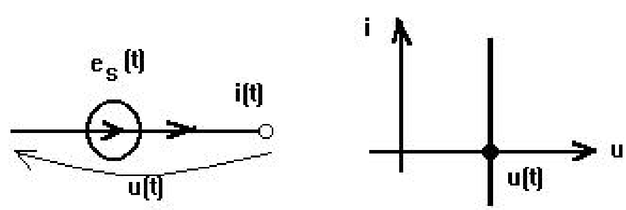
rezistoare pasive rezistoare active

pozitiva .

-un rezistor este *activ* daca caracteristica sa trece si prin cadranele II si/sau IV ($R < 0$ pentru un rezistor liniar); puterea absorbita de un rezistor activ poate fi negativa (daca $p<0$ rezistorul activ cedeaza putere circuitului in care este conectat); rezistoarele active se utilizeaza in schemele echivalente ale unor circuite electronice cum sunt oscilatoarele.

Sursele independente sunt elemente de circuit care modeleaza baterii si generatoare de semnal.

Sursa ideala de tensiune este caracterizata de ecuatia constitutiva $u(t) = e_S(t)$, pentru $-\infty< i(t)< \infty$, unde $e_S(t)$ se numeste *tensiunea electromotoare* a sursei. Spunem ca sursa este *ideala* deoarece tensiunea la borne nu depinde de intensitatea curentului prin sursa. Daca $e_S(t)$ nu depinde de nici o marime (tensiune sau curent) a circuitului in care este conectata sursa, spunem ca avem o sursa *independenta*.

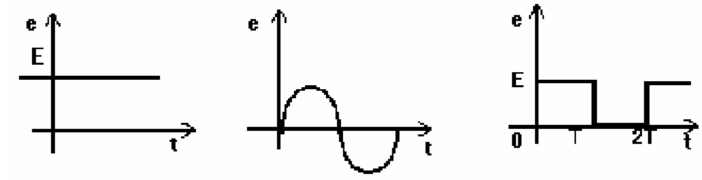


Formele uzuale ale lui e_S (t) sunt:

$e_S(t) = E = \text{const.}$ (sursa de tensiune continua)

$e_S(t) = E \sin\omega t$ (sursa sinusoidala)

$$e_S(t) = \begin{cases} E & 0 \le t < T \\ O & T \le t < 2T \\ E & 2T \le t < 3T \\ \vdots & \\ . & \end{cases} \quad \text{(sursa de impulsuri)}$$



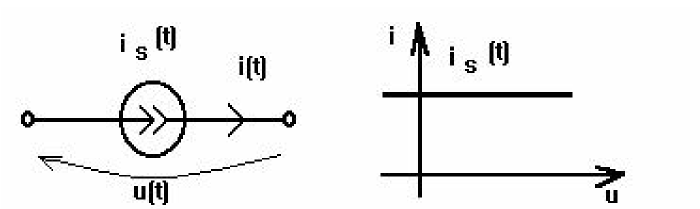
Observatii:

(i) datorita alurii caracteristicii u - i se poate considera sursa independenta de tensiune continua ca un rezistor neliniar (u(i) nu trece prin origine decat daca $e_S(t)= 0$) controlat in curent (caracteristica este o dreapta paralela cu axa curentilor);

(ii) o sursa reala de tensiune (baterie) contine o sursa ideala de tensiune in serie cu o rezistenta interna R_i de valoare nenula; la sursa ideala se poate considera $R_i = 0$;

(iii) daca $e_S(t)=0$, sursa ideala independenta de tensiune devine un rezistor cu R = 0 (scurtcircuit); spunem in acest caz ca *sursa este pasivizata*.

Sursa ideala de curent este caracterizata de ecuatia constitutiva $i(t) = i_S(t)$ pentru $-\infty < u(t) < \infty$ unde $i_S(t)$ se numeste *curentul electromotor* al sursei. Spunem ca sursa este *ideala* deoarece intensitatea curentului prin sursa nu depinde de tensiunea la borne. Daca $i_S(t)$ nu depinde de nici o marime (tensiune sau curent) a circuitului in care este conectata sursa, spunem ca avem o sursa *independenta*.



Observatii:

(i) sursa ideala independenta de curent continuu poate fi considerata rezistor neliniar controlat in tensiune;

(ii) o sursa reala de curent contine o sursa ideala de curent in paralel cu o rezistenta interna R_i de valoare finita; la sursa ideala se poate considera $R_i = \infty$;

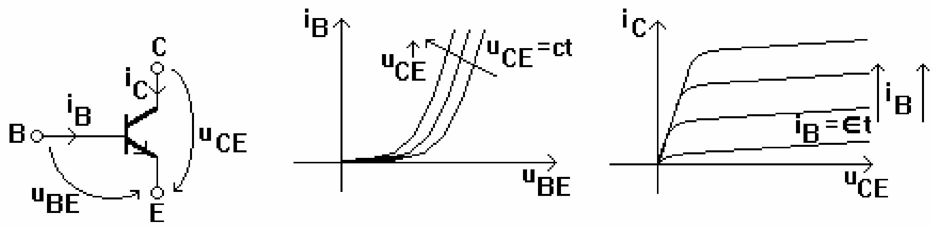
(iii) daca $i_S(t)=0$ sursa independenta de curent devine un rezistor cu $R_i= \infty$ (gol); spunem in acest caz ca *sursa este pasivizata.*

Puterea debitata de o sursa este p(t) = u(t)i(t) unde u (t) si i(t) sunt asociate dupa regula de la generatoare. Daca sursa cedeaza putere circuitului in care este conectata avem p(t)>0, iar daca sursa primeste putere de la acest circuit avem p(t)<0.

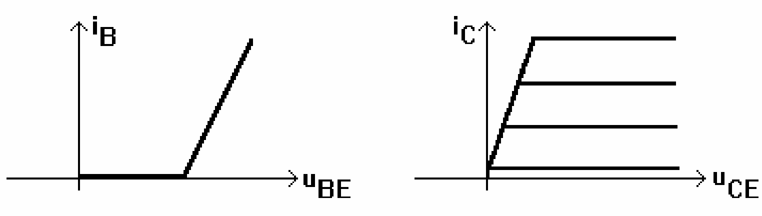
2.1.2. Elementele multipolare

Aceste elemente se utilizeaza pentru modelarea dispozitivelor cu mai multe borne de acces.De exemplu tranzistorul bipolar sau tranzistorul MOS se modeleaza cu un element tripolar (cu 3 borne), amplificatorul operational sau transformatorul se modeleaza cu un element cuadripolar (cu 4 borne).

Tranzistorul bipolar (fabricat in tehnologia “bipolara”, care nu are nici o legatura cu numarul de borne sau poli) poate fi modelat, pentru semnale lent variabile in timp, printr-un rezistor tripolar cu bornele denumite baza (B), emitor (E) si colector (C). Tripolul poate fi considerat ca diport deoarece intotdeauna se pot evidentia doua porti ca in figura (fiecare poarta avand doua terminale parcurse de acelasi curent). In figura s-a reprezentat tranzistorul in conexiunea emitor

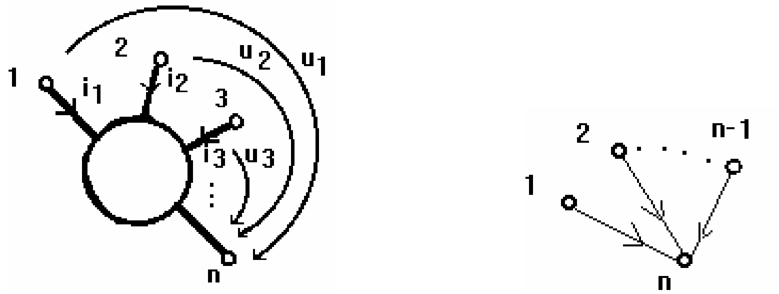


comun (EC) pentru care poarta de intrare (B-E) si poarta de iesire (C-E) au borna de emitor comuna. Un diport rezistiv poate fi caracterizat prin doua familii de curbe: caracteristicile de intrare si caracteristicile de iesire. In conexiunea EC caracteristicile de intrare sunt $i_B=f_1\,(u_{BE}, u_{CE})$ iar cele de iesire sunt $i_C=f_2\,(u_{CE}, i_B)$. Desi ambele caracteristici sunt familii de curbe depinzand de un parametru (parametrul este o marime asociata celeilate porti si anume pentru f_1 este tensiunea de iesire u_{CE}, iar pentru f_2 este curentul de intrare i_B), caracteristicile de intrare nu depind practic de u_{CE} . Reprezentarea liniara pe portiuni a acestor caracteristici poate fi utila in multe situatii.



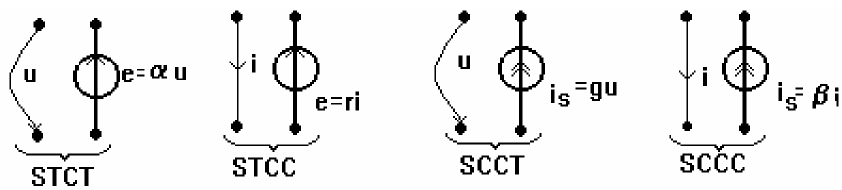
Si celelalte tipuri de tranzistoare pot fi modelate, in conditii asemanatoare, prin cuadripoli diporti rezistivi.

Similar cu tripolul, pentru n-pol se pot determina n-1 porti care au borna n comuna.



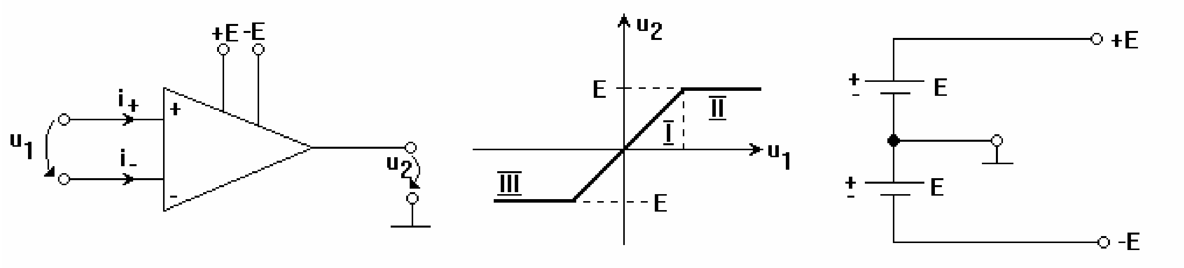
Pentru fiecare poarta se poate scrie o ecuatie de tipul $y_k=f_k(x_1,...,x_{n-1})$ unde y_k este variabila de iesire a portii k (u_k sau i_k) iar x_k este variabila de intrare a aceleiasi porti (i_k sau u_k) pentru k=1,...,n-1. Laturii k din graful radial al n-polului i se asociaza ecuatia $y_k=f_k(x_1,...,x_{n-1})$ deci pentru fiecare latura din graf avem o ecuatie constitutiva.

Sursele comandate (dependente) sunt surse la care tensiunea sau curentul electromotor depind de marimi ale circuitului in care este conectata sursa. O sursa comandata este un element cuadripolar cu doua laturi: latura de comanda careia ii este asociata marimea de comanda si latura comandata care contine sursa. Cele doua laturi trebuie sa faca parte din acelasi circuit. Exista patru tipuri de surse comandate: sursa de tensiune comandata în tensiune (STCT), sursa de tensiune



comandata în curent (STCC), sursa de curent comandata în tensiune (SCCT) si sursa de curent comandata în curent (SCCC). In figura au fost reprezentate *surse comandate liniar* pentru care relatia intre tensiunea sau curentul electromotor si parametrul de comanda este liniara. Daca aceasta relatie nu este liniara avem *o sursa comandata neliniar* (de exemplu in schema echivalenta a unui tranzistor intervine o sursa de curent comandata neliniar in curent $i_c=f(i_B)$).

Amplificatorul operational este un circuit integrat care functioneaza ca o sursa de tensiune comandata neliniar in tensiune. Acest circuit are doua borne de intrare care sunt notate cu + si – intre



care se considera tensiunea u_1. Amplificatorul operational functioneaza fiind alimentat de catre doua surse independente de tensiune continua conectate intre bornele +E, -E si masa. Curentii i_+ si i_- iau intotdeauna valori foarte mici si se poate considera $i_+ = 0$ si $i_- = 0$.

Tensiunea u_2 intre borna de iesire si masa depinde neliniar de tensiunea u_1. Dependenta intre u_2 si u_1 este desenata ca o caracteristica cu trei portiuni liniare. Pe portiunea I dependenta intre u_2 si u_1 este liniara, panta acestei portiuni fiind foarte mare$\left(\frac{u_2}{u_1} \approx 10^6\right)$. Deoarece $-E \le u_2 \le +E$ si $E = 3 \div 15\,V$ rezulta ca pe aceasta portiune u_1 este de ordinul microvoltilor deci putem considera $u_1 = 0$. Pe portiunea II $u_2 = +E$ si $u_1 > 0$ ceea ce corespunde functionarii cu iesirea "in saturatie". Pe portiunea III $u_2 = -E$ si $u_1 < 0$ (tot functionare cu iesirea "in saturatie"). Amplificatorul operational este foarte des utilizat in proiectarea circuitelor electronice.

2.2. Ecuatiile circuitelor rezistive

Un circuit care contine rezistoare dipolare si multipolare, surse independente de tensiune si surse independente de curent este *un circuit rezistiv*. Un circuit rezistiv este *liniar* daca dupa pasivizarea tuturor surselor independente din circuit (se considera $e_{Sk}= 0$ si $i_{Sk}=0$) raman numai elemente liniare de circuit; daca numai un singur element de circuit este neliniar, circuitul este *neliniar*.

Ecuatiile unui circuit rezistiv al carui graf are L laturi si N noduri (vezi capitolul 1) sunt:

- N-1 ecuatii liniar independente intre ele date de teorema I a lui Kirchhoff,
- L-N+1 ecuatii liniar independente intre ele date de teorema a II-a a lui Kirchhoff,
- L ecuatii constitutive asociate fiecarei laturi din graful circuitului.

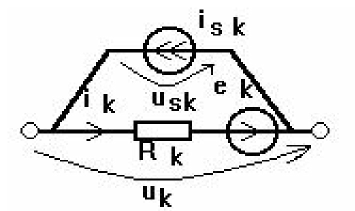
In total, rezulta 2L ecuatii, dintre care L (reprezentand teoremele lui Kirchhoff) sunt intotdeauna liniare. Daca exista cel putin un element neliniar de circuit, atunci cel putin o ecuatie constitutiva este neliniara. Pentru un circuit liniar toate ecuatiile sunt liniare.

Problema analizei unui circuit al carui graf are N noduri si L laturi se formuleaza astfel:

- se dau elementele de circuit si modul lor de interconectare
- se cer tensiunile si curentii corespunzatori fiecarei laturi din graful circuitului.

Elementele de circuit fiind date, inseamna ca se cunosc ecuatiile lor constitutive. Stiind cum sunt interconectate elementele putem scrie teoremele lui Kirchhoff. Rezulta ca solutia acestei probleme se determina prin rezolvarea sistemului celor 2L ecuatii ale circuitului in raport cu cele 2L necunoscute u_k, i_k (k=1,...,L).

Numarul necunoscutelor (si al ecuatiilor) se poate reduce daca se considera numai curentii prin rezistoare si sursele de tensiune si tensiunile surselor de curent. Se considera un circuit cu elemente dipolare in care o latura completa are urmatoarea structura:



Putem scrie pentru fiecare latura completa: $R_k\, i_k - e_k - u_k = 0$, $u_k = u_{sk}$.

