UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

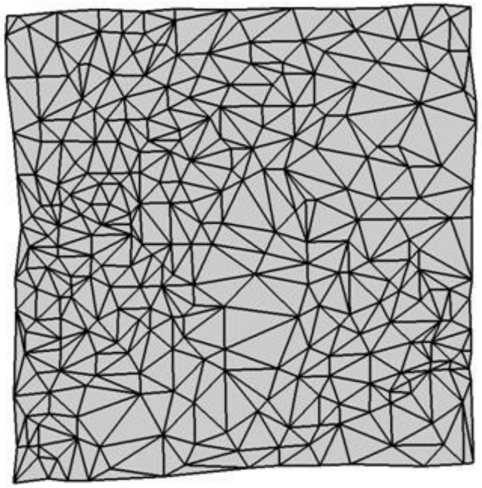
Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Geometrie computationala

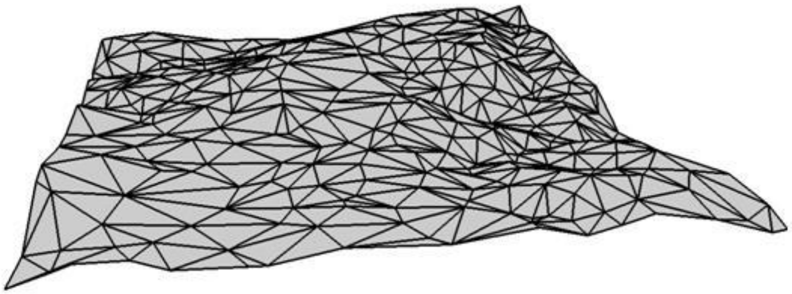
19. Triangulari Delaunay: Introducere. Definitii

Motivare

- Se atribuie o valoare de inaltime fiecarui punct.
- O triangulare a punctelor defineste o suprafata liniara pe bucati, compusa din zone triunghiulare.



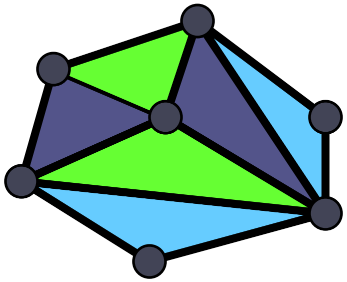
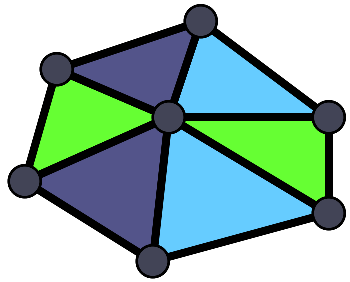
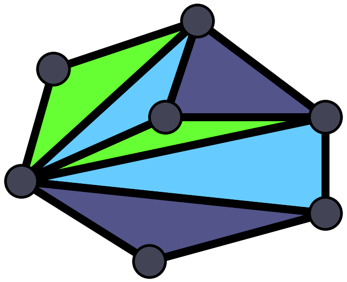
2D



3D

Triangulari

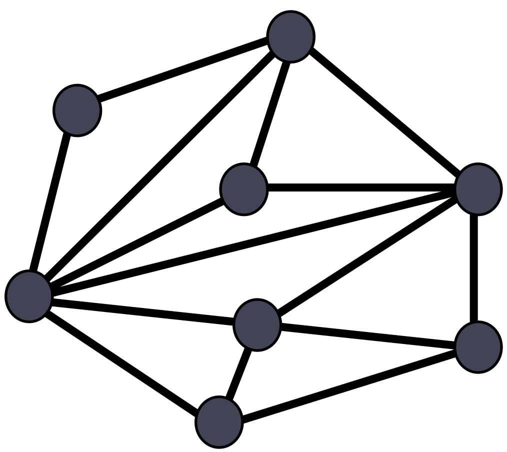
- **Definitie 1:** O *triangulare* a multimiii de puncte S in plan este o *partitie* a infasuratorii convexe in triunghiuri a caror varfuri sunt punctele, si care nu contin alte puncte.
- **Definitie 2:** O colectie maximala de segmente inauntru CH(S) (infasuratoarea convexa a lui S) ale caror capete sunt punctele din S. (Aceste segmente formeaza triunghiurile.)
- Exista un numar exponential de triangulari ale unui set de puncte. (cea mai cunoscuta limita este $O(59^n)$, unde n este numarul de puncte [Santos si Seidel, 2003].)

