UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

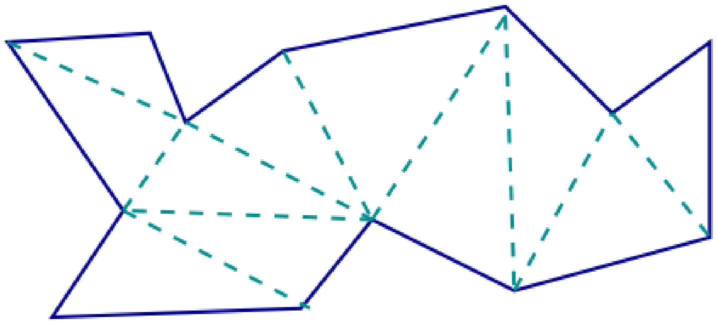
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computationala

5. Introducere in triangularea poligoanelor. Problema galeriilor de arta

Triangularea poligoanelor

- **Triangularea unui poligon** reprezinta descompunerea acestuia in triunghiuri disjuncte folosind diagonale non-intersectabile, astfel incat alte diagonale nu mai pot fi adaugate.
  - O multime maximala de diagonale ce nu se intersecteaza

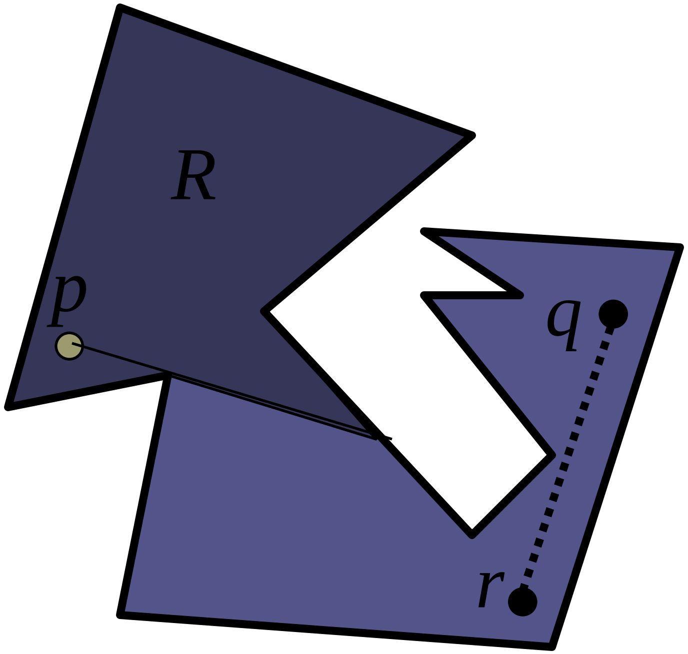


- **Diagonala**: segment intre doua punte ale poligonului care se afla in interiorul acestuia

Motivatie: Problema galeriei de arta

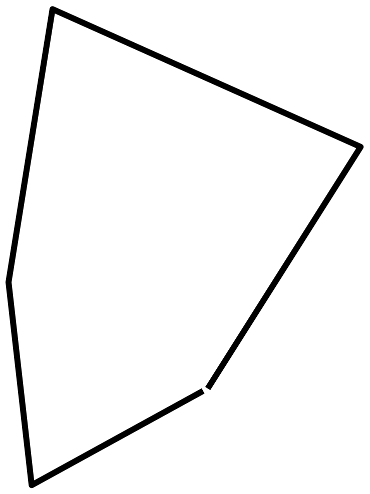
- **Definitie** doua puncte q si r intr-un poligon simplu P se pot *vedea* reciproc daca segmentul deschis qr este inclus complet in P.
- Un punct p *pazeste* o regiune $R \subseteq P$ daca p vede toate punctele $q \in R$

Problema Fiind dat un poligon P, care este numarul minim de *paznici* necesari pentru a pazi *P*, si care sunt pozitiile lor?

