



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI



Instrumente Structurale
2007-2013



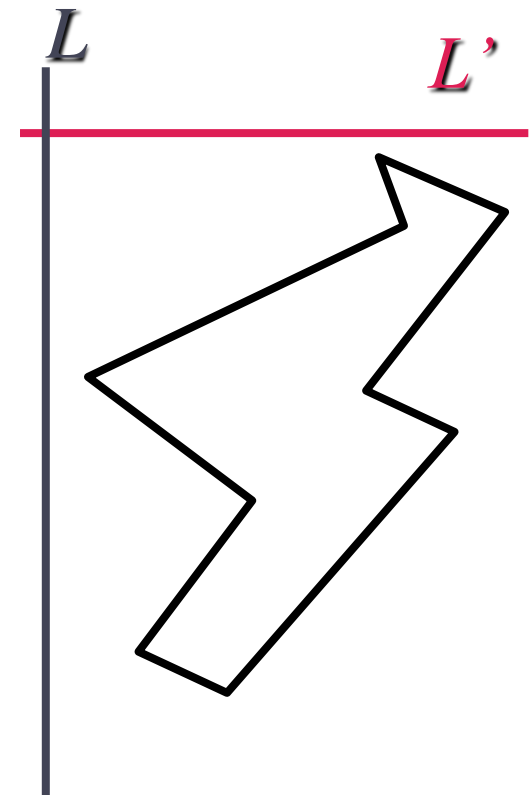
Platformă de e-learning și curriculum e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computacionala

7. Poligoane monotone

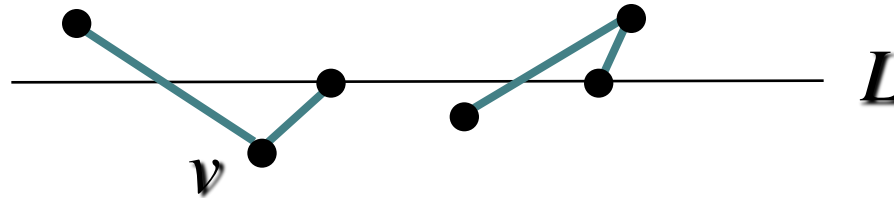
Poligoane monotone: definitie

- Un lant poligonal este *strict monoton* in raport cu o dreapta L daca orice dreapta L' perpendiculara pe L intersecteaza lantul in cel mult un punct.
 - non-strict \rightarrow intersectia poate fi si un segment
 - Parcurgerea varfurilor lantului proiectata pe L este un sir monoton
- Poligon este *monoton* in raport cu o dreapta L daca poate fi descompus in doua lanturi monotone in raport cu L care au un varf comun in capete.
- Un poligon monoton in raport cu axa Ox sau Oy se numeste *x/y -monoton*.



Proprietatile poligoanelor monotone

Definitie: un varf v este un punct de intoarcere interior daca si numai daca este un varf concav ale carui varfuri adiacente sunt deasupra, dedesubt, sau pe dreapta L .



Teorema: Daca un poligon P nu are puncte de intoarcere interioare in raport cu dreapta L , atunci este monoton in raport cu L .

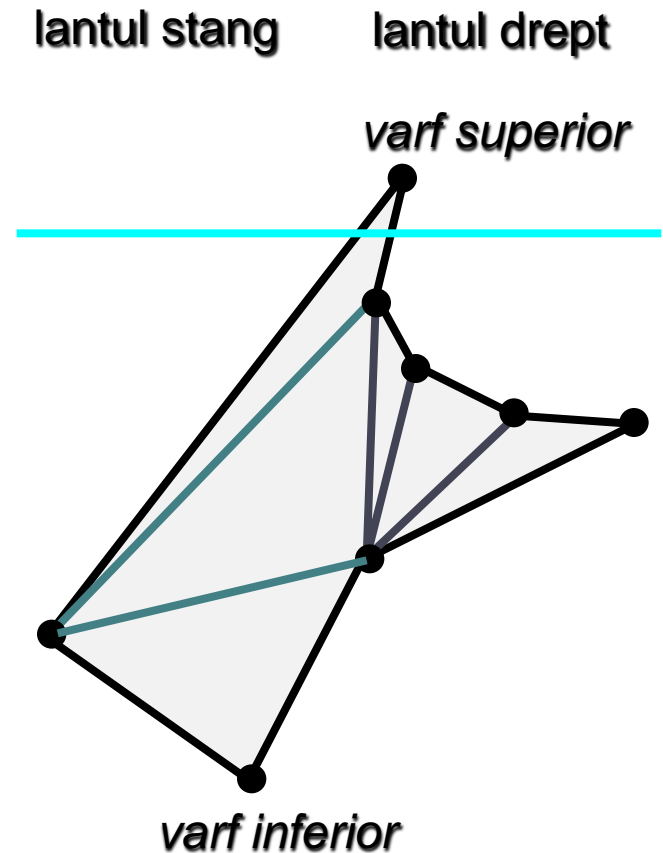
Demonstratie: se partitioneaza P in doua lanturi ce leaga varfurile superioare si inferioare. Se presupune ca unul din ele nu este monoton in raport cu L . Atunci P trebuie sa contina un punct de intoarcere interior deasupra sau dedesubt.