Ecuatiile circuitului sunt:

Din teorema I a lui Kirchhoff rezulta: $\sum\limits_{k\in N_k} i_k = \sum\limits_{k\in N_k} i_{sk}$

Din teorema a II-a a lui Kirchhoff rezulta: $\sum\limits_{k\in B_k} R_k i_k - \sum\limits_{k\in B_k} u_{sk} = \sum\limits_{K\in B_k} e_k$

Notand cu U_S vectorul tensiunilor surselor de curent, cu I_1 vectorul curentilor rezistoarelor si surselor de tensiune si cu S vectorul surselor (membrul drept al ecuatiilor de mai sus) rezulta ecuatia matriceala:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ L \end{array}
\begin{array}{c} 1 \quad \cdots \quad L \qquad 1 \quad \cdots \quad L \\ \left|\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \pm 1,0 & \vdots & \pm R_K,0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \pm 1 \\ & & \end{array}\right| \end{array}
\cdot \left|\begin{array}{c} U_S \\ \cdots \\ I_1 \end{array}\right| = \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \\ . \\ L \end{array}\left|\begin{array}{c} S \end{array}\right| .$$

Daca circuitul contine si surse comandate liniar sistemul ecuatiilor circuitului se poate scrie intr-o forma asemanatoare.

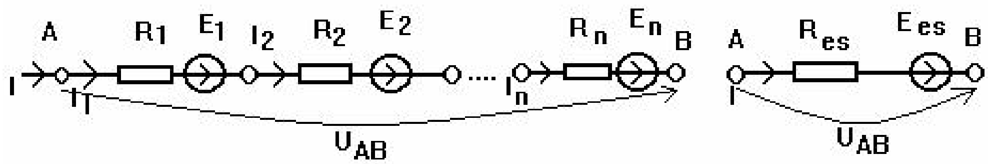
Pe baza ecuatiilor unui circuit rezistiv se pot formula si alte probleme. In *probemele de sinteza* se dau anumite marimi de intrare si de iesire (tensiuni si/sau curenti) si se cer structura si parametrii circuitului care are marimile de intrare si de iesire date. In *problemele de localizare a defectelor* se dau anumite marimi (tensiuni si curenti) masurate la bornele de testare atat pentru circuitul care functioneaza corect cat si pentru circuitul cu defecte si se cer care sunt elementele de circuit defecte si cum s-au modificat parametrii acestor elemente. Aceste doua tipuri de probleme nu se studiaza in acest curs.

2.3. Analiza unor circuite simple

2.3.1. Circuite serie-paralel

2.3.1.1. Circuite liniare

a) Se considera un circuit cu doua borne de acces A si B format din n rezistoare si n surse de tensiune legate in serie.



Se urmareste obtinerea unui circuit echivalent (care sa aiba la bornele A-B aceeasi tensiune U_{AB} si care sa absoarba acelasi curent I).

$U_{AB} = IR_{es} - E_{es}$ (A)

Din teorema I a lui Kirchhoff rezulta:

$I_1 = I_2 = ... = I_n = I$

Din teorema a II-a a lui Kirchhoff rezulta:

$U_{AB} = U_1+U_2 + ... + U_n = R_1 I_1 - E_1 + R_2 I_2 - E_2 + ... + R_n I_n - E_n$

$U_{AB} = I (R_1 + R_2 + ... + R_n) - (E_1 + E_2 + ... + E_n)$ (B)

Din (A) si (B), prin identificare, se obtine:

$$R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad E_{es} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Daca toate tensiunile electromotoare sunt nule avem n rezistoare conectate in serie cu rezistenta echivalenta R_{es} data de suma rezistentelor tuturor rezistoarelor.

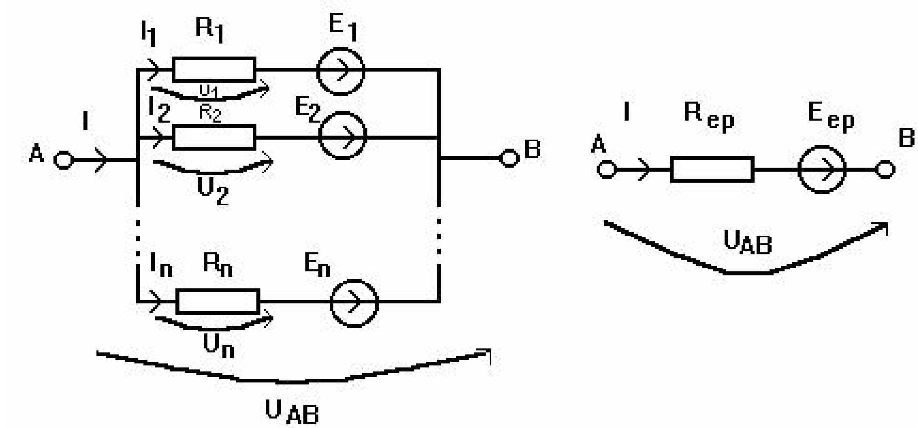
b) Se considera un circuit format din n rezistoare si n surse de tensiune legate in paralel. Se urmareste determinarea unui circuit mai simplu echivalent cu acesta intre bornele A si B. Pentru ambele circuite marimile la borne sunt U_{AB} si I.

Din teoremele lui Kirchhoff rezulta:

$I = I_1 + I_2 + ... + I_n$

$U_{AB} = U_1 - E_1 = U_2 - E_2 = ... = U_n - E_n$

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \cdots + \frac{U_n}{R_n} = U_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_n}{R_n} \quad \text{(A)}$$



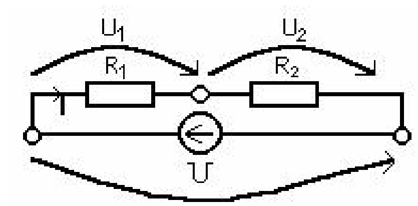
Dar $\quad I = \dfrac{U_{AB}}{R_{ep}} + \dfrac{E_{ep}}{R_{ep}}$ $\qquad$ (B)

Identificind coeficientii din (A) si (B) se obtine:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \qquad\qquad E_{ep} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

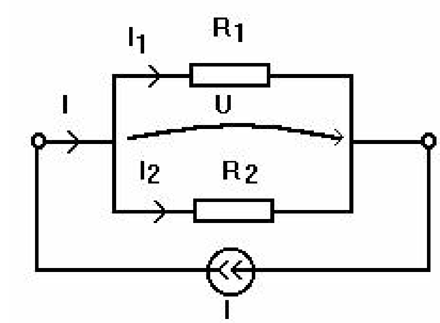
Daca toate tensiunile electromotoare sunt nule avem n rezistoare conectate in paralel cu conductanta echivalenta $G_{ep} = 1/R_{ep}$ data de suma conductantelor tuturor rezistoarelor.

c) Divizorul de tensiune imparte tensiunea U în doua parti U_1 si U_2 ($U=U_1+U_2$).



Calculand $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$, rezulta $U_1 = U \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ si $U_2 = U \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$.

d) Divizorul de curent imparte curentul I în doua parti I_1 si I_2 ($I=I_1+I_2$). Daca se scrie $U = R_1 I_1 = R_2 I_2$ rezulta :

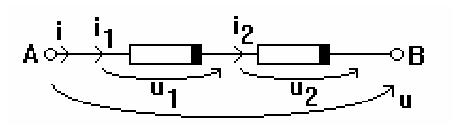


$I_2 = I\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$ si $I_1 = I\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$.

2.3.1.2. Circuite cu rezistoare neliniare

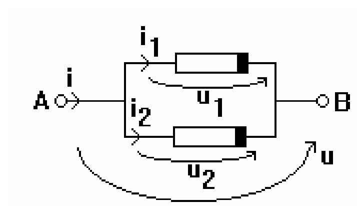
2.3.1.2.1. Caracteristici de intrare si de transfer

Fie *doua rezistoare* neliniare conectate *in serie*. Se cunosc caracteristicile fiecarui rezistor



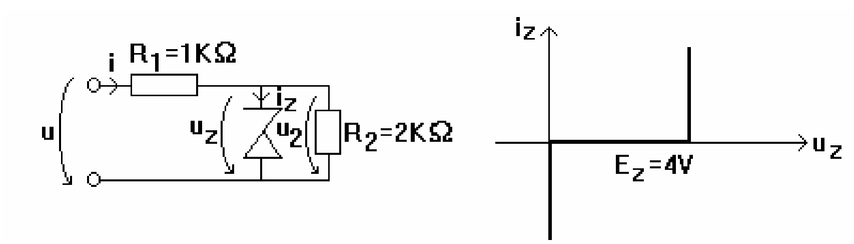
$f_1(u_1, i_1)=0$ si $f_2(u_2, i_2)=0$ si se cere sa se determine caracteristica de intrare intre bornele A si B $f(u, i)=0$. Ecuatiile care descriu conexiunea serie sunt $i= i_1=i_2$ si $u=u_1+u_2$. Cunoscand graficele $f_1(u_1, i_1)=0$ si $f_2(u_2, i_2)=0$, curba $f(u,i)=0$ se poate determina prin puncte adunand tensiunile corespunzatoare aceluiasi curent. Evident aceasta operatiune este posibila numai pentru multimea curentilor admisibili pentru ambele rezistoare. Daca $i_1\in[I_{1m}, I_{1M}]$ si $i_2\in[I_{2m}, I_{2M}]$ (unde cu m s-au notat curentii minimi si cu M s-au notat curentii maximi) atunci $i\in[I_{1m}, I_{1M}]\cap[I_{2m}, I_{2M}]$.

Pentru *doua rezistoare* conectate *in paralel* se procedeaza asemanator, adica ecuatiile conexiunii paralel fiind $u=u_1=u_2$ si $i=i_1+i_2$, se aduna curentii corespunzatori aceleiasi tensiuni.

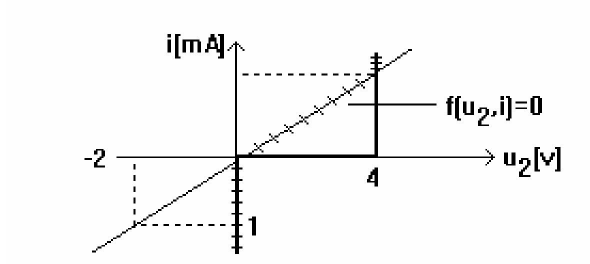


Aceasta operatiune se face pentru $u\in[U_{1m}, U_{1M}]\cap[U_{2m}, U_{2M}]$ semnificatiile marimilor fiind similare cu conexiunea serie.

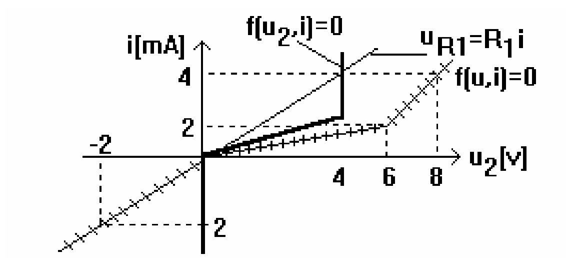
Exemplu: Se cere caracteristica de intrare $f(u, i)=0$ pentru circuitul din figura unde dioda Zener are



caracteristica alaturata. Se determina intai caracteristica de intrare $f(i,u_2)=0$ a grupului paralel dioda Zener - R_2. Se deseneaza pe acelasi grafic caracteristicile diodei si rezistorului liniar R_2.



Domeniul tensiunilor admisibile pentru rezistor este (-∞, +∞) iar pentru dioda [0, 4V]. Deci $u \in (-\infty, +\infty) \cap [0, 4] = [0, 4]$. Pentru fiecare tensiune din acest interval se aduna curentii; $i = i_Z + i_{R2}$. Pentru $u=0$ $i_{R2}=0$ si $i_Z \in (-\infty, 0]$ deci caracteristica grupului paralel se confunda cu caracteristica diodei Zener. Pentru $u \in (0, 4)$ $i_Z=0$ si $i=i_{R2}$, deci caracteristica grupului urmareste caracteristica rezistorului. Pentru $u=4$ i_{R2}=2mA si $i_Z \in [4, +\infty)$ deci caracteristica grupului este identica cu caracteristica diodei. Caracteristica grupului este desenata hasurat. Pentru a determina pe $f(u, i)=0$ se considera conexiunea serie intre R_1 si grupul D_Z-R_2. Se deseneaza pe acelasi grafic caracteristicile grupului D_Z-R_2 si R_1

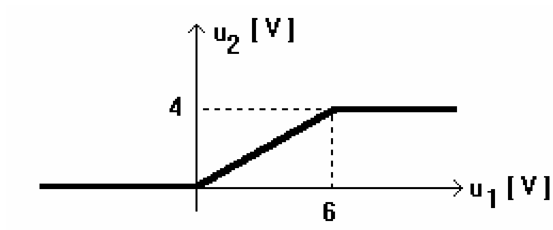


Domeniul curentilor admisibili pentru R_1 este (-∞, +∞) iar pentru grupul D_Z -R_2 este tot (-∞, +∞) deci $i \in [-\infty, +\infty]$. Pentru fiecare curent din acest interval se aduna tensiunile $u=u_{R1}+u_2$. Pentru $i \in (-\infty, 0]$ $u_2=0$ si $u=u_{R1}$ deci caracteristica de intrare urmareste caracteristica lui R_1 . Pentru $i \in [0,$ 2mA$]$ cele doua tensiuni variaza liniar cu i deci si u va avea o variatie liniara in raport cu i. Cunoscand ce se intampla intr-un capat al intervalului ($u=0$, $i=0$) este suficient sa calculam pe u intr-un singur punct din interval. De exemplu, pentru i=2mA u_{R1}=2V si u_2=4V deci u=2+4=6V. Pentru $i \in [2, +\infty)$ u_2=4V deci $u=4+u_{R1}$. Si pentru acest interval este suficient sa calculam pe u intr-un punct, de exemplu, pentru i=4mA u=4+4=8V. Caracteristica de intrare $f(u,i)=0$ este desenata hasurat.

In multe aplicatii practice este nevoie de dependenta intre o marime de iesire si o marime de intrare in circuit. Aceasta dependenta este o *caracteristica de transfer*. Sa determinam caracteristica de transfer $f(u_2,u)=0$ in circuitul din exemplul precedent. Folosind caracteristicile determinate mai inainte, se observa ca $f(u_2,u)=0$ se poate obtine eliminand pe i din caracteristicile

$f(u_2,i)=0$ si $f(u,i)=0$. Eliminarea lui i se va face considerand intervalele de curent in care ambele caracteristici se mentin pe o singura portiune liniara.

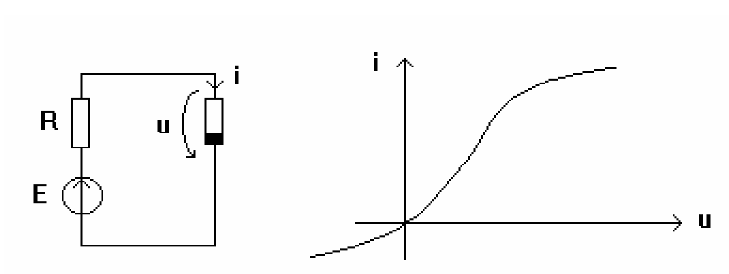
Pentru $i\in(-\infty, 0]$ $u_2=0$ si $u_1\in(-\infty, 0]$. Desenam aceasta portiune a caracteristicii de transfer pe

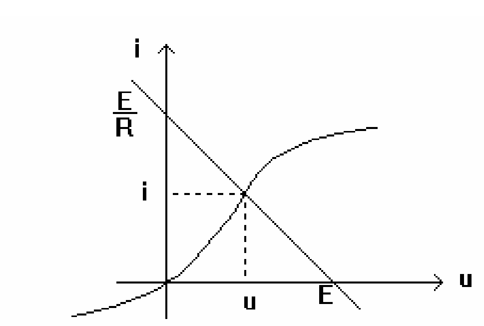


graficul cu axele u_2 si u_1. Pentru $i\in[0, 2mA]$ ambele tensiuni sunt proportionale cu i, deci sunt proportionale intre ele. Este deci suficient sa le calculam pentru i=2mA : u_2=4V , u=6V. Unim acest punct cu originea, obtinand o noua portiune a caracteristicii de transfer. Pentru $i\in[2, +\infty)$ u_2=4V si $u\in[6, +\infty)$ deci portiunea corespunzatoare a caracteristicii de transfer este orizontala. Caracteristica de transfer exprima foarte bine functia de stabilizator de tensiune a acestui circuit. Intr-adevar pentru u_1>6V u_2 se mentine la valoarea de 4V.

