Paradigme de programare

2010-2011, semestrul 2

Curs 12

Cuprins

- Sintaxa FOL
- Semantica FOL
- Proprietati
- Satisfiabilitate si validitate
- Inferente si demonstratii
- Unificarea propozitiilor
- Reguli de inferenta
- Forme normale
- Algoritm de conversie FOL-CNF

Logica cu predicate de ordinul 1 (FOL)

- Extinde logica propozitionala (unde universul discursului e descris prin propozitii declarative, fapte)
- Universul discursului contine:
  - obiecte (castel, vrajitor, matura, …)
  - relatii (prieten, destept, intre, …)
  - functii (cel_mai_bun_prieten, tara_natala, …)
- Spre deosebire de limbajul natural, FOL este simplificat astfel incat sa fie un limbaj neambiguu
- Sistem deductiv: cunoscand un set de obiecte, relatiile dintre ele si un set de proceduri de inferenta => noi relatii intre obiectele din universul discursului

Sintaxa FOL

- Constante: athos, porthos, aramis (cu litere mici)
- Variabile: Muschetar, Cardinal (cu litere mari)
- Predicate: respecta(porthos,athos)
- Functii: regina(franta) (calculeaza o valoare)
- Conective: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (dupa cum scade prioritatea)
- Cuantificatori: $\forall$, $\exists$
- Egalitate: =

Reguli sintactice

- termen = constanta | variabila | functie(termen,… termen)
- propozitie_atomica = predicat(termen,… termen) | termen=termen
- propozitie = propozitie_atomica | (propozitie) | ¬propozitie | propozitie conectiva_binara propozitie | cuantificator var1,var2,…varn•propozitie

- termenii stau pt obiecte
- propozitiile stau pt relatii

mimi

Semantica FOL (prin exemple)

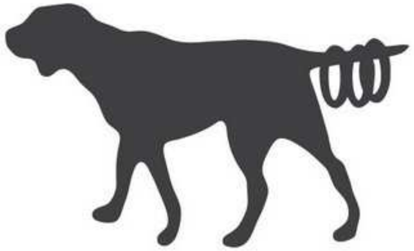
1. Vrabia malai viseaza.
2. Unele vrabii viseaza malai.
3. Nu toate vrabiile viseaza malai.
4. …
5. Nicio vrabie nu viseaza malai.
6. …
7. Numai vrabiile viseaza malai.
8. Toate si numai vrabiile viseaza malai.
9. mimi este o vrabie care viseaza malai.

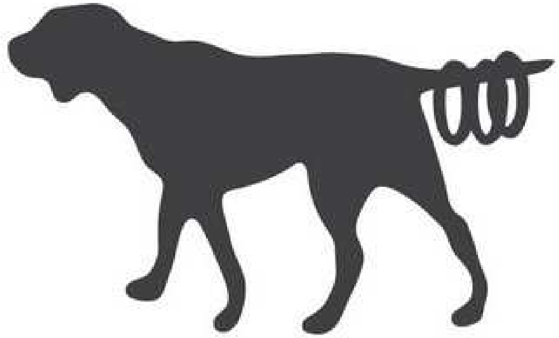
Semantica FOL (2)

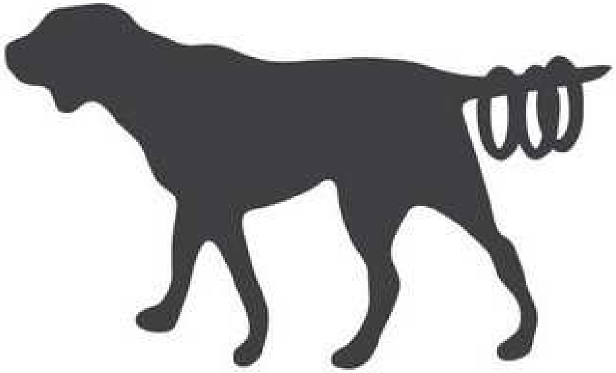
1. $\forall X \bullet (vrabie(X) \Rightarrow viseaza(X,malai))$
2. $\exists X \bullet (vrabie(X) \wedge viseaza(X,malai))$
3. $\neg(\forall X \bullet (vrabie(X) \Rightarrow viseaza(X,malai)))$
4. $\exists X \bullet (vrabie(X) \wedge \neg\, viseaza(X,malai))$
5. $\neg(\exists X \bullet (vrabie(X) \wedge viseaza(X,malai)))$
6. $\forall X \bullet (vrabie(X) \Rightarrow \neg\, viseaza(X,malai))$
7. $\forall X \bullet (viseaza(X,malai) \Rightarrow vrabie(X))$
8. $\forall X \bullet (viseaza(X,malai) \Leftrightarrow vrabie(X))$
9. $vrabie(mimi) \wedge viseaza(mimi, malai)$