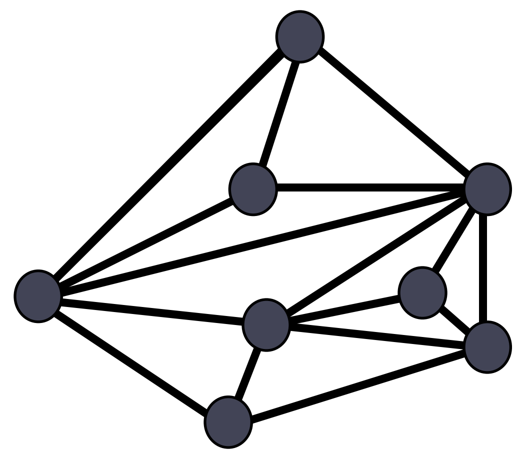
Numarul de triunghiuri

- Numarul de triunghiuri t intr-o triangulare de n puncte depinde de numarul de varfuri k ale infasuratorii convexe: $t = 2n–2-k$. Numarul de muchii: $e = 3n-3-k$

$n = 8$



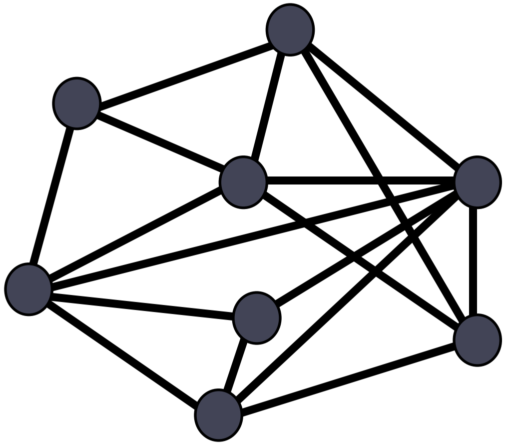
$k = 6 \;\rightarrow\; t = 8$



$k = 5 \;\rightarrow\; t = 9$

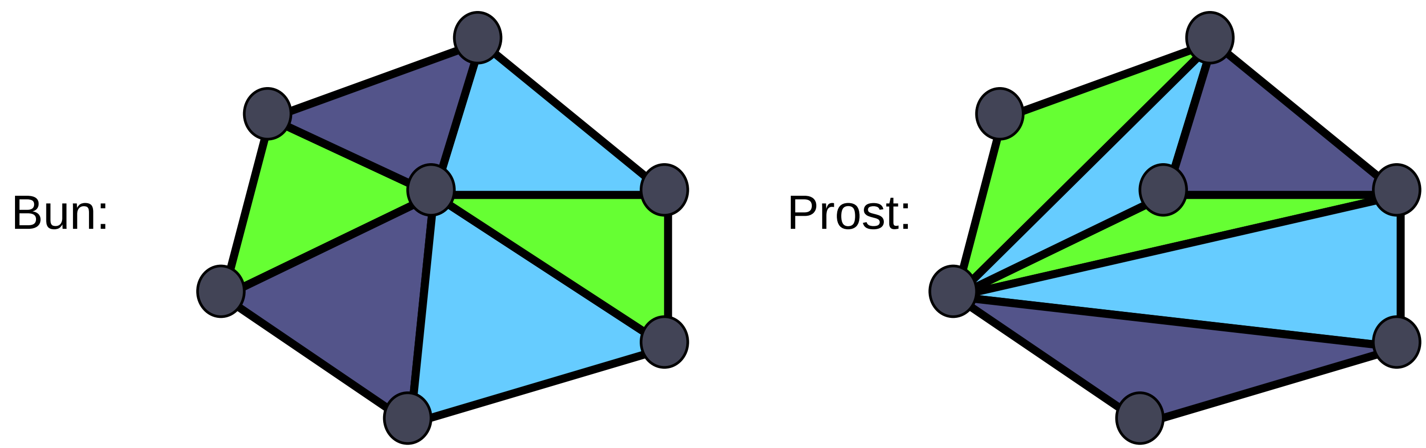
Un algoritm de triangulare in O(n^3)

- **<Repeat>**
  - Se aleg doua situri.
  - Daca muchia ce le leaga nu interseacteaza o muchie pastrata anterior, se pastreaza acea muchie.
- **<Until>** toate fetele sunt triunghiuri.



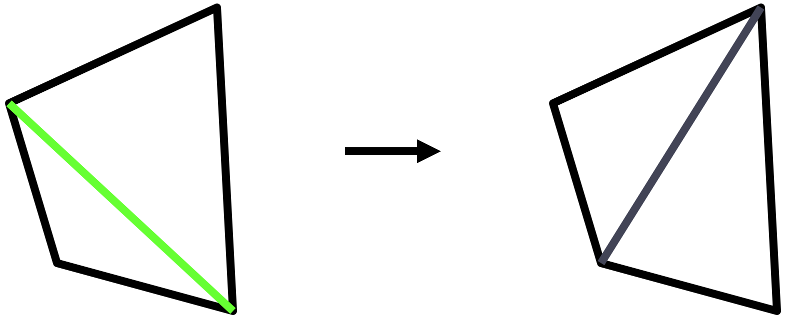
Triangulari de calitate (cu unghi optim)

- Se considera o triangulare T.
- Fie $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{3t})$ un vector de unghiuri in triangularea T sortat in ordine crescatoare.
- O triangulare T_1 este "mai buna" decat T_2 daca $\alpha(T_1) > \alpha(T_2)$ (comparate lexicografic).
- **Triangularea Delaunay** este "cea mai buna" (evitand pe cat posibil triunghiuri lungi si inguste).