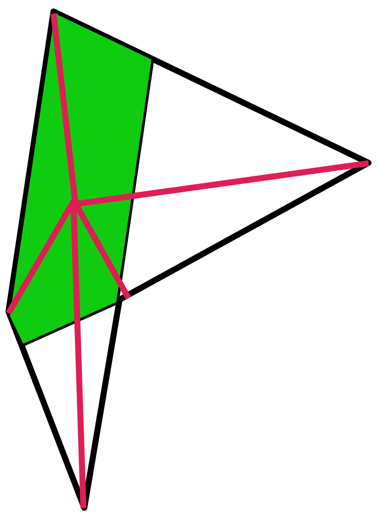


Observatii

- **Poligonul convex:** toate punctele sunt vizibile din orice punct
  - un singur paznic (in orice locatie) este suficient

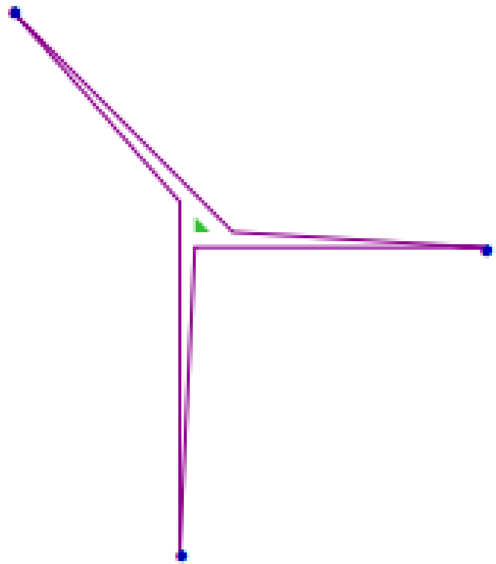


- **Poligonul stelat:** toate punctele sunt vizibile din orice punct din nucleu
  - un singur paznic, localizat in nucleu, este necesar

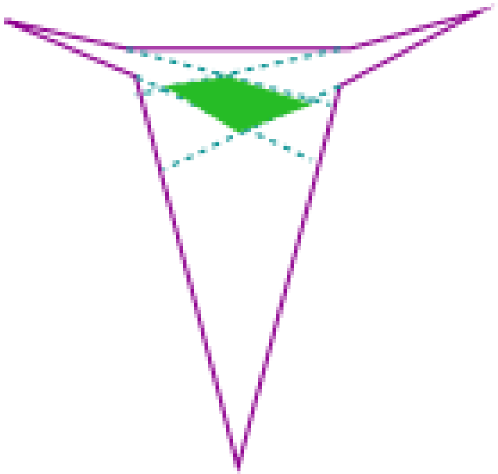


Observatii

- A vedea muchiile poligonului nu implica acoperirea interiorului
  - [fig] un paznic in fiecare varf nu acopera centrul

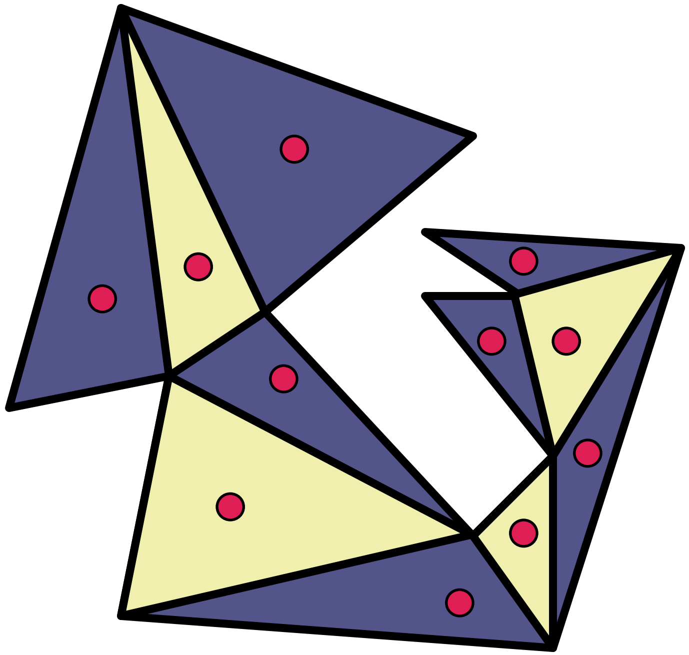


- Un paznic in fiecare varf nu este mereu solutia optima
  - [fig] un singur paznic in centru este suficient



