UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Ingineria Calculatoarelor

8. Ecuații diferențiale cu coeficienți variabili în timp

3.12.3 ECUAŢII DIFERENŢIALE CU COEFICIENŢI VARIABILI ÎN TIMP

În general sunt greu de rezolvat deoarece necesită substituţii, punerea soluţiilor sub formă de serie. În acest caz particular avem doar ecuaţii difernţiale de ordinul întâi, iar soluţia poate fi obţinută utilizând metoda factorilor integranţi.

O ecuaţie de ordinul întâi:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t) \tag{3.159}$$

poate fi rescrisă sub următoarea formă:

$$\frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}\right)y = f(t) \tag{3.160}$$

unde p este o nouă variabilă ce va fi legată de a(t).

Ecuaţia (3.160) poate fi acum pusă acum sub forma:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{d}{dt}(py) = f(t) \tag{3.161}$$

deoarece:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{d}{dt}(py) = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{dp}{dt}y + \frac{dy}{dt}p\right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}y + \frac{dy}{dt} \tag{3.162}$$

sau:

$$\frac{d}{dt}(py) = pf(t),\ d(py) = pf(t)dt \tag{3.163}$$

relaţie ce poate fi integrată:

$$\int d(py) = \int pf(t)dt \Rightarrow py = \int pf(t)dt + c \tag{3.164}$$

în care c este constanta de integrare, sau:

$$y = \frac{1}{p}\int pf(t)dt + \frac{c}{p} \tag{3.165}$$

Pentru a-l elimina pe p, se utilizează substituţia făcută:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = a(t) \tag{3.166}$$

şi rezultă:

$$\frac{dp}{p} = a(t)dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int a(t)dt \Rightarrow \ln p = \int a(t)dt \Rightarrow p = e^{\int a(t)dt} \tag{3.167}$$

Ecuaţiile (3.165) şi (3.167) reduc soluţia oricărei ecuaţii de ordin întâi la două integrări succesive:

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=f(t)\Rightarrow p=e^{\int a(x)dx}\quad y=\frac{1}{p}\int pf(t)dt+\frac{c}{p} \tag{3.168}$$

3.12.4 PROCESE DE NAŞTERE ŞI DE MOARTE

Se consideră un sistem care poate avea un număr finit sau numărabil de stări: $S_0, S_1, \ldots$. În intervalul de timp unic, Δt, sistemul aflat în starea S_k poate trece în starea S_{k+1}, cu probabilitatea $\lambda_k \Delta t$, poate trece în starea S_{k-1}, cu probabilitatea $\mu_k \Delta t$, sau poate rămâne în starea S_k, cu probabilitatea $1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta t$. Probabilitatea ca sistemul aflat în starea S_k să treacă în alte stări decât cele specificate este neglijabilă. Avem de-a face cu un proces Markov care, pentru cazul unui număr finit de stări, are graful reprezentat în figura 3.18.

S-a presupus că $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$ şi nici nu au mai fost reprezentate.

Coeficienţii λ_k şi μ_k se presupune că sunt dependenţi de k, dar independenţi de t, ceea ce conduce la un proces Markov omogen.

Procesul stocastic descris mai sus poartă numele de proces de naştere şi de moarte. Dacă starea S_k denotă o populaţie de k elemente, atunci o tranziţie în starea S_{k+1} reprezintă o naştere, iar o tranziţie în starea S_{k-1} reprezintă o moarte.

Un exemplu îl constituie mulţimea calculatoarelor aflate în funcţiune în-tr-o instituţie. Atunci când unul se defectează înseamnă că are loc o moarte, iar când unul este reparat are loc o naştere.

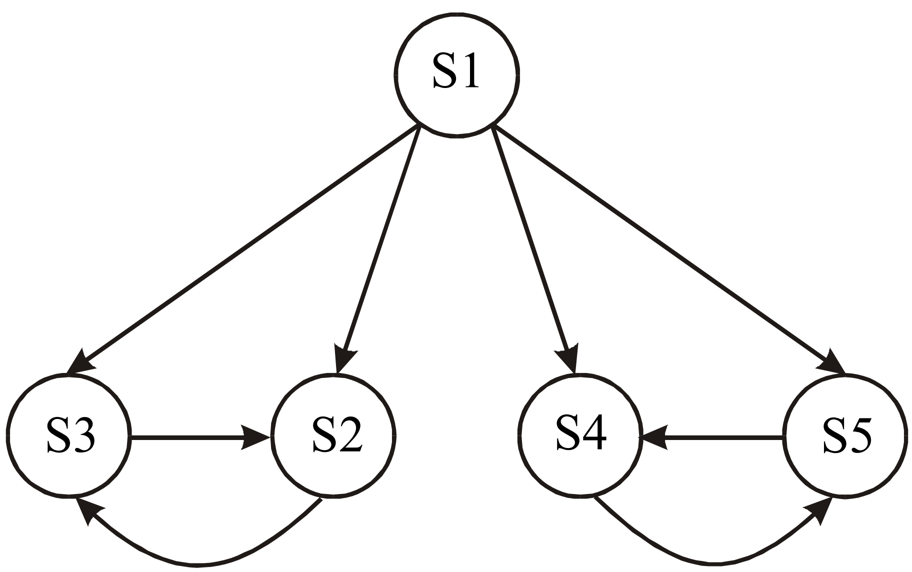

Figura 3.18 - Exemplu de proces Markov.

Dacă $\mu_i = 0, (\forall) i \geq 0$, atunci vom avea de-a face cu un proces de naştere pură. Dacă $\lambda_i = 0, (\forall) i \geq 0$, atunci avem de-a face numai cu un proces de moarte. Grafului din figura 3.18, care descrie un proces ergodic, îi corespund următorul sistem de ecuaţii diferenţiale (Chapman-Kolmogorov):

$$\begin{gathered} \frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t) \\ \vdots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t), (\forall) 1 \leq k \leq n-1 \end{gathered} \tag{3.169}$$

Rezolvarea acestui sistem, adaugând ecuaţia de normalitate:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1 \tag{3.170}$$

şi setul de condiţii iniţiale

$$p_0(0) \quad p_1(0) \quad \cdots \quad p_n(0) \tag{3.171}$$

conduce la probabilităţile stărilor, $p_k(t)$.

Procesul fiind ergodic, există limitele probabilităţilor pentru t tinzând către infinit. Aceste limite se pot afla din ecuaţiile Chapman-Kolmogorov, în care se anulează derivatele. Se obţine:

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 \\ \vdots \\ p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} p_0 \end{gathered} \tag{3.172}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţia:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \tag{3.173}$$

rezultă:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}} \tag{3.174}$$