2.3.1.2.2.Determinarea solutiei prin metoda dreptei de sarcina

Fie circuitul din figura care contine un singur rezistor neliniar cu caracteristica din figurade mai jos. Marimile u si i trebuie sa satisfaca teorema a doua a lui Kirchhoff si relatia constitutiva a rezistorului neliniar. Teorema a doua a lui Kirchhoff se scrie Ri+u=E si poate fi reprezentata in planul u-i printr-o

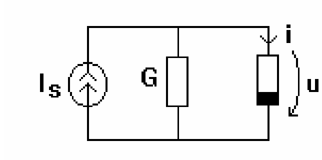




dreapta numita *dreapta de sarcina*. Pentru a desena dreapta de sarcina consideram punctele i=0 u=E si u=0 i=E/R. Valorile u si i se gasesc la intersectia caracteristicii rezistorului cu dreapta de sarcina.

Observatii

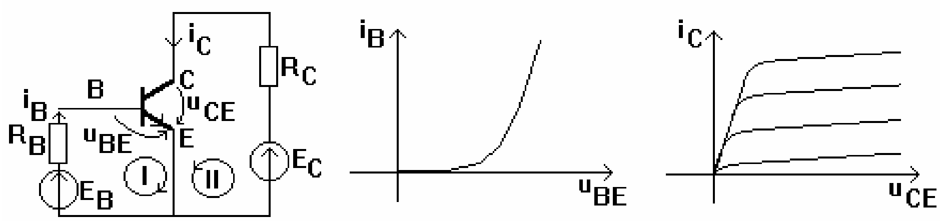
i) similar se pot determina u si i in circuitul din figura in care se cunoaste caracteristica



rezistorului neliniar; in acest caz ecuatia dreptei de sarcina rezulta din prima teorema a lui Kirchhoff.

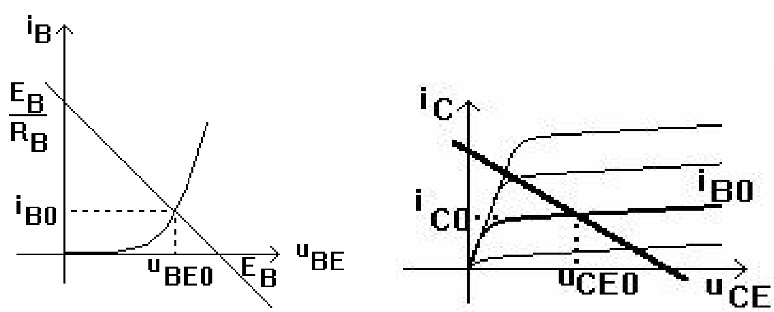
ii) daca circuitul contine un singur rezistor neliniar atunci se construieste generatorul echivalent al partii liniare (vezi paragraful 2.4.3.) si problema se reduce la rezolvarea unuia dintre cele doua circuite prezentate in acest paragraf.

Metoda dreptei de sarcina se poate utiliza si pentru circuite cu elemente tripolare. Fie circuitul



din figura cu un tranzistor ale carui caracteristici sunt date alaturat.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pe bucla I ($u_{BE}+R_Bi_B=E_B$) este ecuatia dreptei de sarcina la intrare. Trasarea acesteia permite determinarea valorilor i_{B0} si u_{BE0} (punctul static de functionare la intrare).

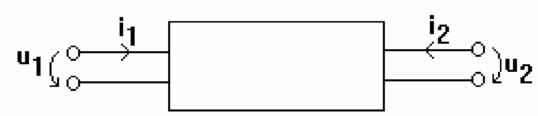


Teorema a doua a lui Kirchhoff pa bucla II ($u_{CE}+R_Ci_C=E_C$) este ecuatia dreptei de sarcina la iesire. La intersectia acestei drepte cu caracteristica de iesire corespunzatoare lui i_{B0} se determina i_{C0} si u_{CE0} (punctul static de functionare la iesire).

2.3.2. Reprezentarea diportilor

2.3.2.1. Diporti liniari

Ecuatiile unui diport liniar fara surse independente sunt ecuatii liniare



$$\left(\sum i_k = 0, \sum u_k = 0, u_k = R_k i_k, e_k = R_{kj} i_k, e_k = \alpha_k u_k, i_{sk} = G_k u_k, i_{sk} = B_{kj} i_j\right)$$

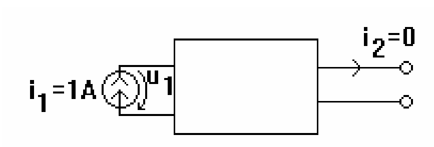
Daca din sistemul format de aceste ecuatii se elimina toate necunoscutele, cu exceptia marimilor u_1, u_2, i_1, i_2, rezulta doua ecuatii liniare care leaga intre ele marimile neeliminate. Daca din aceste ecuatii se pot explicita u_1 si u_2 se obtine:

$$\begin{cases} u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$

Spunem ca aceste ecuatii constituie *reprezentarea controlata in curent* a diportului deoarece tensiunile sunt explicitate ca functii de curenti. Aceasta reprezentare nu exista intotdeauna (vezi paragraful 2.4.3.3.). In forma matriceala reprezentarea controlata in curent se scrie $u=R\cdot i$ unde

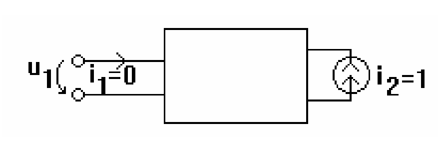
$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Marimile r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, pot fi interpretate astfel:



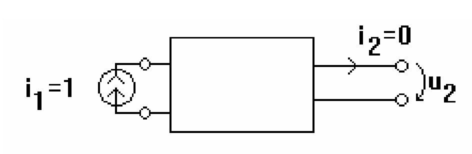
$$r_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = u_1\Big|_{i_2 = 0,\, i_1 = 1}$$

adica r_{11} este rezistenta de intrare in poarta 1 cu poarta 2 in gol.



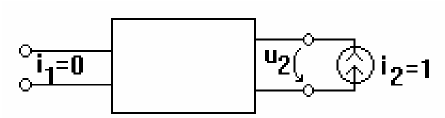
$$r_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = u_1\Big|_{\substack{i_1=0 \\ i_2=1}}$$

adica r_{12} este rezistenta de transfer de la poarta 2 la poarta 1 cu poarta 1 in gol.



$$r_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = u_2\Big|_{\substack{i_2=0 \\ i_1=1}}$$

adica r_{21} este rezistenta de transfer de la poarta 1 la poarta 2 cu poarta 2 in gol.



$$r_{22} = \frac{u_2}{i_2}\bigg|_{i_1=0} = u_2\bigg|_{\substack{i_1=0 \\ i_2=1}}$$

adica r_{22} este rezistenta de intrare in poarta 2 cu poarta 1 in gol.

Daca se expliciteaza curentii ca functii de tensiuni se obtine *reprezentarea controlata in tensiune:*

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{cases}$$

sau i=G·u unde

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

Marimile g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}, se pot interpreta astfel:

$$g_{11} = \frac{i_1}{u_1}\bigg|_{u_2=0}$$

este conductanta de intrare in poarta 1 cu poarta 2 in scurtcircuit.

$$g_{12} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{u_1=0}$$

este conductanta de transfer de la poarta 2 la poarta 1 cu poarta 1 in scurtcircuit.

$$g_{21} = \frac{i_2}{u_1}\bigg|_{u_2=0}$$

este conductanta de transfer de la poarta 1 la poarta 2 cu poarta 2 in scurtcircuit.

$$g_{22} = \frac{i_2}{u_2}\bigg|_{u_1=0}$$

este conductanta de intrare in poarta 2 cu poarta 1 in scurtcircuit.

Exista si *reprezentari hibride* in care se expliciteaza perechi tensiune curent

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H'\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Elementelor matricelor H si H' se pot interpreta similar cu cele ale matricelor R si G. Existenta matricelor G, H, H' este studiata in paragraful 2.4.3.3.

In studiul lanturilor de cuadripoli se folosesc *reprezentarile de transmisie* care utilizeaza in loc de i_2 marimea - i_2.

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

In aceste reprezentari se expliciteaza ambele marimi da la aceeasi poarta. Interpretarea elementelor matricelor T si T' este similara.

2.3.2.2.Diporti neliniari

Reprezentarile diportilor neliniari sunt aceleasi cu ale diportilor liniari. In functie de marimile explicitate exista:

- reprezentarea controlata in curent $u_1=\hat{u}_1(i_1, i_2)$, $u_2=\hat{u}_2(i_1, i_2)$

- reprezentarea controlata in tensiune $i_1=\hat{i}_1(u_1, u_2)$, $i_2=\hat{i}_2(u_1, u_2)$

- reprezentarile hibride: $i_1=\hat{i}_1(u_1, i_2)$, $u_2=\hat{u}_2(u_1, i_2)$ si $u_1=\hat{u}_1(i_1, u_2)$, $i_2=\hat{i}_2(i_1, u_2)$

- reprezentarile de transmisie: $u_2=\hat{u}_2(u_1, i_1)$, $-i_2=-\hat{i}_2(u_1, i_1)$ si $u_1=\hat{u}_1(u_2, -i_2)$, $i_1=\hat{i}_1(u_2, -i_2)$

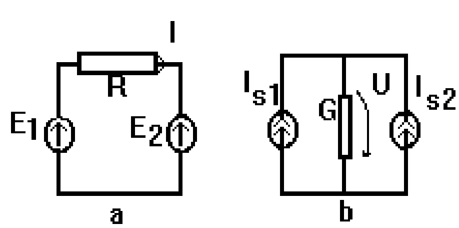
Existenta unei reprezentari este legata de existenta unei solutii unice a circuitului alimentat la porti cu anumite tipuri de surse (vezi paragraful 2.4.3.3.).

2.4 Teoreme ale circuitelor rezistive

2.4.1. Existenta si unicitatea solutiilor

2.4.1.1. Circuite liniare

Se spune ca un circuit rezistiv are solutie unica daca ecuatiile acestuia sunt satisfacute simultan de o multime unica de tensiuni si curenti. Exista circuite simple care nu au soluie sau au un numar infinit de solutii. Circuitul din figura a are o solutie unica $I = \dfrac{E_1 - E_2}{R}$ daca R≠0. Daca R=0



se pot distinge doua situatii:

i) daca E_1-E_2=0 rezulta 0•I=0 si circuitul are o infinitate de solutii (orice $I \in R$)

ii) daca E_1-E_2≠0 rezulta 0•I≠0 si circuitul nu are solutie.

Circuitul din figura b are o solutie unica $U = \frac{I_{s1} + I_{s2}}{G}$ daca G≠0. Daca G=0 se pot distinge doua situatii:

i) daca I_{s1}+I_{s2}=0 rezulta 0•U=0 si circuitul are o infinitate de solutii (orice U∈R)

ii) daca I_{s1}+I_{s2}≠0 rezulta 0•U≠0 si circuitul nu are solutie.

Conditia de existenta si unicitate a solutiei unui sistem liniar de n ecuatii algebrice Ax=B este *detA≠0*. Aceasta conditie exprima faptul ca ecuatiile sistemului sunt liniar independente intre ele. Daca detA=0 exista doua situatii de interes practic:

i) rangul lui A este n-1 si determinantul minorului principal bordat cu coloana termenilor liberi este nul; in acest caz una dintre ecuatii este liniar dependenta de celelalte si sistemul are o infinitate de solutii

ii) rangul lui A este n-1 si determinantul minorului principal bordat cu coloana termenilor liberi este nenul; in acest caz sistemul nu are solutie.

In circuitele simple prezentate mai inainte se observa:

i) in figura a, pentru R=0 avem detA=0 si exista o bucla formata numai din surse de tensiune

ii) in figura b, pentru G=0 avem detA=0 si exista o sectiune formata numai din surse de curent.

Aceste observatii pot fi generalizate pentru orice circuit format din rezistoare dipolare cu R>0 si surse independente, conditiile de existenta si unicitate fiind exprimate in functie de parametrii circuitului.

Teorema Un circuit liniar format din rezistoare dipolare liniare cu R>0 si surse independente are o solutie unica pentru orice valori ale tensiunilor electromotoare si ale curentilor electromotori daca si numai daca sunt satisfacute urmatoarele conditii:

- nu exista nici o bucla formata numai din surse de tensiune
- nu exista nici o sectiune formata numai din surse de curent

Demonstratie: Necesitatea se demonstreaza prin reducere la absurd. Intr-o bucla de surse de tensiune teorema a II-a a lui Kirchhoff da $\sum E_k = 0$. Daca E_k sunt astfel incat $\sum E_k \neq 0$ circuitul nu are solutie. Daca E_k sunt astfel incat $\sum E_k = 0$, atunci prin aceasta bucla poate circula un curent de valoare arbitrara I care satisface ecuatia $0 \cdot I = 0$ si circuitul are o infinitate de solutii. Un rationament similar se poate face pentru o sectiune formata numai din surse de curent.

Suficienta se demonstreaza considerand ca exista doua solutii (care corespund acelorasi valori ale tensiunilor si curentilor electromotori) si aratand ca ele coincid. Fie (u_1, i_1) si (u_2, i_2) cele doua solutii si fie $u_d = u_1 - u_2$ si $i_d = i_1 - i_2$ solutia diferenta care, datorita liniaritatii, satisface ecuatiile circuitului pentru valori nule ale tensiunilor si curentilor electromotori $(E_{dk} = E_k - E_k = 0 \quad si \quad I_{dsk} = I_{sk} - I_{sk} = 0)$. Conform teoremei lui Tellegen $\sum_{\substack{toate\\laturile}} u_{dk} i_{dk} = 0$, dar deoarece pentru surse u_{dk} sau i_{dk} sunt nuli, rezulta $\sum_{\substack{toate\\rezistoarele}} R_k i_{dk}^2 = 0$ deci $i_{dk} = 0$ prin toate rezistoarele si sursele de curent. Inlocuind laturile cu $i_d = 0$ cu rezistoare cu R=∞ raman numai laturile scurtcircuit corespunzatoare surselor de tensiune cu $E_d = 0$. Daca o astfel de sursa de tensiune nu face parte dintr-o bucla de scurtcircuite atunci curentul prin sursa este nul. Deci existenta lui $i_d \neq 0$ implica existenta buclei de surse de tensiune, si in consecinta $i_d = 0$ si prin sursele de tensiune. Similar se demonstreaza ca existenta tensiunilor $u_d \neq 0$ la bornele surselor de current implica existenta sectiunilor formate numai din surse de current, deci $u_d = 0$ si la bornele surselor de current. In consecinta cele doua solutii (u_1, i_1) si (u_2, i_2) coincid deci suficienta este demonstrata. Q.E.D.

Observatii:

i) doua surse de tensiune nu se pot conecta in paralel deoarece formeaza astfel impreuna o bucla;

ii) doua surse de curent nu se pot conecta in serie deoarece formeaza astfel impreuna o sectiune;

iii) conditiile exprimate in functie de parametrii circuitului se pot testa mult mai usor decat conditia generala *detA=0*;

iv) in cazul unui circuit cu surse comandate se poate ca *detA* sa se anuleze pentru anumite valori ale parametrilor de comanda, aceste valori fiind radacinile ecuatiei *detA=0* cu parametrii surselor comandate considerati drept necunoscute; determinarea unor conditii simple, exprimate in functie de parametrii circuitului, pentru existenta si unicitatea solutiei unui astfel de circuit nu este posibila;

v) un circuit liniar are sau o singura solutie, sau nici o solutie, sau o infinitate de solutii.

2.4.1.2. Circuite neliniare

Buclele de surse de tensiune, sectiunile de surse de curent si prezenta surselor comandate influienteaza existenta si unicitatea solutiei unui circuit rezistiv neliniar in mod similar cu a unui circuit liniar. In plus intervin conditii legate de forma caracteristicii rezistorului. Iata cateva exemple.

Circuitul din fig. 1.a. in care dioda Zener are caracteristica din fig. 1.b. nu are solutie asa cum rezulta din fig. 1.c. (caracteristica diodei Zener si cea a sursei de tensiune nu se intersecteaza). Daca se introduce rezistorul de 1KΩ (fig. 1.d.) circuitul are o solutie determinata grafic in fig. 1.e.