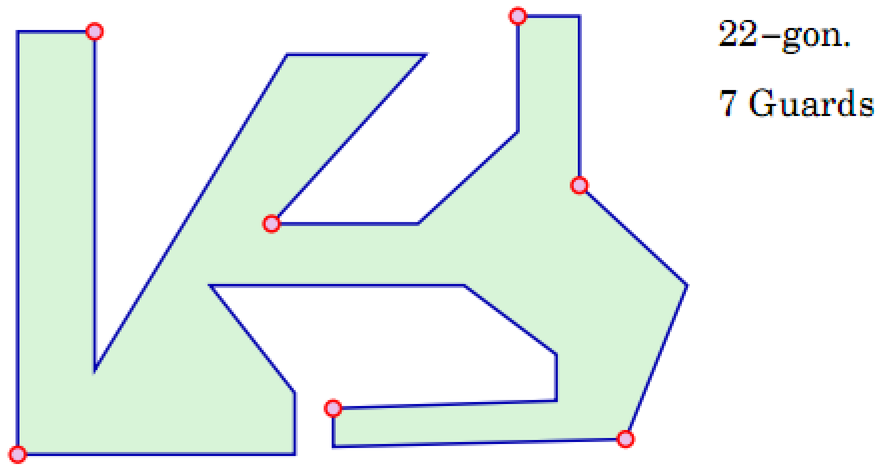
Problema galeriei de arta: limita superioara (existenta)

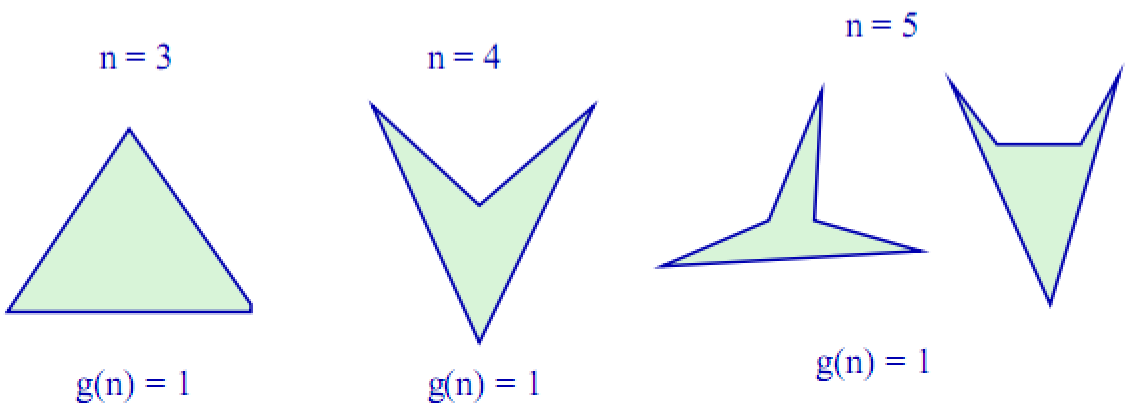
- **Teorema:** Orice poligon planar simplu cu *n* muchii are o triangulare de marimea *n-2*
  - *demonstratie mai tarziu*
- *n-2* paznici sunt suficienti pentru un poligon cu *n* muchii
  - Se imparte poligonul in n-2 triunghiuri (triangulare)
  - Se plaseaza un paznic in fiecare triunghi



Problema galeriei de arta: limita inferioara (1)

- *g(P)* = numarul minim de paznici pentru a acoperi P
- $g(n) = \max_{|P|=n} g(P)$
- *Care este cel mai mic g(n) aplicabil pentru orice n-gon?*