Imbunatatirea unei triangulari

- In orice patrulater convex este posibila o *rotire de muchie*.
- Afirmatie: daca rotirea *imbunatateste* triangularea local, aceasta imbunatateste si triangularea globala.

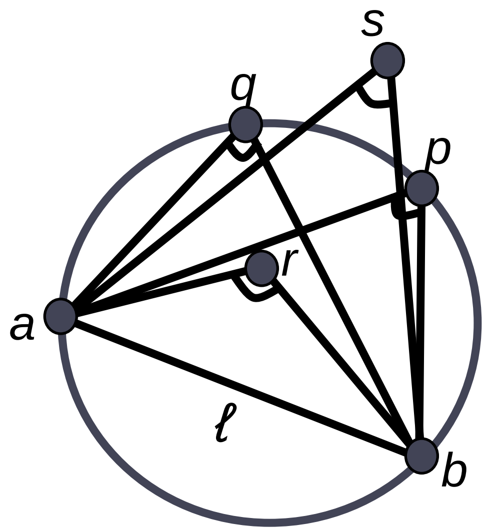


Daca o rotire de muchie imbunatateste triangularea (local si deci global), prima muchie este numita *ilegala*.

Teorema lui Thales

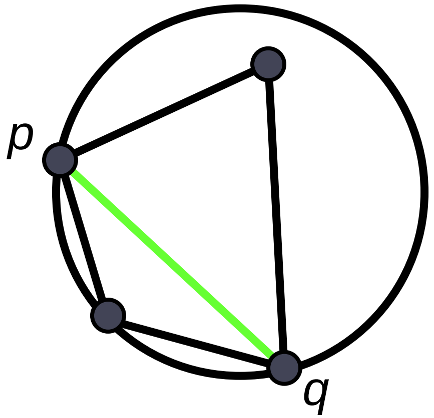
Fie C un cerc, si ℓ o dreapta ce intersecteaza C in punctele a si b. Fie p, q, r, si s puncte ce se afla de aceeasi parte a dreptei ℓ, unde p si q se afla pe C, r in interiorul lui C, si s in exteriorul lui C.

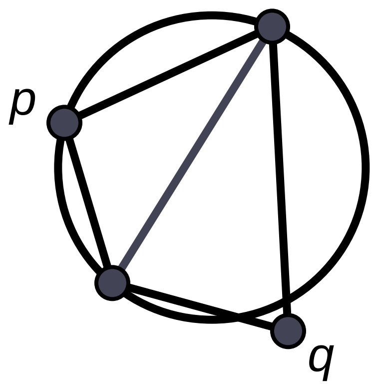
Atunci: $\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb$



Muchii ilegale

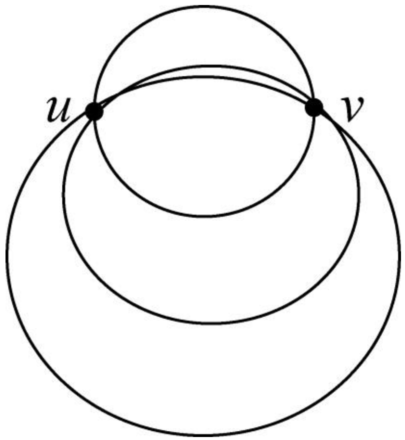
- **Lema:** O muchie *pq* este ilegala daca si numai daca oricare din varfurile opuse ei se afla in interiorul cercului definit de celelalte trei varfuri.
- **Demonstratie:** Folosind teorema lui Thales.
- Mai mult, un patrulater convex in pozitie generala are exact o diagonala legala.
- **Teorema:** O triangulare Delaunay nu contine muchii ilegale. (in caz contrar poate fi imbunatatita local).
- **Corolar:** Un triunghi este Delaunay daca si numai daca cercul sau circumscris nu contine alte situri.
- **Observatie:** O triangulare Delaunay nu este unica daca mai mult de trei situri sunt conciclice.