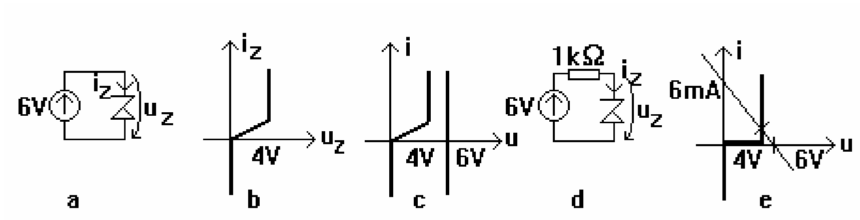


fig.1

Circuitul din fig. 2.a. in care dioda de curent constant are caracteristica din fig. 2.b. nu are solutie asa cum rezulta din fig. 2.c. (caracteristica diodei de curent constant si cea a sursei de curent nu se intersecteaza). Daca se introduce rezistorul de 1KΩ (fig. 2.d.) circuitul are o solutie determinata grafic in fig. 2.e.

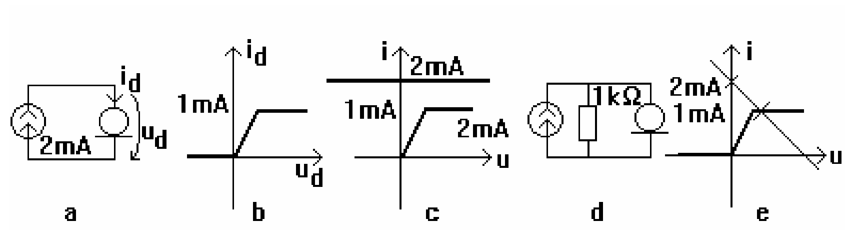


fig.2

Circuitul din fig. 3.a. in care dioda tunel are caracteristica din fig. 3.b. are trei solutii

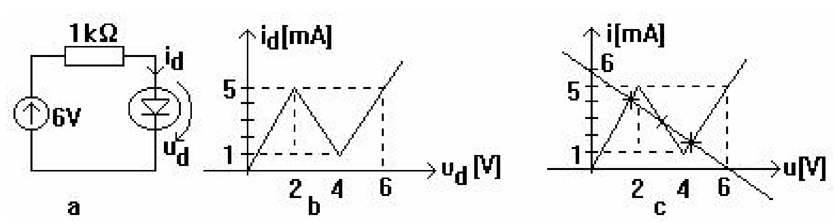


fig.3

determinate grafic in fig.3.c.

Din aceste exemple se remarca trei aspecte:

- existenta unei bucle formate numai din rezistoare controlate in curent care nu sunt controlate si in tensiune (ca in fig.1.a.) poate conduce la inexistenta solutiei; solutia exista daca in acest tip de bucla se introduce un rezistor pentru care $u=\pm\infty \Leftrightarrow i=\pm\infty$ (fig1.d.)

- existenta unei sectiuni formate numai din rezistoare controlate in tensiune care nu sunt controlate si in curent (ca in fig.2.a.) poate conduce la inexistenta solutiei; solutia exista daca in acest tip de sectiune se introduce un rezistor pentru care $u=\pm\infty \Leftrightarrow i=\pm\infty$ (fig.2.d.)
- rezistoarele cu caracteristici nemonotone favorizeaza aparitia solutiilor multiple (fig.3.a.)

Inainte de a formula conditiile de existenta si unicitate a solutiei vom defini anumite tipuri de rezistoare importante in acest context.

Rezistorul crescator are o caracteristica “crescatoare” adica pentru orice doua puncte (u_1, i_1), (u_2, i_2) de pe caracteristica avem $\Delta u \bullet \Delta i = (u_2 - u_1)(i_2 - i_1) \geq 0$. *Rezistorul strict crescator* are $\Delta u \bullet \Delta i > 0$.

Rezistorul de tip U (de la “unbounded” - nemarginit) are o caracteristica cu proprietatile:

-daca este controlat in curent atunci $\lim\limits_{i \to \pm\infty} u(i) = \pm\infty$

-daca este controlat in tensiune atunci $\lim\limits_{u \to \pm\infty} i(u) = \pm\infty$

Rezistorul de tip H (de la “half-unbounded” - semi-nemarginit) are o caracteristica cu proprietatea rezistorului de tip U numai pentru una dintre extremitati (spre $+\infty$ sau spre $-\infty$).

Vom enunta in continuare, fara a le demonstra, o teorema de existenta, o teorema de unicitate si o teorema de unicitate.

Teorema 1(de existenta)

Fie un circuit format din surse independente si rezistoare dipolare pasive controlate in tensiune sau in curent astfel incat variabila de control poate lua orice valoare intre $-\infty$ si $+\infty$. Acest circuit are un numar impar de solutii daca sunt satisfacute urmatoarele conditii:

i) orice bucla formata din rezistoare controlate in curent care nu sunt controlate si in tensiune contine cel putin un rezistor de tip U sau doua rezistoare de tip H orientate diferit in raport cu sensul de parcurgere al buclei,

ii) orice sectiune formata din rezistoare controlate in tensiune care nu sunt controlate si in curent contine cel putin un rezistor de tip U sau doua rezistoare de tip H orientate diferit in raport cu sensul de parcurgere al sectiunii.

Observatii:

i) avand un numar impar de solutii circuitul are cel putin o solutie; de exemplu dioda tunel din circuitul din figura 3 este un resistor pasiv iar circuitul are trei solutii.

ii) restrictia cu privire la bucla formata numai din surse de tensiune din teorema pentru circuitele liniare este un caz particular al conditiei *i* (sursele de tensiune pot fi considerate rezistoare neliniare controlate in curent care nu sunt controlate si in tensiune) *iii*) restrictia cu privire la sectiunea formata numai din surse de curent din teorema pentru circuitele liniare este un caz particular al conditiei *ii* (sursele de curent pot fi considerate rezistoare neliniare controlate in tensiune care nu sunt controlate si in curent).

Conditiile de existenta si unicitate a solutiei unui circuit neliniar cu rezistoare crescatoare pot fi formulate cu referire la existenta si unicitatea unor circuite liniare.

Teorema 2 (de existenta si unicitate).

Fie un circuit N format din surse independente si rezistoare crescatoare controlate in tensiune sau in current astfel incat variabila de control poate lua orice valoare intre $-\infty$ si $+\infty$. Consideram circuitul N' obtinut prin inlocuirea rezistoarelor neliniare cu rezistoare liniare cu rezistentele $R_k > 0$. Daca N' are o solutie si numai una pentru orice valori R_k si in N' exista o pereche arbore-coarbore astfel incat rezistoarelor controlate in current din N le corespund rezistoare din arbore in N' si rezistoarelor controlate in tensiune din N le corespund rezistoare din coarbore in N', atunci N are o solutie si numai una.

Observatii

i) conditiile de existenta si unicitate a solutiei privitoare la sursele independente sunt aceleasi ca la un circuit liniar;

ii) spre deosebire de teorema precedenta, conditiile sunt strict topologice (nu exista conditii legate de forma caracteristicilor rezistoarelor neliniare); ca urmare observam ca un circuit cu rezistoare crescatoare se comporta similar cu un circuit cu rezistoare liniare din punct de vedere al existentei si unicitatii solutiei.

Teorema 3 (de unicitate)

Fie un circuit format din rezistoare dipolare crescatoare controlate in tensiune sau in curent astfel incat variabila de control poate lua orice valoare intre -∞ si +∞. Daca exista, solutia acestui circuit este unica daca sunt satisfacute urmatoarele conditii:

i) orice bucla formata din rezistoare controlate in curent contine cel putin un resistor controlat in tensiune

ii) orice sectiune formata din rezistoare controlate in tensiune contine cel putin un rezistor controlat in current

Observatii:

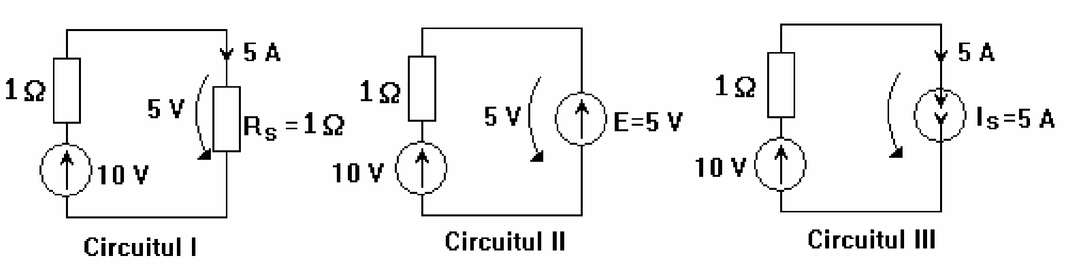
i) restrictiile cu privire la bucla formata numai din surse de tensiune si la sectiunea formata numai din surse de curent sunt cazuri particulare ale conditiilor *i*) si *ii*),

ii) teorema nu asigura existenta solutiei, de exemplu circuitele din fig.1.a. si fig.2.a. satisfac condiriile teoremei dar nu au solutie, *iii*) un rezistor strict crescator poate fi considerat controlat atat in tensiune cat si in current; un circuit format din surse independente si rezistoare strict crescatoare satisface conditiile teoremelor 1, 2 si 3 daca sunt satisfacute restrictiile cu privire la bucla formata numai din surse de tensiune si sectiunea formata numai din surse de current, deci are o solutie si numai una.

2.4.2. Proprietati ale circuitelor neliniare si liniare

2.4.2.1. Teorema substitutiei

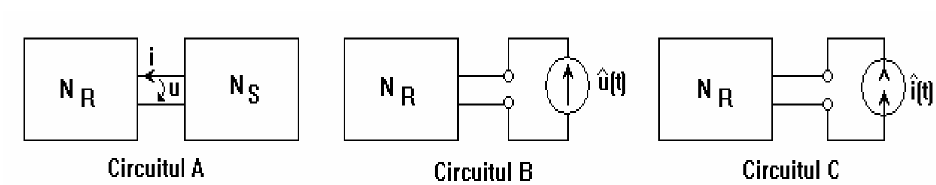
Se observa usor ca daca se substituie rezistorul R_s din circuitul I cu o sursa de tensiune cu



tensiunea la borne egala cu tensiunea rezistorului (circuitul II) celelalte marimi din curent nu se modifica. Acealsi efect se obtine daca se substituie rezistorul R_s cu o sursa independenta de curent cu curentul egal cu curentul rezistorului (circuitul III).

Aceasta proprietate poate fi generalizata imediat pentru orice circuit rezistiv liniar cu solutie unica format din rezistoare dipolare si surse independente. In continuare se formuleaza o teorema pentru circuite resistive neliniare care se poate extinde si la circuitele dinamice.

Teorema Fie un dipol rezistiv N_R conectat cu un dipol N_S, care poate fi un circuit dinamic (Circuitul A). Se pot face urmatoarele substitutii fara a se modifica nici o tensiune si nici un curent



in circuitul N_R:

1. N_S poate fi substituit cu o sursa de tensiune cu tensinea electromotoare $\hat{u}(t)$ ($u = \hat{u}(t)$ este solutia circuitului A) daca sunt indeplinite urmatoarele conditii:

i) circuitul A are o solutie unica $u = \hat{u}(t)$

ii) circuitul B are solutie unica

2. N_S poate fi substituit cu o sursa de curent cu curentul electromotor $\hat{i}(t)$ ($i = \hat{i}(t)$ este solutia circuitului A) daca sunt indeplinite urmatoarele conditii:

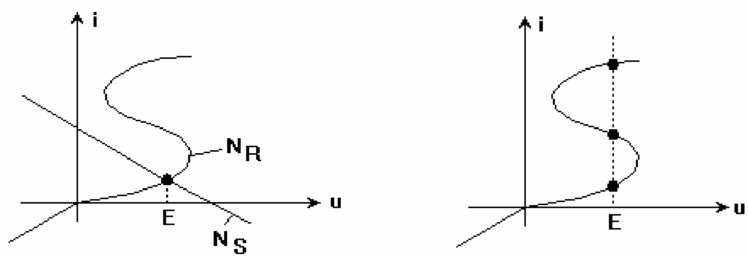
iii) circuitul A are o solutie unica $i = \hat{i}(t)$

iv) circuitul C are solutie unica.

Demonstratie Considerand N_S ca un element de circuit, ecuatiile circuitului A si B sunt aceleasi cu exceptia ecuatiei constitutive a subcircuitului conectat la bornele N_R. Deci inlocuind in ecuatiile circuitului A $f(u,i,t) = 0$ cu $u = \hat{u}(t)$ obtinem ecuatiile circuitului B. Evident o solutie a circuitului B este solutia circuitului A. Cum prin ipoteza circuitul B are o solutie unica rezulta ca prin substitutia facuta nu se modifica nici o tensiune si nici un current din N_R. O demonstratie similara se poate face pentru substituirea lui N_S cu o sursa de curent Q.E.D.

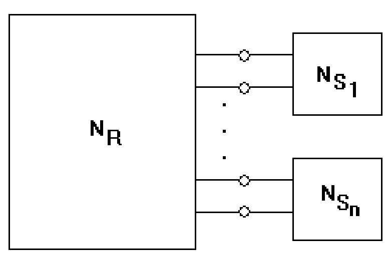
Observatii:

i) Chiar daca circuitul A are solutie unica, daca B nu are solutie unica teorema nu este valabila. Fie, de exemplu, N_R un resistor neliniar controlat in curent si N_S un circuit liniar activ.



Caracteristica lui N_R si dreapta de sarcina corespunzatoare lui N_S se intersecteaza intr-un singur punct deci circuitul A are solutie unica. Inlocuind pe N_S cu sursa de tensiune electromotoare E circuitul B are trei solutii deci teorema nu este valabila.

ii) Teorema se poate extinde pentru un multiport rezistiv N_R la portile caruia sunt conectati dipoli (eventual dinamici si/sau neliniari).

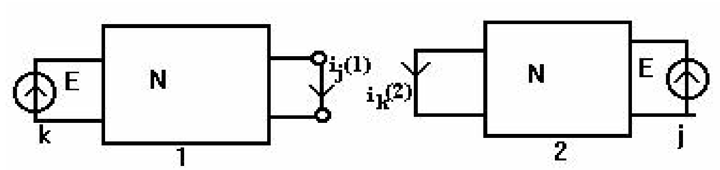


In conditii similare cu cele din enuntul teoremei $N_{S_1},...,N_{S_n}$ se pot inlocui fiecare cu cate o sursa de tensiune sau de curent. Prin aceste substitutii se poate simplifica analiza unui circuit de acest tip.

iii) Teorema se poate extinde si pentru circuitele dinamice cu completarea ca solutia unica corespunde in plus si unei stari initiale date.

2.4.2.2. Teorema reciprocitatii

Teorema Fie un circuit rezistiv liniar N (fig.1) format din rezistoare dipolare cu R>0 si o singura sursa independenta de tensiune in latura k si fie curentul $i^{(1)}_j$ prin latura j. Daca sursa de



tensiune electromotoare E se conecteaza in latura j (fig.2) atunci $i^{(1)}_j = i^{(2)}_k$

Demonstratie: Se scrie teorema lui Tellegen pentru cele doua circuite 1 si 2 care au acelasi graf. Daca curentii $i_k^{(1)}$ satisfac teorema I a lui Kirchhoff in 1 si tensiunile $u_k^{(2)}$ satisfac teorema a II-a a lui Kirchhoff in 2 atunci $\sum_{k=1}^{L} i_k^{(1)} \cdot u_k^{(2)} = 0$ si similar $\sum_{k=1}^{L} i_k^{(2)} \cdot u_k^{(1)} = 0$ sau

$$E \cdot i^{(2)}_k + 0 \cdot i^{(2)}_j + \sum_q u^{(1)}_q \cdot i^{(2)}_q = 0 \qquad (1)$$

$$0 \cdot i^{(1)}_k + E \cdot i^{(1)}_j + \sum_q u^{(2)}_q \cdot i^{(1)}_q = 0 \qquad (2)$$

dar $u^{(1)}{}_q = R_q i^{(1)}{}_q$ si $u^{(2)}{}_q = R_q i^{(2)}{}_q$ si deci $u^{(1)}{}_q i^{(2)}{}_q = R_q i^{(1)}{}_q i^{(2)}{}_q = u^{(2)}{}_q i^{(1)}{}_q$ Daca se scade relatia (1) din relatia (2) se obtine $i^{(1)}_j = i^{(2)}_k$ Q.E.D.