Triangularea unui poligon y -monoton (1)

- Se foloseste o linie de cautare orizontala care baleiaza pe axa verticala
- Se efectueaza o triangulare de tip *greedy* a tuturor punctelor deasupra liniei de cautare, si apoi se elimina acea regiune.
 - Intr-un anumit varf v , regiunea superioara neexplorata are intotdeauna o structura simpla: doua lanturi y -monotone (la stanga si la dreapta), fiecare continand cel putin o muchie. Daca un lant contine doua sau mai multe muchii, acesta este concav, iar celalalt lant contine o singura muchie a carui punct final inferior nu a fost inca explorat.
- Fiecare diagonala este adaugata in $O(1)$.

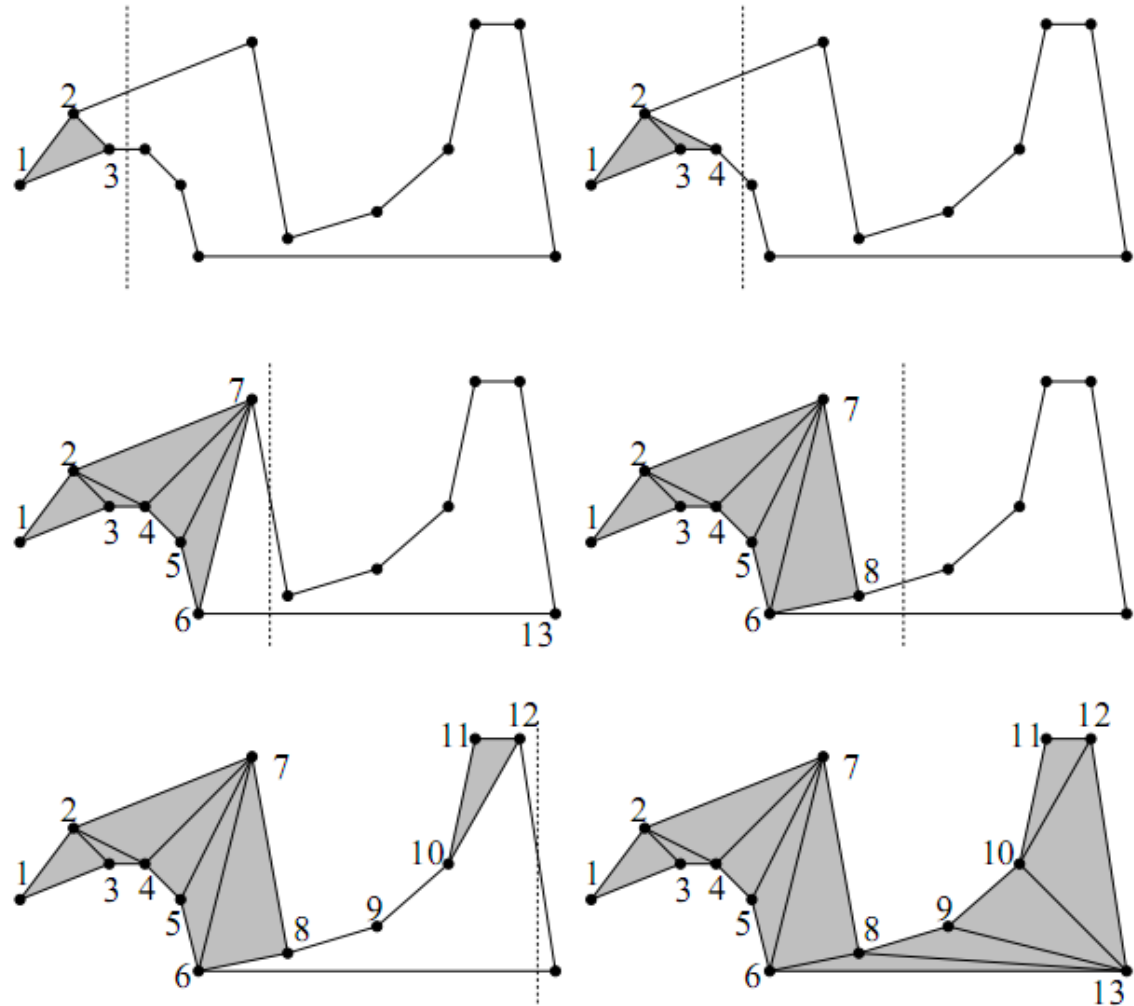
Triangularea unui poligon y-monoton (2)