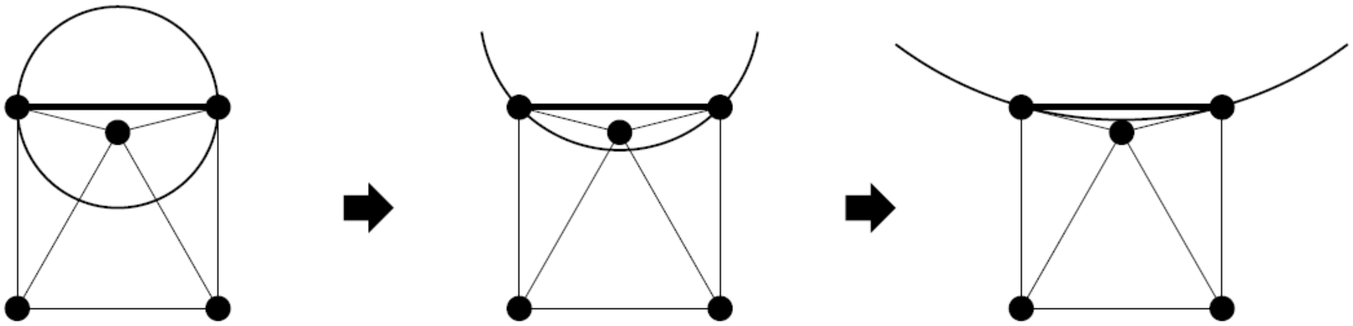
Definitie

- O triangulare Delaunay este o triangulare ce contine numai muchii Delaunay.
- O muchie (u,v) este Delaunay daca si numai daca exista un cerc circumscris pentru (u,v) care nu mai contine alte situri.



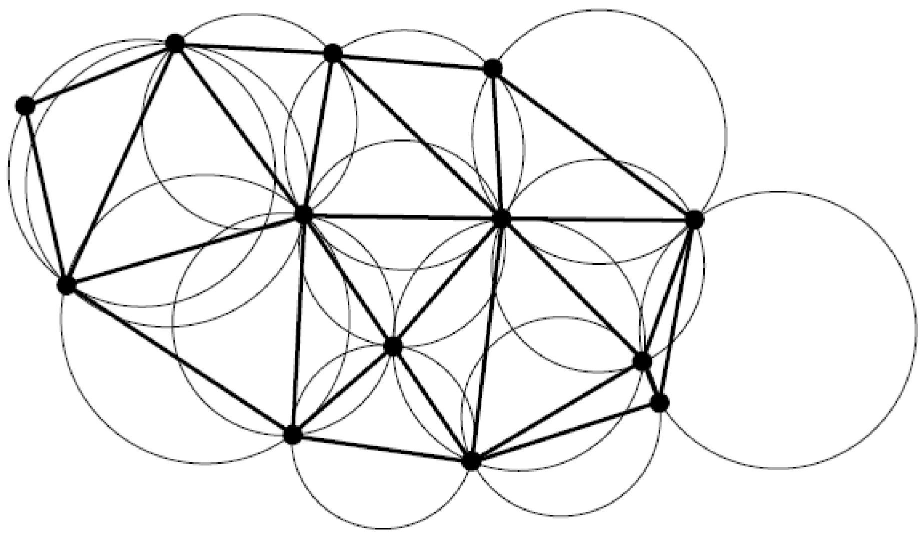
Leme

- Lema 1: Fiecare muchie a infasuratorii convexe este Delaunay.



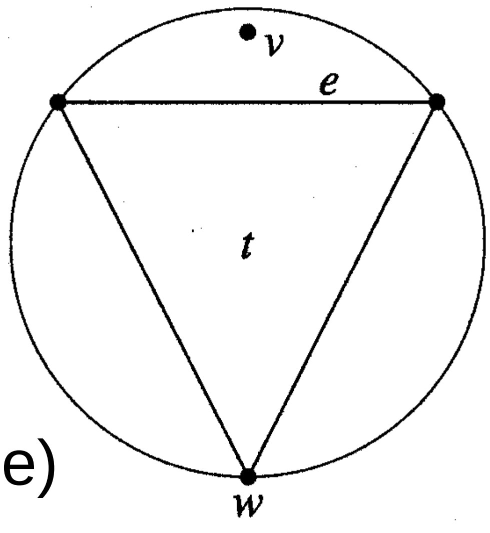
Leme

- Lema 2: Fiecare triunghi al unei triangulari Delaunay are un cerc circumscris gol.



Leme

- Lema 3: Fiecare muchie ce leaga un varf de cel mai apropiat vecin al sau este muchie Delaunay.
- Lema 4: Fie T o triangulare a setului de puncte S. Un triunghi t din T este Delaunay daca si numai daca muchiile sale sunt Delaunay.



Demonstratie: prin contradictie (in imagine)

Leme

- Lema 4 (enunt alternativ): Fie T o triangulare. Daca toate triunghiurile din T sunt Delaunay, atunci toate muchiile din T sunt Delaunay, si vice versa.

- Lema 5: Fie *m* o muchie a triangularii setului de puncte S. Muchia *m* poate fi local Delaunay, sau poate fi rotita astfel incat muchia creata prin rotirea lui *m* sa fie local Delaunay.