Observatii:

i) se pot demonstra proprietati similare considerand in loc de sursa de tensiune o sursa de curent si in loc de curentul printr-o latura cu R=0 tensiunea la bornele unei laturi cu R=∞

ii) considerand E=1 rezulta simetria conductantelor de transfer ($g_{jk}=g_{kj}$)

iii) considerand in loc de $E=1$ $I_S=1$ rezulta simetria rezistentelor de transfer

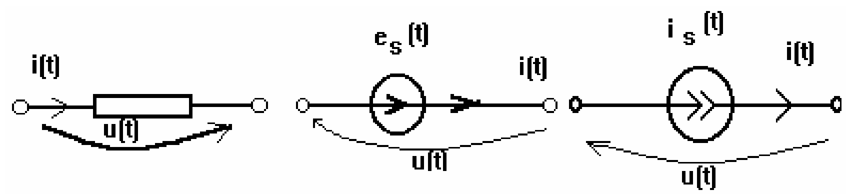
2.4.2.3. Teorema conservarii puterilor

In paragraful 1.6 s-a aratat ca pentru orice circuit suma puterilor debitate de toate sursele este egala cu suma puterilor absorbite de toti consumatorii. Cum intr-un circuit rezistiv consumatorii de putere sunt rezistoare rezulta

Teorema Intr-un circuit rezistiv pentru orice moment de timp puterile se conserva:

$$\sum_{\substack{\text{toate}\\ \text{sursele}}} p_d(t) = \sum_{\substack{\text{toate}\\ \text{rezistoarele}}} p_a(t)\,.$$

Puterea absorbita de un rezistor este p_R=u(t) i(t) unde u(t) si i(t) sunt asociate dupa regula de la



receptoare. Puterea debitata de o sursa de tensiune este $p_E(t)$=u(t) i(t)=$e_s(t)$ i(t) unde u(t) si i(t) sunt asociate dupa regula de la generatoare. Puterea debitata de o sursa de curent este $p_I(t)$=u(t). i(t) =u(t) $I_s(t)$ unde u(t) si i(t) sunt asociate dupa regula de la generatoare.

Observatii:

i) demonstratia fiind facuta pe baza teoremei lui Tellegen, puterile se conserva atat in circuitele liniare cat si in cele neliniare

ii) orice solutie a unui circuit rezistiv satisface teorema conservarii puterilor (bilantul puterilor); in consecinta bilantul puterilor este un instrument de verificare a solutiei problemei analizei unui circuit.

2.4.2.4 Teorema superpozitiei

In orice sistem a carui functionare este descrisa de ecuatii liniare se poate formula o teorema de superpozitie.

Teorema Intr-un circuit liniar cu mai multe surse independente care are o solutie si numai una orice curent sau tensiune x_i asociat laturii i a grafului circuitului se poate calcula ca fiind suma algebrica a curentilor sau tensiunilor $x_i^{(k)}$ produse de fiecare sursa independenta luata separat, atunci cand celelalte surse independente sunt pasivizate:

$$x_i = \sum_k x_i^{(k)}$$

Demonstratie: Circuitul liniar avand un graf cu L laturi este caracterizat de un sistem de 2L ecuatii liniare AX = B, unde: X= [$U_1,...,U_L$, $I_1,....,I_L]^t$ este vectorul necunoscutelor si B este vectorul surselor. Un element al lui B este o suma de E_k sau o suma de I_{sk}. Vectorul B poate fi scris ca o suma de vectori care corespund cate unei surse independente conectate in circuit, celelalte surse independente fiind pasivizate: $B=B_1 + B_2 + ... + B_n$. Daca A este nesingulara, $X = A^{-1} B$.

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ solutiile corespunzatoare vectorilor $B_1, B_2, \ldots, B_n$: $X_1 = A^{-1} B_1$, $X_2 = A^{-1} B_2$, ..., $X_n = A^{-1} B_n$. Rezulta: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = A^{-1}(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = A^{-1} B$ Q.E.D.

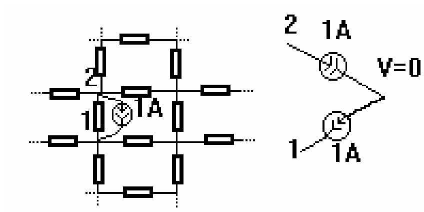
Observatii:

i) sursa de tensiune se pasivizeaza prin inlocuirea cu un rezistor avand R=0 (scurtcircuit),

ii) sursa de curent se pasivizeaza prin inlocuirea cu un rezistor avand R=∞ (gol),

iii) din $X=A^{-1}B$ rezulta ca raspunsul circuitului in momentul de timp t depinde numai de valorile parametrilor surselor independente in acelasi moment t ($e_k(t)$ si $i_{sk}(t)$), deci un circuit rezistiv nu are memorie,

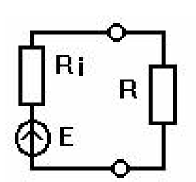
iv) desi in general nu este eficient sa se calculeze raspunsul unui circuit considerand pe rand raspunsul corespunzator fiecarei surse independente, exista situatii in care teorema superpozitiei poate usura efortul de calcul. De exemplu se cere sa se calculeze tensiunea intre nodurile 1 si 2 produsa de sursa de 1A conectata intr-o retea bidimensionala infinita de rezistoare de 1Ω:



Se inlocuieste sursa de 1A cu doua surse conectate ca in figura cu nodul de potential nul de la infinit. Fiecare astfel de sursa produce un curent de 1/4 A in latura 12 (din motive de simetrie ambii curenti se impart in patru parti egale). Ca urmare curentul din latura 12 este 1/4+1/4=1/2 A.

2.4.2.5 Teorema transferului maxim de putere

Se considera o sursa de tensiune cu tensiunea electromotoare E si rezistenta interna R_i, care debiteaza pe un rezistor cu rezistenta R. Se cere valoarea lui R astfel incat rezistorul sa absoarba puterea maxima.



Curentul prin circuit este: $I = \dfrac{E}{R + R_i}$. Puterea debitata de sursa este: $P_{deb} = EI = \dfrac{E^2}{R + R_i}$

Puterea absorbita de rezistor este $P_R = RI^2 = \dfrac{RE^2}{\left(R + R_i\right)^2}$

Ecuatia $\frac{\partial P_R}{\partial R} = \frac{E^2}{\left(R+R_i\right)^2}\left[\left(R+R_i\right)^2 - 2R\left(R+R_i\right)\right] = \frac{E^2}{\left(R+R_i\right)}(R_i - R) = 0$ are solutia pozitiva $R=R_i$.

$R=R_i$ este un punct de maxim deoarece pentru $R<R_i$ $\frac{\partial P_R}{\partial R}>0$ si pentru $R>R_i$ $\frac{\partial P_R}{\partial R}<0$. Am demonstrat deci urmatoarea

Teorema O sursa de tensiune cu parametri E si R_i transfera o putere maxima unui rezistor cu rezistenta R conectat la bornele ei daca $R=R_i$. In acest caz: $P_{deb} = \frac{E^2}{2R^2}$ si $P_R = \frac{E^2}{4R}$ iar randamentul transferului de putere este $\eta = \frac{P_R}{P_{deb}} = 0{,}5$.

Observatii:

i) daca $R\to\infty$, atunci $\eta\to 1$ dar $P_R\to 0$,

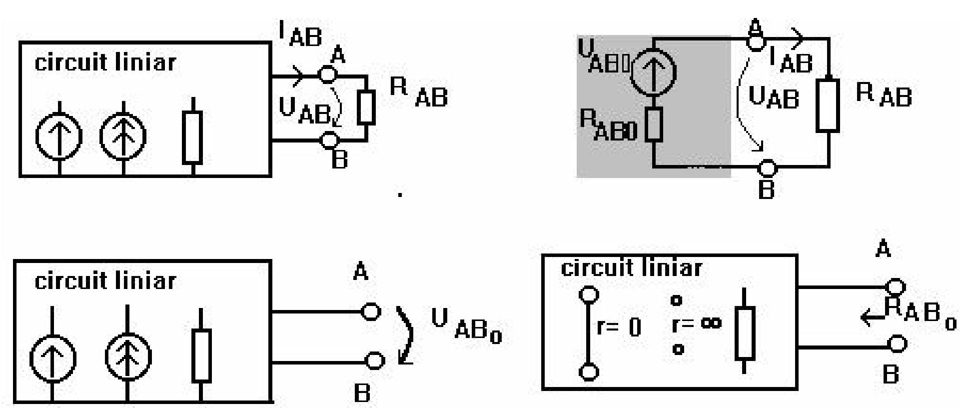
ii) daca in loc de sursa de tensiune avem o sursa de curent cu parametrii I_s si R_i, rezistorul absoarbe puterea maxima tot daca $R=R_i$.

2.4.3. Teoreme de echivalenta ale circuitelor liniare

2.4.3.1. Generatorul echivalent de tensiune al unui dipol

Un dipol rezistiv liniar contine rezistoare liniare, surse independente si surse comandate liniar si are bornele (polii) A si B. Se considera ca doi dipoli rezistivi sunt echivalenti daca au aceeasi comportare la borne descrisa de relatia intre u_{AB} si i_{AB}. Teoremele generatoarelor echivalente determina dipolii cu structura cea mai simpla echivalenti unui dipol dat.

Teorema (Thevenin) Generatorul echivalent de tensiune al unui dipol rezistiv liniar este format dintr-o sursa cu tensiunea electromotoare egala cu tensiunea U_{AB0} intre bornele dipolului la mersul in gol in serie cu rezistenta interna egala cu rezistenta echivalenta R_{AB0} intre bornele dipolului pasivizat.



Demonstratie: Din sistemul de ecuatii algebrice liniare ale circuitului se elimina toate necunoscutele cu exceptia $U_{A\,B}$ si $I_{A\,B}$. Se obtin astfel ecuatiile liniare:

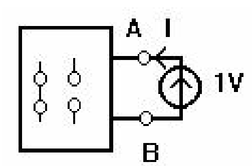
$$U_{AB} = R_{AB}I_{AB}\,,\ \ aU_{AB} + bI_{AB} = c \qquad \text{(A)}$$

unde a, b, c sunt constante in raport cu U_{AB} si I_{AB} . Daca a≠0 rezulta: $U_{AB} + \frac{b}{a}I_{AB} = \frac{c}{a}$.

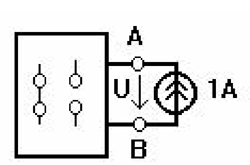
Daca $I_{AB} = 0$ (mersul in gol la bornele AB) atunci $U_{AB} = U_{AB0} = \frac{c}{a}$ (tensiunea intre A si B la mersul in gol). Ecuatia devine: $U_{AB} + \frac{b}{a}I_{AB} = U_{AB0}$

Daca circuitul este pasivizat (fiecare sursa independenta de tensiune se inlocuieste cu un rezistor cu R=0 si fiecare sursa de curent se inlocuieste cu un rezistor cu R=∞, iar sursele comandate raman nemodificate), atunci U_{AB0}=0 si $\frac{U_{AB}}{-I_{AB}} = R_{AB0} = \frac{b}{a}$ unde R_{AB0} este rezistenta echivalenta intre bornele A si B a circuitului pasivizat (rezistenta de intrare intre bornele A si B). Rezulta $U_{AB}+ R_{AB0}I_{AB} =U_{AB0}$, care este ecuatia de functionare a circuitului echivalent din enuntul teoremei. Q.E.D.

Daca circuitul pasivizat este format din rezistoare conectate in serie si in parallel, R_{AB0} se determina foarte simplu aplicand formulele din paragraful 2.3.1.1. Daca acest circuit nu este serie-paralel si/sau contine surse comandate, pentru calculul lui R_{AB0} se aplica intre A si B o tensiune de

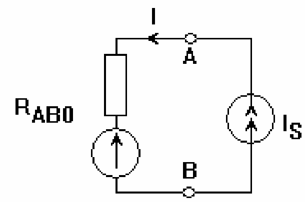


1V, se calculeaza curentul corespunzator I cu o metoda oarecare si $R_{AB0} = \frac{1}{I}$, sau se aplica un curent de 1 A si se calculeaza tensiunea corespunzatoare U si $R_{AB0} = \frac{U}{1}$



Observatii:

i) demonstratia se bazeaza pe ipoteza a≠0 deci generatorul echivalent de tensiune exista daca R_{AB0} are o valoare finita; o conditie echivalenta cu aceasta este existenta unei solutii unice pentru dipolul la ale carui borne este conectata o sursa independenta de curent cu valoare I_s arbitrara, intr-adevar daca $R_{AB0} < \infty$ acest circuit are o solutie unica $I = I_S$ pentru orice I_S si



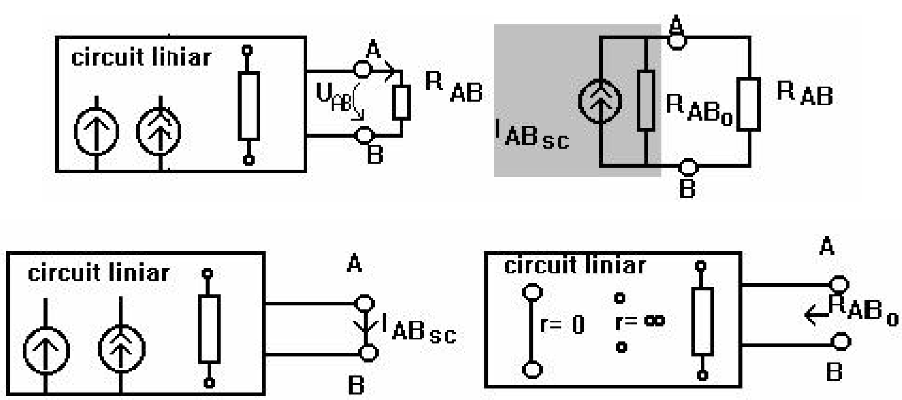
reciproc ca acest circuit sa aiba o solutie unica pentru orice $I = I_S \neq 0$ trebuie ca $R_{AB0} < \infty$.

ii) ecuatia de functionare a circuitului echivalent a fost obtinuta fara a utiliza dependenta intre U_{AB} si I_{AB} pentru circuitul conectat la bornele dipolului (considerat pentru simplitate un rezistor liniar cu rezistenta R_{AB}); rezulta ca parametrii generatorului echivalent de tensiune raman aceiasi pentru orice circuit liniar sau neliniar conectat intre bornele dipolului liniar,

iii) din observatia *ii*) rezulta ca un circuit care contine un singur rezistor dipolar neliniar se poate rezolva ca in paragraful 2.3.1.2.2. utilizand generatorul echivalent de tensiune al partii liniare.

2.4.3.2. Generatorul echivalent de curent al unui dipol

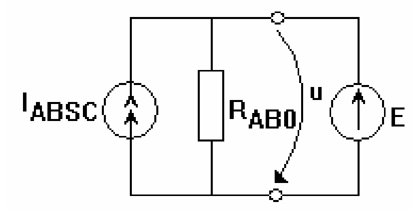
Teorema (Norton) Generatorul echivalent de curent al unui dipol rezistiv liniar este format dintr-o sursa cu curentul electromotor egal cu curentul I_{ABsc} de scurtcircuit al dipolului in parallel cu rezistenta interna egala cu rezistenta echivalenta R_{AB0} intre bornele dipolului pasivizat.



Demonstratia este similara cu cea a teoremei generatorului echivalent de tensiune.