- Se continua cautarea atat timp cat un lant contine o singura muchie, iar cealalta muchie este concava.
- La aparitia unei muchii convexe in lantul concav (sau o a doua muchie apare in celalalt lant), se trianguleaza cat mai mult posibil folosind un model de *evantai*.
- Complexitate in timp: $O(k)$
 - $k = \text{nr varfuri poligon}$.



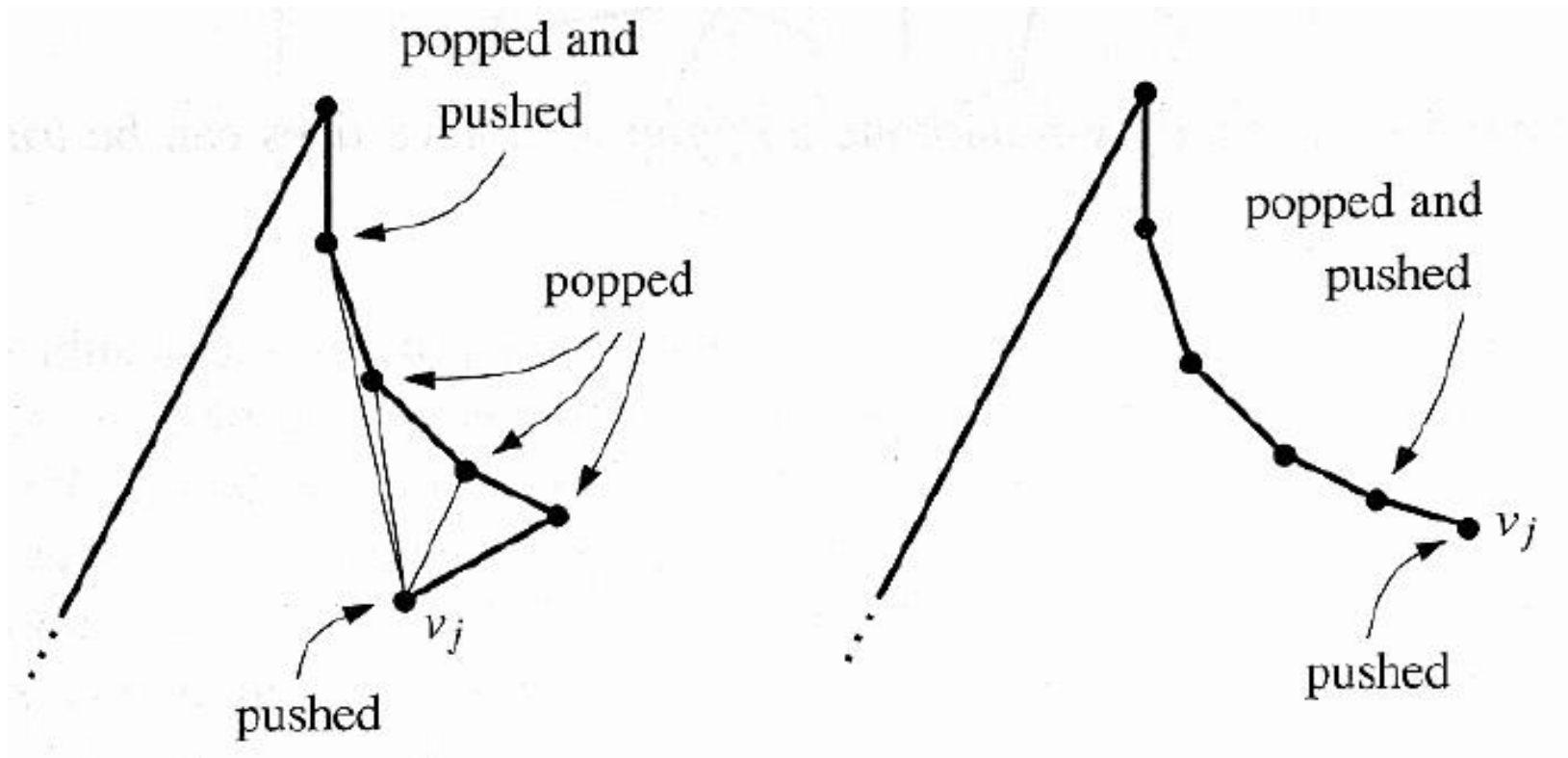
Triangularea unui poligon y-monoton (3)

