UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Ingineria Calculatoarelor

12. Calculul fiabilității modulelor folosind modele Markov

4.2 CALCULUL FIABILITĂŢII SISTEMELOR UTILIZÂND MODELE MARKOV

Calculul fiabilităţii sistemelor pe baza modelelor Markov comportă următoarele etape:

- definirea stărilor sistemului;
- desemnarea grafului orientat asociat sistemului;
- scrierea şi rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale Chapman - Kolmogorov.

La modul cel mai general, unui sistem cu n blocuri i se pot asocia 2^n stări, reprezentând toate combinaţiile posibile de funcţionare / nefuncţionare pentru cele n blocuri. Nu toate stările au însă semnificaţie fizică pentru un sistem particular. În funcţie de structura sistemului numărul de stări poate fi sensibil redus. Astfel, pentru o configuraţie paralel, este util ca starea S_k să reprezinte starea în care sunt k blocuri defecte, deci un sistem cu n blocuri va avea $n+1$ stări: $S_0, S_1, \ldots, S_k, \ldots, S_n$. Probabilităţile de tranziţie rezultă din particularităţile sistemului analizat.

Pentru o structură serie, când defectarea unui bloc determină căderea întregului sistem, se pot defini stările astfel: S_k reprezintă starea în care blocul k este defect. Pentru un sistem cu n componente rezultă n stări. În funcţie de configuraţia sistemului pot rezulta şi alte moduri de definire a stărilor. Ultimele două etape au fost deja studiate detaliat în capitolul referitor la modelele

Markov.

4.3 CONSIDERAŢII ASUPRA TIMPULUI MEDIU DE BUNĂ FUNCŢIONARE

Vom încerca să apreciem modul în care structurile anterior amintite influenţează timpul mediu de bună funcţionare (**MTBF**). Conform definiţiei:

$$\mathrm{MTBF} = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t z(x)dx} dt \tag{4.22}$$

în care $z(t)$ reprezintă intensitatea defecţiunilor.

- Pentru **structura serie**:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t z_i(x)dx} = e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} z_i(x)\right)dx} \tag{4.23}$$

Rezultă atunci:

$$\mathrm{MTBF} = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} z_i(x)\right)dx} dt \tag{4.24}$$

Pentru cazul:

$$z_i(t) = \lambda_i = \mathrm{ct.} \Rightarrow \mathrm{MTBF} = \int_0^{+\infty} e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{MTBF}_i}} \tag{4.25}$$

adică $\mathrm{MTBF} < \mathrm{MTBF}_i, (\forall) i = 1,2,\ldots,n$.

Dacă $z_i(t)$ sunt funcţii care diferă mult între ele, atunci MTBF este mai dificil de evaluat.

- În cazul **structurii paralel**, expresia fiabilităţii este:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} R_i(t) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} R_i(t) R_j(t) + \cdots + (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n} R_k(t) \tag{4.26}$$

Folosind intensităţile defecţiunilor, rezultă:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t z_i(x)dx} dt - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} e^{-\int_0^t (z_i(x)+z_j(x))dx} dt + \cdots + (-1)^{n+1} e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} z_i(x)dx} \tag{4.27}$$

Dacă $z_i(t) = \lambda_i = \mathrm{ct.}$, atunci:

$$\mathrm{MTBF} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \tag{4.28}$$

Dacă în plus, $\lambda_i = \lambda, i = \overline{1 \div n}$, se obţine:

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{C_n^k}{k} \tag{4.29}$$

Se demonstrează că această expresie este echivalentă cu următoarea:

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0,557 + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n(n+1)} + \cdots \tag{4.30}$$

- Pentru **structura *r* din *n***, formula fiabilităţii este:

$$R_{total} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k R_k(t)(1 - R_k(t))^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=r}^{n} C_n^k \cdot e^{-k\int_0^t z(x)dx} \cdot \left(1 - e^{-\int_0^t z(x)dx}\right)^{n-k} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \cdot e^{-k\lambda t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-k} \tag{4.31}$$

dacă $z(t) = \lambda = \text{constant}$.

Pentru un caz concret, se desfac parantezele, se ordonează expresia, iar apoi **MTBF** se calculează integrând termen cu termen.

Pentru alte cazuri, **MTBF** este dificil de calculat, chiar dacă toate intensităţile defecţiunilor sunt constante. O metodă constă în exprimarea formulei fiabilităţii, folosind grupări serie sau paralel şi integrarea termen cu termen a acestei expresii.