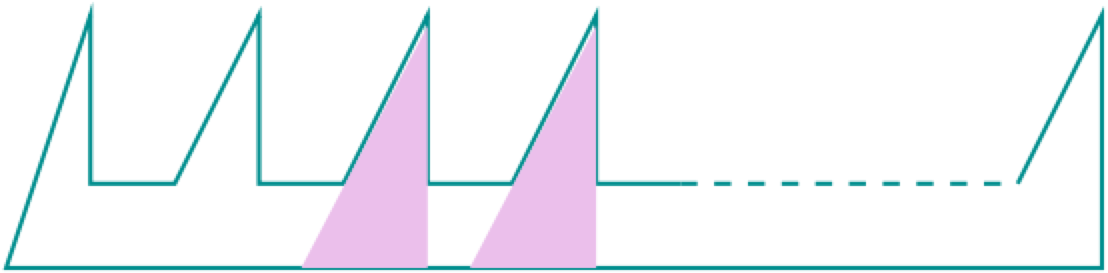




Problema galeriei de arta: limita inferioara (2)

- **Teorema** $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$

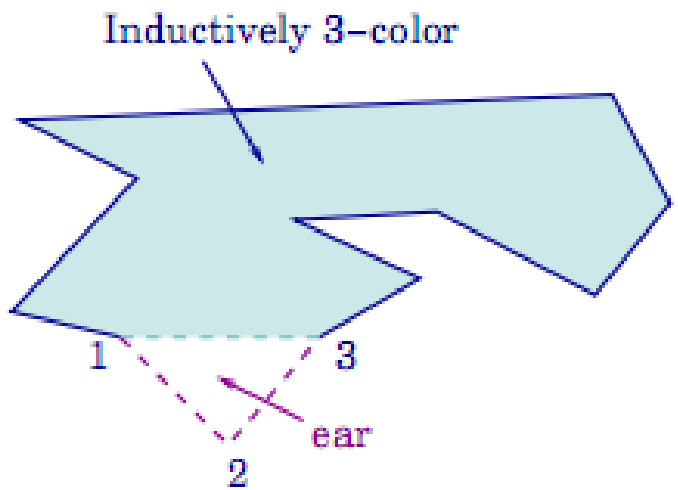
- **Demonstratie**
  1. Orice n-gon poate fi acoperit folosind $\lfloor n/3 \rfloor$ paznici
  2. Exista n-goane care necesita cel putin $\lfloor n/3 \rfloor$ paznici



conditia necesara

Problema galeriei de arta: limita inferioara (3)

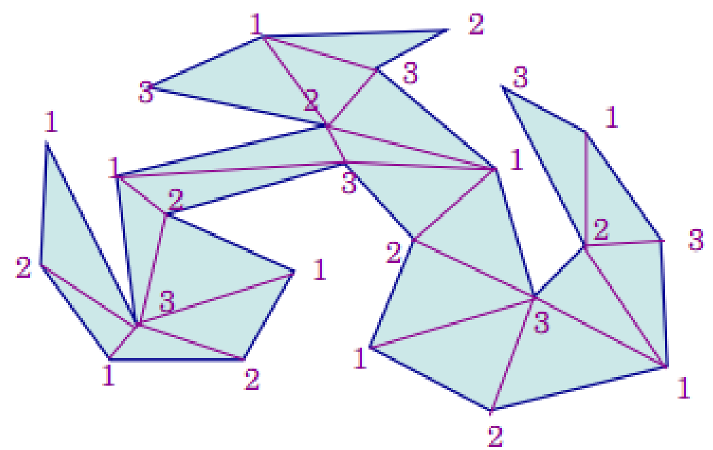
- **Lema** Poligonul triangulat este *3-colorabil*
  - *Orice varf poate fi marcat cu 1, 2, 3 astfel ca orice diagonala sa aiba valori diferite in capete*



- **Demonstratie**
  (Fisk – prin inductie)
  1. Detaseaza un varf convex ("ear")
  2. 3-coloreaza restul poligonului
  3. Reataseaza varful convex si atribuie-i culoarea nefolosita in capetele diagonalei

Problema galeriei de arta: solutia finala

1. Trianguleaza P
2. 3-coloreaza P
3. Gaseste culoarea cea mai putin frecventa
   - apare de cel mult $\lfloor n/3 \rfloor$ ori
4. Plaseaza cate un paznic in varfurile colorate cu aceasta
   - fiecare triunghi va avea un varf marcat cu acea culoare, deci va fi acoperit
   - → P acoperit



Obs: in 3D, nici *n* paznici nu ajung