- Exemplu



Triangularea unui poligon y-monoton (4)

- Operatii pe stivele cu lanturi



Algorithm TRIANGULATEMONOTONEPOLYGON(\mathcal{P})

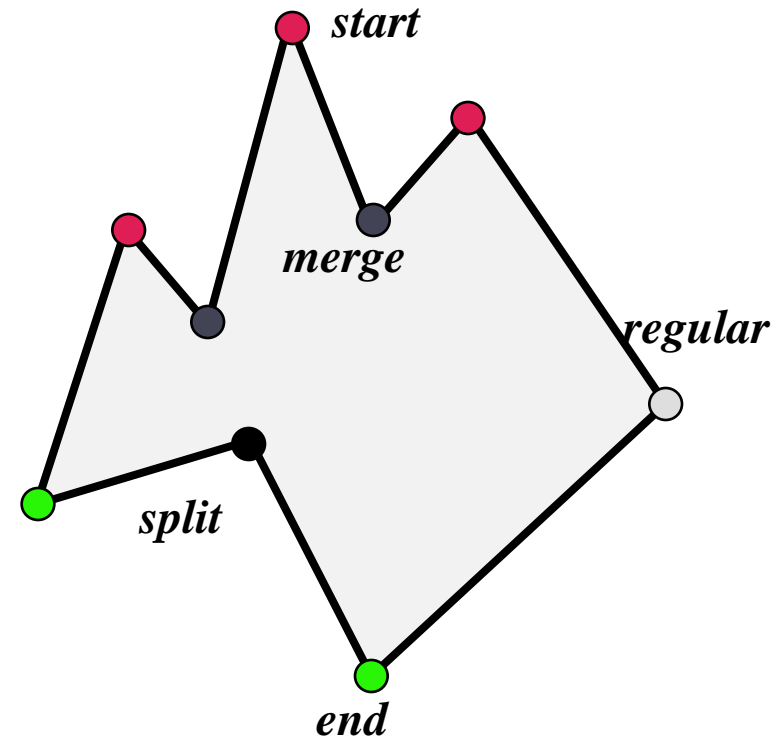
Input. A strictly y -monotone polygon \mathcal{P} stored in a doubly-connected edge list \mathcal{D} .

Output. A triangulation of \mathcal{P} stored in the doubly-connected edge list \mathcal{D} .

1. Merge the vertices on the left chain and the vertices on the right chain of \mathcal{P} into one sequence, sorted on decreasing y -coordinate. If two vertices have the same y -coordinate, then the leftmost one comes first. Let u_1, \dots, u_n denote the sorted sequence.
2. Push u_1 and u_2 onto the stack \mathcal{S} .
3. **for** $j \leftarrow 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** u_j and the vertex on top of \mathcal{S} are on different chains
5. **then** Pop all vertices from \mathcal{S} .
6. Insert into \mathcal{D} a diagonal from u_j to each popped vertex, except the last one.
7. Push u_{j-1} and u_j onto \mathcal{S} .
8. **else** Pop one vertex from \mathcal{S} .
9. Pop the other vertices from \mathcal{S} as long as the diagonals from u_j to them are inside \mathcal{P} . Insert these diagonals into \mathcal{D} . Push the last vertex that has been popped back onto \mathcal{S} .
10. Push u_j onto \mathcal{S} .
11. Add diagonals from u_n to all stack vertices except the first and the last one

Clasificarea varfurilor unui poligon monoton

- **start** (respectiv **final/end**): un varf al carui unghi interior este mai mic decat π , iar cele doua varfuri invecinate se afla dedesubt (respectiv deasupra) sa.
- **despartire/split** (respectiv **unire/merge**): un varf al carui unghi interior este mai mare decat π , iar cele doua varfuri invecinate si afla dedesubt (respectiv deasupra) sa.
- Toate celelalte varfuri sunt **normale/regular**.



Proprietati ale poligoanelor y-monotone

Teorema: Un poligon ce nu contine varfuri de *despartire* sau de *unire* este y-monoton.

Demonstratie: Daca exista doar varfuri de start, final sau normale, poligonul este format din doua lanturi y-monotone.

- Pentru a partitiona un poligon in componente monotone se elimina varfurile de despartire/unire si se adauga diagonale verticale din respectivul varf.
- Aceste diagonale nu trebuie sa se intersecteze!