Observatii:

*i)*demonstratia se bazeaza pe ipoteza b≠0 (din ecuatia A) deci generatorul echivalent de current exista daca R_{AB0} are o valoare nenula; o conditie echivalenta cu aceasta este existenta unei solutii unice pentru dipolul la ale carui borne este conectata o sursa independenta de tensiune cu valoare E

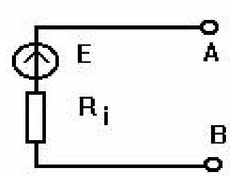


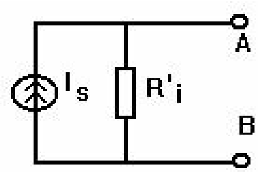
arbitrara; intr-adevar daca $R_{AB0} > 0$ acest circuit are o solutie unica $u = E$ pentru orice E si reciproc ca acest circuit sa aiba o solutie unica pentru orice $E \neq 0$ trebuie ca $R_{AB0} > 0$.

ii) ecuatia de functionare a circuitului echivalent a fost obtinuta fara a utiliza dependenta intre U_{AB} si I_{AB} pentru circuitul conectat la bornele dipolului (considerat pentru simplitate un rezistor liniar cu rezistenta R_{AB}); rezulta ca parametrii generatorului echivalent de curent raman aceiasi pentru orice circuit liniar sau neliniar conectat intre bornele dipolului liniar,

iii) din observatia *ii*) rezulta ca un circuit care contine un singur rezistor dipolar neliniar se poate rezolva ca in paragraful 2.3.1.2.2. utilizand generatorul echivalent de curent al partii liniare.

Aplicatie: echivalenta intre o sursa reala de tensiune si o sursa reala de curent.

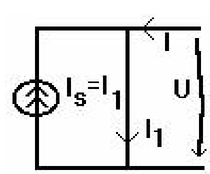




Sursele reale de tensiune si curent sunt formate din surse ideale si rezistente interne R_i, R'_i pozitive si de valoare finita. Aplicand teorema generatorului echivalent de curent sursei reale de tensiune rezulta $R'_i=R_i$ si $I_S = \frac{E}{R_i}$. Daca $R_i=0$ sursa de tensiune nu se poate transforma in sursa de curent (rezulta $I_s=\infty$), iar daca $R'_i= \infty$ sursa de curent nu se poate transforma in sursa de tensiune (rezulta $E=\infty$).

Generatoarele echivalente nu exista pentru orice circuit. Iata cateva exemple.

-circuitul



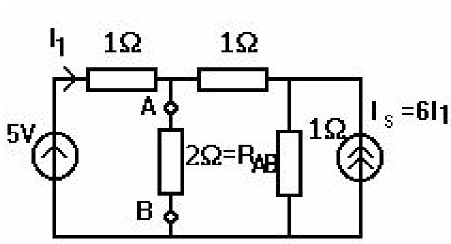
are la borne U=0 si I=0 deci are R_{AB0}=0/0 si nu admite nici unul dintre generatoarele echivalente; acest circuit admite ca pereche tesiune curent numai {U=0, I=0} si se numeste nulator.

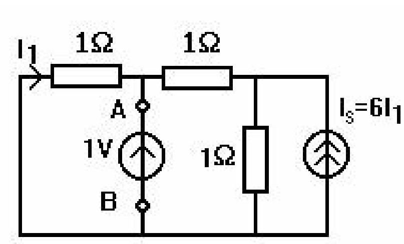
-daca R_{AB0}=0 exista numai generatorul echivalent de tensiune format din sursa ideala de tensiune U_{AB0} si care nu poate fi transformata intr-un generator de curent.

-daca $R_{AB0}=\infty$ exista numai generatorul echivalent de curent, format din sursa ideala de curent I_{ABSC} si care nu poate fi transformata intr-un generator de tensiune.

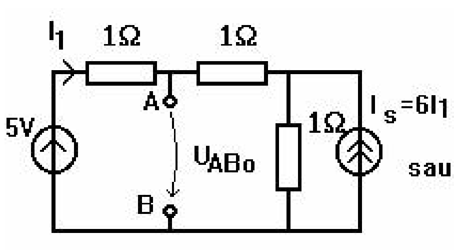
Pentru a evita calculul inutil al U_{AB0} sau I_{ABSC} este preferabil sa se calculeze mai intai R_{AB0}. Daca $R_{AB0}=0$ se calculeaza apoi U_{AB0} iar daca $R_{AB0}=\infty$ se calculeaza I_{ABSC}. Daca $0<R_{AB0}<\infty$ se poate calcula U_{AB0} sau I_{ABSC}.

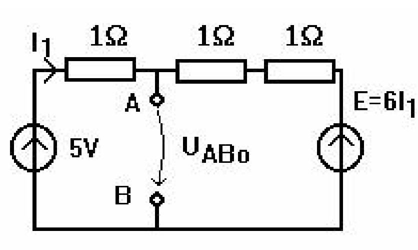
Exemplu: sa se calculeze elementele unui generator echivalent pentru circuitul din figura în raport cu





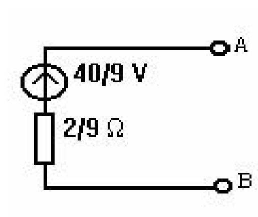
bornele A si B ($R_{AB}=2\Omega$). R_{AB0} se calculeaza pentr circuitul pasivizat. $R_{AB0}=1/I$, rezulta I_1 =-1A, I_2=7/2A, I=9/2A si R_{AB0} =2/9Ω. Calculul lui U_{AB0} se face in circuitul:





rezulta $3I_1=5-6I_1$, $I_1=5/9$ si $U_{AB0}=5-5/9=40/9$V.

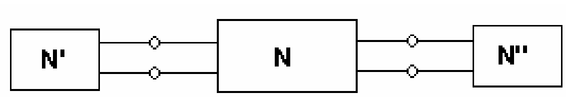
Deci generatorul echivalent este:



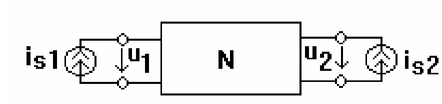
si curentul prin rezistorul de 2Ω se poate calcula astfel: $I_{AB}=\dfrac{40/9}{2/9+2}=2A$

2.4.3.3. Schemele echivalente ale diportilor

Fie diportul liniar N la portile caruia sunt conectati uniportii N' si N", in general neliniari.

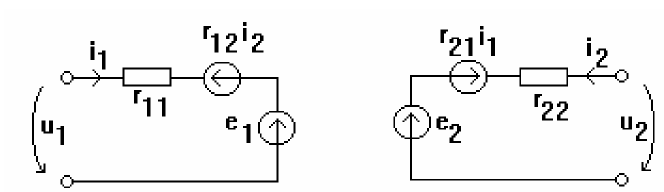


Presupumen ca sunt satisfacute conditiile de valabilitate a teoremei substitutiei adica circuitul format din N, N' si N" are solutie unica si circuitul

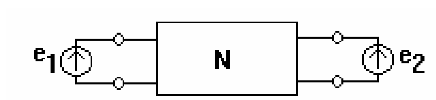


are o solutie si numai una pentru orice valori i_{s1}, i_{s2} ale parametrilor surselor independente conectate la porti. Aceasta solutie contine si pe u_1 si u_2. Rezulta ca u_1 si u_2 pot fi explicitate ca functii de i_{s1}, i_{s2}, sursele independente din N si ceilalti parametri ai circuitului N.

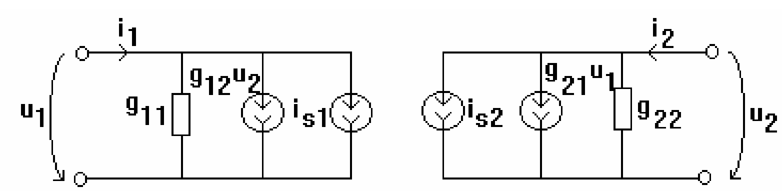
Din paragraful 2.3.2.1. se stie ca daca sursele independente din N sunt pasivizate atunci $u_1=r_{11}i_1+r_{12}i_2$ si $u_2=r_{21}i_1+r_{22}\,i_2$ unde $i_1=i_{s1}$, $i_2=i_{s2}$. Daca se considera si sursele independente din N, N fiind liniar, conform teoremei superpozitiei avem: $u_1=r_{11}i_1+r_{12}i_2+e_1$, $u_2=r_{21}i_1+r_{22}i_2+e_2$ unde e_1 si e_2 reprezinta contributiile surselor independente din N. Aceste relatii corespund urmatoarei scheme echivalente:



Similar se poate arata ca daca circuitul liniar N are o solutie si numai una pentru orice e_1 si e_2

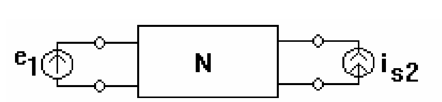


atunci exista urmatoarea schema echivalenta a lui N.

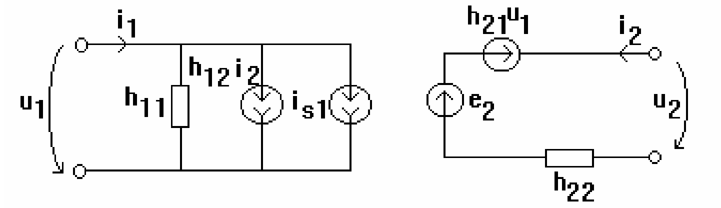


care corespunde relatiilor $i_1=g_{11}u_1+g_{12}u_2+i_{s1}$, $i_2=g_{21}u_1+g_{22}u_2+i_{s2}$

Daca circuitul liniar N are o solutie si numai una



pentru orice valori e_1 si i_{s2} atunci exista schema echivalenta



corespunzatoare relatiilor $i_1=h_{11}u_1+h_{12}i_2+i_{s1}$, $u_2=h_{21}u_1+h_{22}i_2+e_2$.

Observatii:

i) un circuit oarecare poate avea toate aceste scheme echivalente sau numai unele dintre ele,

ii) schemele echivalente ale aceluiasi circuit sunt echivalente intre ele,

iii) aceste scheme au un numar minim de elemente si se utilizeaza cand este nevoie de un circuit echivalent cat mai simplu.

2.5. Analiza circuitelor rezistive

2.5.1. Introducere

Cu notatiile din paragraful 1.4 ecuatiile unui circuit rezistiv al carui graf are N noduri si L laturi sunt:

$\sum_{k\in bucla\ fundamentala} u_k = 0$ (L-N+1ecuatii date de teorema a II-a a lui Kirchhoff)

$\sum_{k\in sectiune\ fundamentala} i_k = 0$ (N-1 ecuatii date de teorema I a lui Kirchhoff)

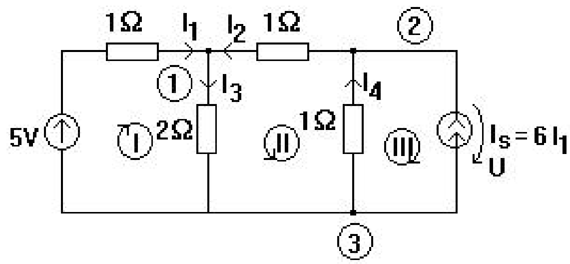
$f_k(u_k, i_k) = 0,$ (L ecuatii constitutive ale rezistoarelor si surselor independente)

deci in total 2L ecuatii.

Problema analizei unui circuit rezistiv (formulata in paragraful 2.2) se rezolva cu urmatorul algoritm:

1. Se aleg sensuri arbitrare pentru curentii din laturi
2. Se determina sensul tensiunii la bornele fiecarei laturi prin asociere cu sensul curentului dupa regula de la generatoare (pentru surse) sau dupa regula de la receptoare (pentru rezistoare)
3. Se scriu ecuatiile circuitului
4. Se rezolva ecuatiile circuitului
5. Se face verificarea solutiei cu bilantul puterilor

Exemplu Sa se faca analiza circuitului din figura si sa se verifice solutia cu bilantul puterilor



Necunoscutele sunt I_1, I_2, I_3, I_4, U. N=3 si se scrie teorema I a lui Kirchhoff in nodurile 1 si 2: $I_1 + I_2 - I_3 = 0,\ 6I_1 - I_2 + I_4 = 0.$

L=5, deci numarul buclelor independente este L-N+1=3. Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe buclele I, II, III cu sensurile de parcurgere din figura:

$$1 \cdot I_1 + 2 \cdot I_3 = 5, \quad 1 \cdot I_2 + 2 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4 = 0, \quad U + 1 \cdot I_4 = 0.$$

Rezolvand sistemul de cinci ecuatii cu cinci necunoscute rezulta:

$$I_1 = 1A,\ I_2 = 1A,\ I_3 = 2A,\ I_4 = -5A,\ U = 5V.$$

$$\sum P_{deb} = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 35W$$

$$\sum P_{abs} = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 5^2 = 35W.$$

Daca circuitul este rezolvat de un operator uman este evident ca scrierea de la inceput a unui numar mai mic de ecuatii usureaza foarte mult calculul. Exista doua procedee care realizeaza acest deziderat: metoda potentialelor nodurilor si metoda curentilor ciclici. Considerand drept necunoscute potentialele a N-1 noduri (V_N=0) se pot scrie ecuatiile prezentate in paragraful 2.5.2. Considerand drept necunoscute curentii fictivi care circula prin L-N+1 bucle fundamentale (curentii ciclici) se pot scrie ecuatiile prezentate in paragraful 2.5.3. Ecuatiile potentialelor nodurilor se pot scrie pentru circuite liniare si pentru circuite cu elemente neliniare controlate in tensiune. Ecuatiile curentilor ciclici se pot scrie numai pentru circuite liniare. Tinand seama si de faptul ca daca gradul de complexitate al circuitului trece de o anumita limita (numarul mediu de laturi conectate la un nod este mai mare decat patru) avem N-1 < L-N+1 rezulta ca metoda potentialelor nodurilor este mai utila decat metoda curentilor ciclici.

Chiar daca circuitul este liniar, daca numarul necunoscutelor creste peste o anumita limita analiza nu se poate face decat cu un program de calcul numeric. Daca circuitul este neliniar de regula nu exista solutie analitica deci calculul numeric este indispensabil. Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuatii algebrice liniare (eliminarea Gauss, descompunerea LU, metoda iterativa Gauss-Seidel etc.) nu se preteaza la interpretari utile in termenii parametrilor circuitului. Spre deosebire de acestea, utilizarea metodelor de rezolvare a sistemelor de ecuatii algebrice neliniare poate fi inteleasa mult mai usor facand apel la circuitul caruia ii corespund ecuatiile; acesta este subiectul paragrafului 2.5.4.

La prima vedere reducerea numarului de necunoscute (prin metoda potentialelor nodurilor sau prin metoda curentilor ciclici) ar fi un avantaj si pentru calculele numerice. Matricea sistemului de ecuatii ale unui circuit liniar este rara (are putine elemente diferite de zero). Aplicand procedee de rezolvare specifice matricelor rare s-a constatat ca timpul de calcul este aproximativ acelasi daca se folosesc ecuatiile lui Kirchhoff sau ecuatiile potentialelor nodurilor. Matricea ecuatiilor lui Kirchoff fiind de dimensiuni mai mari dar mai rara decat matricea conductantelor nodurilor, iar metoda de matrice rare lucrand numai cu elementele nenule ale matricei, numarul de operatii este aproxiamtiv acelasi pentru cele doua metode.

2.5.2. Scrierea ecuatiilor potentialelor nodurilor

2.5.2.1. Circuite liniare

Fie un circuit care contine rezistoare liniare dipolare, rezistoare liniare multipolare avand o reprezentare controlata in tensiune si surse independente de curent.

Pentru inceput se considera circuitul pasivizat. Fie *i* vectorul curentilor si fie *u* vectorul tensiunilor laturilor grafului acestui circuit. Toate elementele au o reprezentare controlata in tensiune, deci se poate scrie $i_l = G_l \cdot u$ unde G_l este matricea conductantelor laturilor. Daca *A* este matricea de incidenta laturi-noduri teorema I a lui Kirchhoff se scrie $A\cdot i = 0$ sau $AG_l{\cdot}u=0$.

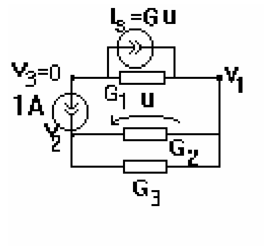
In circuitul initial, care contine si sursele independente de curent, teorema I a lui Kirchhoff se scrie $Ai = i_s$ unde i_s este un vector ale carui componente sunt sume ale curentilor surselor independente conectate la fiecare nod. Rezulta $A{\cdot}G_l{\cdot}u=i_s$ si deoarece $u=A^t{\cdot}V$ (V fiind vectorul potentialelor primelor *n-1* noduri iar $V_n=0$) rezulta $A{\cdot}G_l{\cdot}A^t{\cdot}V = i_s$ sau notand matricea conductantelor nodurilor cu $G_{n-1}=AG_l\,A^t$ rezulta

$$G_{n-1}{\cdot}V=i_s$$

care este ecuatia potentialelor nodurilor.

Aceasta forma matriceala a ecuatiei potentialelor nodurilor este utila in demonstrarea unor proprietati. De exemplu, sa aratam ca pentru un circuit in care toate rezistoarele sunt dipolare si liniare G_{n-1} este simetrica, adica $g_{ij} = g_{ji}$. Avem $g_{ij} = \langle (a_{i1}...a_{iL}), (b_{1j} ... b_{Lj})\rangle$ unde $a_{i1} ... a_{iL}$ sunt elementele liniei *i* a matricei *A* (*L* - numarul laturilor rezistive din circuit), $b_{1j} ... b_{Lj}$ sunt elementele coloanei *j* din matricea $G_l{\cdot}A^t$ iar <(a),(b)> este produsul scalar intre vectorii ***a*** si *b.* G_l fiind diagonala $(b_{1j} ... b_{Lj})=(G_1\, a_{j1}... G_L a_{jL})$. Similar $g_{ji} = \langle (a_{j1} ...a_{jL}), (b_{1i} ... b_{Li})\rangle$ si deoarece $(b_{1i} ... b_{Li}) = (G_1 a_{i1} ... G_L a_{iL})$ rezulta $g_{ij} = g_{ji}$.

Atat pentru scrierea ecuatiilor de catre un operator uman, cat si pentru construirea matricei G_{n-1} intr-un program de calcul, se pot stabili reguli mult mai simple decat utilizarea formei matriceale prezentate anterior. Sa consideram un exemplu simplu pentru care vom scrie teorema I a lui Kirchhoff. Alegem $V_3=0$.



In nodul de potential V_1: $(V_1 - V_2)G_2 + (V_1 - V_2)G_3 + (V_1 - V_3)G_1 = G(V_1 - V_2)$

In nodul de potential V_2: $(V_2 - V_1)G_2 + (V_2 - V_1)G_3 = +1$. Sau

$$\begin{cases} V_1(G_1 + G_2 + G_3 - G) - V_2(G_1 + G_2 - G) = 0 \\ -V_1(G_2 + G_3) + V_2(G_2 + G_3) = +1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

Trecand in membrul drept termenul produs de sursa comandata ecuatiile devin:

$$\begin{cases} V_1(G_1 + G_2 + G_3) - V_2(G_1 + G_2) = G(V_1 - V_2) \\ -V_1(G_2 + G_3) + V_2(G_2 + G_3) = +1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

Se poate imediat deduce o regula simpla de *scriere prin inspectie* (de catre un operator uman) a ecuatiilor potentialelor nodurilor. Ecuatia in nodul *j* este de forma:

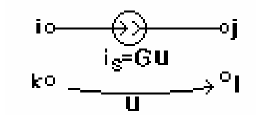
$$V_j \sum_{k \in j} G_k - \sum_{k \in i,j} V_i G_k = \sum_{k \in j} I_{sk}$$

unde prima suma contine toate conductantele conectate in nodul *j*, a doua suma contine toate produsele $V_i\, G_k$ unde G_k este conectata intre nodurile *j* si *i* iar suma din membrul drept contine toti curentii surselor (independente sau comandate) conectate la nodul *j* (luati cu semnul + daca intra in nodul *j* si cu semnul - daca ies din acesta).

Se observa ca o conductanta *G* conectata intre nodurile *i* si *j* apare in matricea G_{n-1} in patru pozitii cu semnele:

coloana / *linie*	*i*	*j*
i	+	−
j	−	+

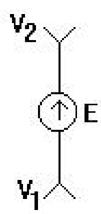
Similar se poate observa ca o conductanta de transfer a unei surse comandate ca in figura apare in G_{n-1} tot in patru pozitii cu semnele din tabel.

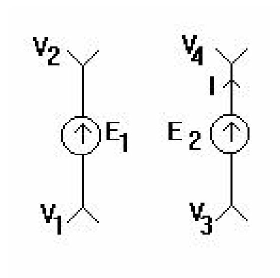


coloana / linie	k	l
i	+	−
j	−	+

Pentru un program de calcul este mult mai simplu sa introduca fiecare conductanta proprie sau de transfer in cele patru pozitii precizate de aceste reguli decat sa construiasca matricele A si G_l si sa opereze cu acestea.

Pana acum am considerat ca circuitul nu contine surse ideale de tensiune (sau daca le-a avut ele au fost transformate in surse ideale de curent). Exista insa si surse de tensiune care nu se pot transforma in surse de curent. Daca circuitul contine doar o singura sursa de acest tip atunci se alege V_1 =0 si rezulta V_2 =E (nu se mai scrie teorema I a lui Kirchhoff in nodul de potential V_2).

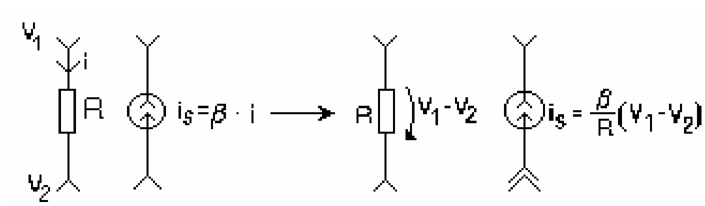




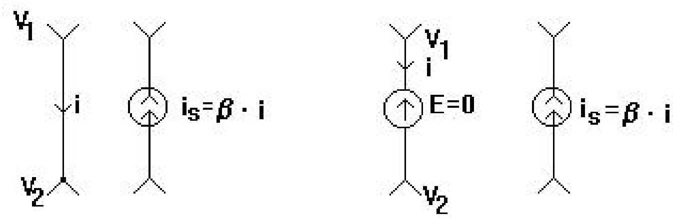
Evident, daca exista mai multe surse de acest tip care au un nod comun sau care formeaza un “mini-arbore” [8] nodul de potential nul va apartine acestei structuri iar potentialele celorlalte noduri ale structurii respective se pot exprima ca sume de tensiuni electromotoare. Daca circuitul contine doua astfel de surse care nu au un nod comun se alege V_1=0, rezulta V_2=E si se introduce o necunoscuta suplimentara *I*. Cand se scriu ecuatiile in nodurile de potentiale V_3 si V_4 latura cu E_2 se considera parcursa de curentul *I*. Acestei necunoscute suplimentare ii corespunde ecuatia suplimentara

V_4-V_3=E_2.

Pana acum am considerat ca avem doar surse comandate in tensiune. Comanda in curent se poate transforma in comanda in tensiune:



Daca aceasta transformare nu este posibila (ca in figura de mai jos) se considera o sursa cu *E=0* in latura de comanda si se procedeaza ca in cazul sursei ideale de tensiune (in ecuatiile nodurilor de potentiale V_1 si V_2 latura de comanda apare prin -*i* si +*i* si se adauga ecuatia V_1=V_2).



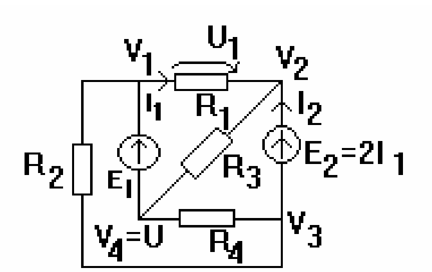
Deci algoritmul de scriere a ecuatiilor potentialelor nodurilor este:

- se fac toate transformarile posibile ale surselor de tensiune in surse de curent si ale comenzilor in curent in comenzi in tensiune
- se alege potentialul de referinta astfel incat cat mai multe potentiale ale nodurilor sa poata fi exprimate ca sume de tensiuni electromotoare
- considerand si necunoscutele suplimentare (curentii unor surse de tensiune conectate intre alte noduri decat cele de la punctul precedent si curenti de comanda) se scrie sistemul de ecuatii:

$$V_j \sum_{k \in j} G_k - \sum_{k \in i,j} V_i G_k = \sum_{k \in j} I_{sk}$$

la care se adauga ecuatiile suplimentare de forma $\mathrm{V_l - V_m = E_\alpha}$

Exemplu:



$$\begin{cases} V_4 = 0 \\ V_1 = E_1 \\ V_2\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}\right) - V_1 \dfrac{1}{R_1} = I \\ V_3\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}\right) - V_1 \dfrac{1}{R_2} = -I \\ V_2 - V_3 = 2\dfrac{V_1 - V_2}{R_1} \end{cases}$$

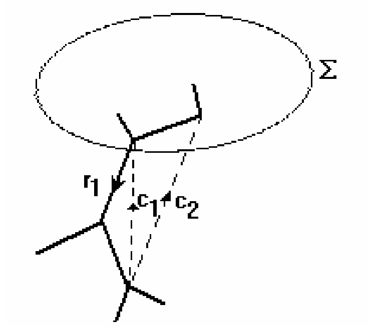
Dupa ce s-au determinat potentialele nodurilor se pot calcula tensiunile ca diferente ale potentialelor si apoi curentii.

2.5.2.2. Circuite neliniare

Fie un circuit cu rezistoare controlate in tensiune si surse independente de curent. Scriind ecuatiile rezistoarelor $i=g(u)$, teorema I a lui Kirchhoff $A \cdot i=0$ si teorema a II-a a lui Kirchhoff $u=A^tV$ rezulta ecuatiile potentialelor nodurilor $A \cdot g(A^tV)=i_s$. Sursele de tensiune care nu se pot transforma in surse de curent si comenzile in curent se trateaza similar cu circuitele liniare.

2.5.3. Scrierea ecuatiilor curentilor ciclici

Fie un circuit liniar format din rezistoare dipolare, rezistoare multipolare avand o reprezentare controlata in curent si surse ideale de tensiune. In aceasta metoda se considera ca necunoscute curentii coardelor. O bucla fundamentala este formata dintr-o coarda si ramurile care inchid calea intre nodurile coardei; numarul acestor bucle este L-N+1. Scriem teorema I a lui Kirchhoff pe Σ. Σ taie ramura r_1 si coardele $c_1, c_2, ...$ in ale caror bucle fundamentale este r_1.



Rezulta ca curentul din r_1 este o suma algebrica a curentilor din $c_1, c_2, ...$. Consideram ca curentul fiecarei coarde parcurge toate laturile buclei fundamentale respective (este un current ciclic). Rezulta ca orice current este sau un current ciclic (daca este curentul unei coarde) sau o suma algebrica de curenti ciclici (daca este curentul unei ramuri).

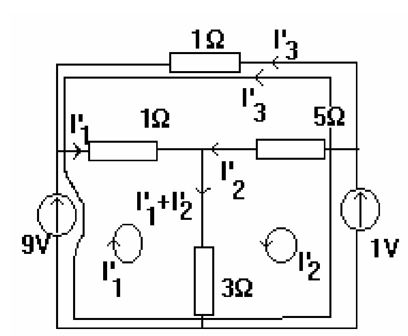
Plecand de la un exemplu simplu se poate deduce o regula de scriere prin inspectie a ecuatiilor curentilor ciclici. Fie circuitul din figura in care curentii ciclici sunt I'_1, I'_2 si I'_3.

Scriem teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile parcurse de curentii ciclici:

pentru ochiul parcurs de I'_1: $1(I'_1)+3(I'_1+I'_2)=9$

pentru ochiul parcurs de I'_2: $5(I'_2)+3(I'_2+I'_1)=1$

pentru ochiul parcurs de I'_3: $1I'_3= -9+1$



sau $I'_1\,(1+3)+I'_2\,3=9$, $I'_2\,(5+3)+I'_1\,3=1$, $I'_3\,(1)= -8$.

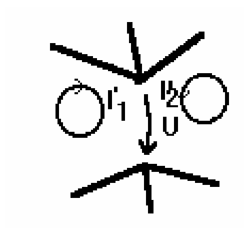
Este usor de observat ca ecuatia corespunzatoare buclei B_i parcurse de curentul ciclic I'_i este de forma:

$$I'_i \sum_{k\in B_i} R_k + \sum_{\substack{k\in B_i \\ k\in B_j}} I'_j R_k = \sum_{k\in B_i} E_k$$

unde produsul $I'_j R_k$ se ia cu semnul (+) daca I'_i si I'_j au acelasi sens prin R_k si cu semnul (-) daca I'_i si I'_j au sensuri diferite prin R_k.

Daca circuitul contine si surse de curent acestea pot fi transformate in surse de tensiune daca au cate un rezistor in paralel. Presupunem ca toate laturile care contin surse de curent care nu se pot transforma in surse de tensiune sunt plasate in coarbore. In acest caz curentul ciclic al buclei fundamentale care contine sursa de curent este chiar curentul acestei surse deci ecuatia corespunzatoare este simpla: $I_{bk} = I_{sk}$.

Pentru a avea mai putine necunoscute este preferabil sa se transforme comenzile in tensiune in comenzi in curent. Daca tensiunea de comanda u_c este la bornele unui rezistor de rezistenta R atunci transformarea comenzii se face simplu $i_c=u_c./R$. Evident i_c se exprima usor ca o suma de curenti ciclici. Daca tensiunea de comanda u_c este la bornele unui rezistor corespunzator mersului in gol



atunci bucla se sparge in doua bucle care au latura comuna cu R=∞; necunoscuta suplimentara u apare in ecuatiile corespunzatoare celor doua bucle si se introduce o ecuatie in plus si anume $I'_1+I'_2=0$.

Deci algoritmul de scriere a ecuatiilor curentilor ciclici este:

- se fac toate transformarile posibile ale surselor de curent in surse de tensiune si ale comenzilor in tensiune in comenzi in curent
- se aleg cele B=L-N + 1 bucle fundamentale astfel incat sursele de curent netransformate sa fie plasate in coarbore
- considerand ca aceste bucle sunt parcurse de niste curenti fictivi $I'_1, I'_2, \ldots, I'_B$ (curentii ciclici), se aleg sensurile acestora si se scrie sistemul de ecuatii:

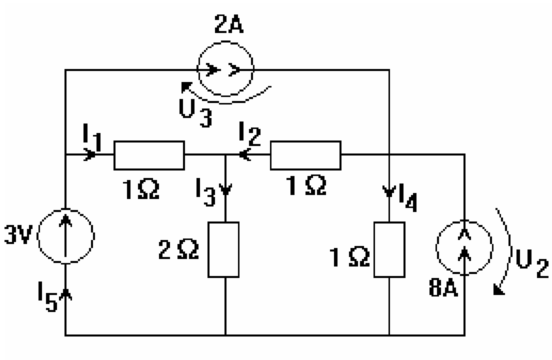
$$I'_i \sum_{k\in B_i} R_k + \sum_{\substack{k\in B_i \\ k\in B_j}} I'_j R_k = \sum_{k\in B_i} E_k \text{ sau } I'_i = I_{si}$$

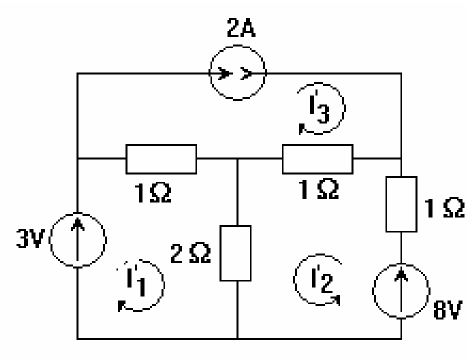
la care se adauga ecuatiile suplimentare.

Exemplu: Fie circuitul din figura a. Dupa transformarea sursei de curent in sursa de tensiune se obtine circuitul din figura b. Curentii ciclici sunt: I'_1, I'_2 si I'_3. Ecuatiile sunt:

$I'_1\ (1+2)+I'_2\ 2 - I'_3\ 1= 3,\ \ I'_2\ (1+2+1) + I'_1\ 2+ I'_3\ 1=8,\ I'_3\ =2A$

Rezulta $I'_1=1A$, $I'_2 =1A$, $I'_3 =2A$ si $I_1=I_1' - I'_3 =-1A$ si $I_2 =I'_2\ + I'_3=3A$, $I_3=I'_1+I'_2\ =2A$





a b

$I_4 =8+2-I_2=7A,\ \ U_3\ =I_2 1 - I_1 1=4V,\ \ I_5\ =I_1\ +2 = 1A,\ U_2\ =1\ I_4\ = 7V$

2.5.4. Rezolvarea circuitelor neliniare

2.5.4.1. Determinarea unei solutii prin metoda Newton-Raphson

Fie un sistem de ecuatii algebrice neliniare $f(x)=0$ unde x este vectorul necunoscutelor. Relatia care defineste metoda iterativa Newton-Raphson se obtine dezvoltand pe f in serie Taylor in jurul lui $x^{(j)}$ (x la iteratia j):

$$f\left(x^{(j+1)}\right) = f\left(x^{(j)}\right) + J\left(x^{(j)}\right)\left(x^{(j+1)} - x^{(j)}\right) + \dots$$

unde matricea $J(x^{(j)})=\left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ . & . & . \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=x^{(j)}}$

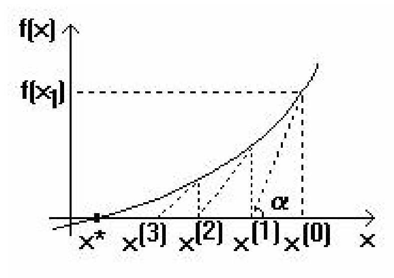
se numeste Jacobianul sistemului si se calculeaza in punctul $x^{(j)}$. Impunand conditia ca $x^{(j+1)}$ sa fie solutie a ecuatiei $f(x)=0$ si neglijand termenii de ordin superior din dezvoltarea in serie Taylor se obtine relatia de recurenta a metodei iterative Newton-Raphson:

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - J^{-1}(x^{(j)})f(x^{(j)}).$$

Algoritmul pleaca de la o aproximatie initiala $x^{(0)}$ si efectueaza un numar fix de iteratii N_0. Daca eroarea intre doua iteratii succesive $\left\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\right\|$ este mai mica decat o eroare impusa ε se considera ca metoda este convergenta iar solutia este $x^{(N)}$ ($\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$). Daca dupa N_0 iteratii eroarea nu scade sub valoarea ε se considera ca metoda este divergenta.

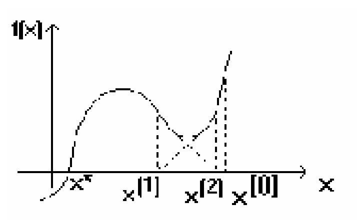
Daca f(x)=0 are mai multe solutii, prin aceasta metoda se determina numai una dintre ele si anume cea care este mai "apropiata" de aproximatia initiala $x^{(0)}$.

Daca x are o singura componenta metoda Newton-Raphson are o interpretare geometrica simpla. Fie f(x) avand reprezentarea grafica din figura de mai jos si fie $x^{(0)}$ aproximatia initiala. Valoarea $x^{(1)}$ se obtine prin $x^{(1)} = x^{(0)} - f'^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)})$ adica, deoarece

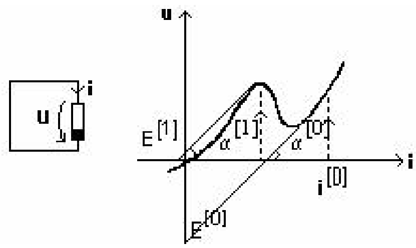


$tg\alpha = f'(x^{(0)}) = \dfrac{f(x^{(0)})}{x^{(0)} - x^{(1)}}$, $x^{(1)}$ se poate determina intersectand tangenta la *f(x)* in $x^{(0)}$ cu axa Ox. In continuare se obtin $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ si solutia numerica tinde catre solutia exacta x*.

Metoda Newton-Raphson nu este convergenta pentru orice aproximatie initiala. De exemplu, fie f(x) din figura de mai jos si aproximatia initiala $x^{(0)}$. Aplicand aceasta metoda solutia numerica va oscila intre valorile $x^{(1)}$ si $x^{(2)}$ si nu se va apropia de solutia exacta *x**.

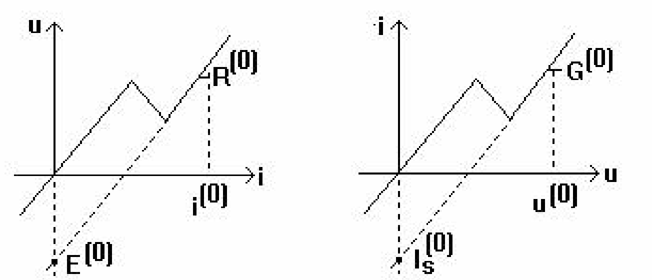


Se observa ca daca se scrie relatia de recurenta sub forma $J(x^{(j)}) \cdot x^{(j+1)} = J(x^{(j)})x^{(j)} - f(x^{(j)})$ este evident ca la fiecarer iteratie se rezolva un sistem de ecuatii liniare a carui matrice $J(x^{(j)})$ si termen liber $J(x^{(j)})x^{(j)} - f(x^{(j)})$ trebuie recalculate. Calculul Jacobianului implica determinarea a n^2 valori ale derivatelor in $x^{(j)}$ ceea ce nu este deloc simplu. Pentru un circuit rezistiv liniar exista, insa, o procedura mult mai simpla de efectuare a iteratiilor. Consideram la inceput un exemplu:



La fiecare iteratie rezistorul neliniar poate fi inlocuit cu un circuit echivalent serie format dintr-o sursa de tensiune in serie cu un rezistor. La prima iteratie sursa are tensiunea electromotoare $E^{(0)}$ si rezistorul are rezistenta $R^{(0)}$=tg $\alpha^{(0)}$. Pentru a doua iteratie avem $E^{(1)}$ si $R^{(1)}=tg\ \alpha^{(1)}$ etc. Acest circuit se numeste circuitul echivalent discret. La fiecare iteratie se calculeaza parametrii circuitului echivalent discret si se rezolva un circuit liniar.

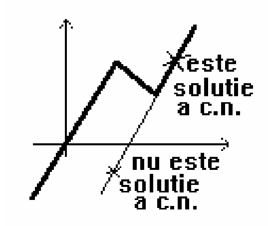
Aceasta procedura se poate aplica unui circuit rezistiv neliniar oricat de complicat ar fi acesta. Circuitul echivalent discret la iteratia *k+1* al unui rezistor controlat in curent cu caracteristica $u=\hat{u}(i)$ contine rezistorul cu rezistenta $R^{(k)}=\frac{\partial u}{\partial i}\Big|_{i^{(k)}}$ in serie cu sursa de tensiune $E^{(k)}$ obtinuta ca in exemplul precedent. Pentru un rezistor controlat in tensiune cu caracteristica $i=\hat{i}(u)$ circuitul echivalent discret are parametrii $G^{(k)}=\frac{\partial i}{\partial u}\Big|_{u^{(k)}}$ si $I_s^{(k)}$. Daca rezistorul are caracteristici liniare pe portiuni, parametrii circuitului echivalent discret se determina ca in figura:



Prin utilizarea circuitului echivalent discret aplicarea metodei Newton-Raphson se simplifica considerabil.

2.5.4.2. Determinarea tuturor solutiilor

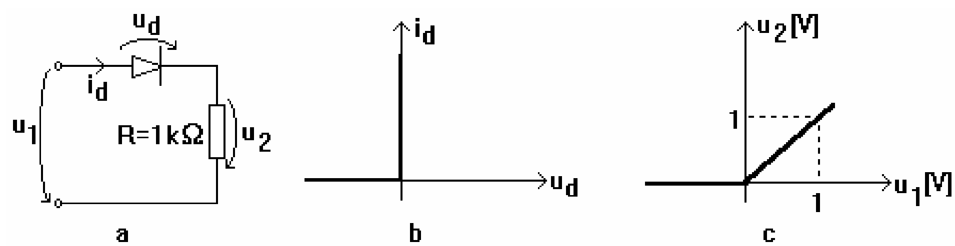
Consideram un circuit cu rezistoare dipolare avand caracteristici liniare pe portiuni. Fiecare solutie a circuitului corespunde unei combinatii de portiuni liniare ale rezistoarelor. Se face analiza circuitelor echivalente discrete corespunzand tuturor combinatiilor posibile de portiuni liniare. Fiecare circuit echivalent discret are o solutie. Daca exista cel putin un rezistor neliniar pentru care solutia



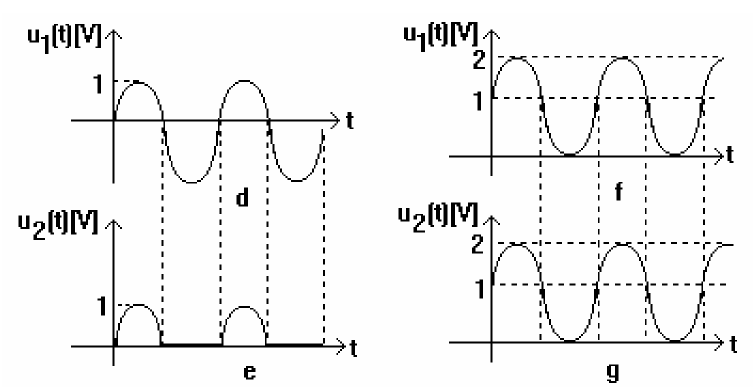
circuitului echivalent discret corespunde unui punct de pe prelungirea portiunii liniare a caracteristicii, atunci aceasta solutie nu este solutie a circuitului neliniar. Solutia unui circuit echivalent discret este solutie a circuitului neliniar daca toate punctele care ii corespund se afla in intervalele de tensiuni si curenti de pe caracteristicile rezistoarelor neliniare.

2.5.4.3. Circuite care functioneaza la semnale mici

Fie circuitul redresor monoalternanta fara filtru din figura a unde caracteristica diodei este data in figura b si caracteristica de transfer in tensiune, determinata ca in paragraful 2.3.1.2.1, este

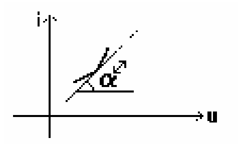


desenata in figura c. Daca $u_1(t) = \sin\omega t$ (fig. d) atunci *$u_2(t)$* va avea forma din figura e.



In acest caz semnalul de iesire are o forma diferita fata de cel de intrare datorita neliniaritatii caracteristicii de transfer. Daca $u_1(t) = 1 + \sin\omega t$ (fig. f) atunci semnalul de iesire este sinusoidal (fig. g) ca si cel de intrare. Spunem ca *un circuit rezistiv neliniar* cu o singura sursa de semnal (cu e sau i_s variabil in timp) *functioneaza la semnale mici daca orice raspuns are forma semnalului de intrare.* In cazul in care un singur raspuns nu are aceeasi forma cu semnalul de intrare spunem ca *circuitul functioneaza la semnale mari*. Pentru un circuit dat functionarea la semnale mari sau mici depinde de parametrii semnalului de intrare.

Un rezistor neliniar dipolar functioneaza la semnale mici daca putem aproxima deplasarea punctului de functionare pe caracteristica cu deplasarea pe tangenta in punctul static de functionare. Rezistorul controlat in tensiune din figura de mai jos cu caracteristica *i=g(u)* se comporta din punct



de vedere al semnalului (variatiile de tensiune si curent in jurul punctului static de functionare) ca un rezistor liniar cu conductanta $G = \left.\frac{dg(u)}{du}\right|_{p.s.f.} = tg\,\alpha$ care se numeste conductanta echivalenta de semnal mic si depinde de punctul static de functionare. Pentru un rezistor controlat in curent cu caracteristica u=f(i) se defineste rezistenta echivalenta de semnal mic $R = \left.\frac{d\ f(i)}{di}\right|_{p.s.f.}$.

Fie un tranzistor modelat ca rezistor multipolar cu caracteristicile: $u_{BE} = \hat{u}_{BE}(i_B, u_{CE}), i_C = \hat{i}_C(i_B, u_{CE})$. Pentru a determina parametrii circuitului echivalent de semnal mic se dezvolta $\hat{u}_{BE}$ si $\hat{i}_C$ in serie Taylor in jurul p.s.f. (determinat de $u_{BE0}, i_{B0}, i_{C0}, u_{CE0}$). Fiecare tensiune si curent are o componenta constanta (corespunzatoare p.s.f. si notata cu indicele 0) si o componenta variabila in timp (de semnal), adica:

$u_{BE} = u_{BE0} + u_{be}, i_B = i_{B0} + i_b, i_C = i_{C0} + i_c, u_{CE} = u_{CE0} + u_{ce}$. Rezulta:

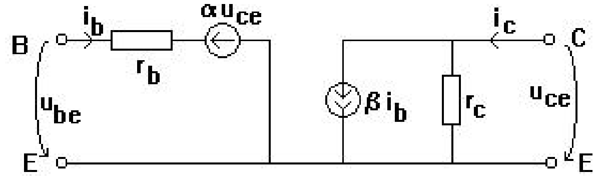
$$u_{BE} = u_{BE0} + \left.\frac{\partial \hat{u}_{BE}}{\partial i_B}\right|_{p.s.f.} \cdot i_b + \left.\frac{\partial \hat{u}_{BE}}{\partial u_{CE}}\right|_{p.s.f.} u_{ce}$$

$$i_C = i_{C0} + \left.\frac{\partial \hat{i}_C}{\partial i_B}\right|_{p.s.f.} i_b + \left.\frac{\partial \hat{i}_C}{\partial u_{CE}}\right|_{p.s.f.} u_{ce}$$

$$sau \quad u_{be} = r_b i_b + \alpha u_{ce}, i_c = \beta \cdot i_b + \frac{u_{ce}}{r_c} \quad unde$$

$$r_b = \left.\frac{\partial \hat{u}_{BE}}{\partial i_B}\right|_{p.s.f.}, \alpha = \left.\frac{\partial \hat{u}_{BE}}{\partial u_{CE}}\right|_{p.s.f.}, \beta = \left.\frac{\partial \hat{i}_C}{\partial i_B}\right|_{p.s.f.}, r_c = \frac{1}{\left.\frac{\partial \hat{i}_C}{\partial u_{CE}}\right|_{p.s.f.}}$$

Rezulta circuitul echivalent de semnal mic:



Acest circuit poate fi utilizat daca punctul de functionare se deplaseaza intr-o zona din planul fiecarei caracteristici pentru care parametrii r_b, α, β, r_c pot fi considerati constanti. In aceeasi maniera se poate determina un circuit echivalent de semnal mic pentru orice rezistor neliniar.

Analiza unui circuit care functioneaza la semnale mici se poate face pe un circuit echivalent liniar conform algoritmului:

1. Se determina punctul static de functionare considerand circuitul excitat de sursele de curent continuu (surse independente cu parametrii constanti in timp), sursele de semnal fiind pasivizate.
2. Se determina circuitul echivalent de semnal mic asociat p.s.f. determinat la punctul 1 pentru fiecare rezistor neliniar.
3. Se face analiza circuitului echivalent de semnal mic obtinut prin interconectarea circuitelor echivalente de semnal mic si a rezistoarelor liniare. Acest circuit este excitat numai de sursele de semnal, sursele de curent continuu fiind pasivizate. Solutia obtinuta este componenta variabila in timp a raspunsului circuitului.
4. Se verifica daca conditiile de functionare la semnal mic sunt satisfacute pentru toate rezistoarele neliniare. Daca exista un singur rezistor neliniar pentru care aceste conditii nu sunt indeplinite rezultatul analizei de la punctul 3 este incorect.