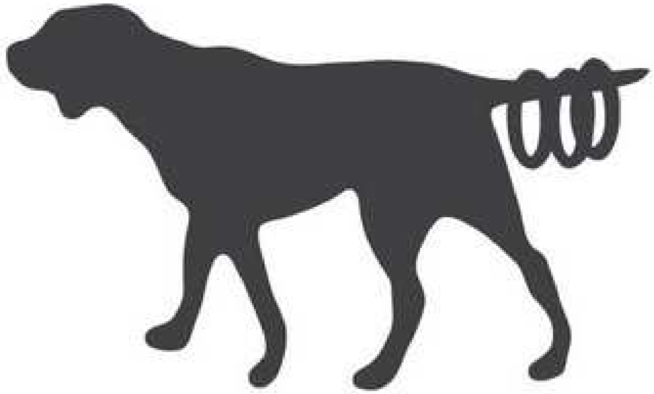
Greseli frecvente

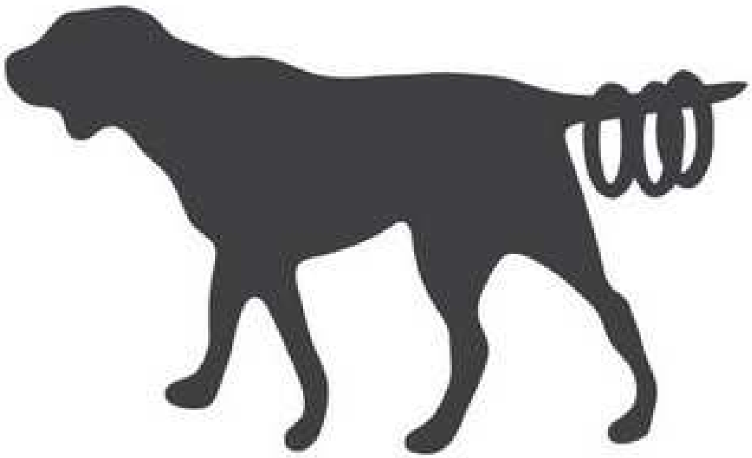
- Corect: in general, $\forall$ cu $\Rightarrow$, $\exists$ cu $\wedge$
- $\forall X \bullet (vrabie(X) \wedge viseaza(X,malai))$
  inseamna ca toata lumea e vrabie si toata lumea viseaza malai!
- $\exists X \bullet (vrabie(X) \Rightarrow viseaza(X,malai))$
  este o propozitie adevarata daca exista cineva care nu e vrabie!











Proprietati ale cuantificatorilor

- (Ne)Comutativitate

$\forall X \bullet \forall Y$ este totuna cu $\forall Y \bullet \forall X$

$\exists X \bullet \exists Y$ este totuna cu $\exists Y \bullet \exists X$

$\exists X \bullet \forall Y$ NU este totuna cu $\forall Y \bullet \exists X$

$\exists X \bullet \forall Y \bullet$ viseaza(X,Y)
inseamna ca exista cineva care viseaza la noi toti

$\forall Y \bullet \exists X \bullet$ viseaza(X,Y)
inseamna ca la fiecare dintre noi viseaza macar cineva

Proprietati ale cuantificatorilor (2)

- Dualitate (fiecare poate fi exprimat in functie de celalalt)

$\forall X \bullet p = \neg(\exists X \bullet \neg p)$

$\exists X \bullet p = \neg(\forall X \bullet \neg p)$

$\neg(\forall X \bullet p) = \exists X \bullet \neg p$

$\neg(\exists X \bullet p) = \forall X \bullet \neg p$

Proprietati ale conectivelor

- Dualitate

$\neg(a \lor b) = \neg a \land \neg b$

$\neg(a \land b) = \neg a \lor \neg b$

$a \land b = \neg(\neg a \lor \neg b)$

$a \lor b = \neg(\neg a \land \neg b)$

- Rescrierea implicatiilor

$a \Rightarrow b = \neg a \lor b$

Notiunea de adevar in FOL

- Propozitiile sunt adevarate relativ la un model si o interpretare
- Model = {D,I}

  D = domeniu (set de elemente/obiecte considerate de model)

  I = interpretare (o semantica asociata functiilor/predicatelor, conform careia putem sti ce calculeaza o functie sau pe ce n-tuplu este un predicat n-ar adevarat/fals)

Satisfiabilitate

- Propozitie satisfiabila = exista un model cu o anumita interpretare in care propozitia este adevarata

model	a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$\neg(a \vee b)$
M1	0	0	1	0	1
M2	0	1	1	1	0
M3	1	0	0	1	0
M4	1	1	1	0	0

Validitate

- Propozitie valida = propozitia este adevarata in orice model cu orice interpretare

model	a	b	$a \lor \neg a$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$	$(a \land b) \Rightarrow a$
M1	0	0	1	1	1
M2	0	1	1	1	1
M3	1	0	1	1	1
M4	1	1	1	1	1

Proceduri de inferenta

- Procedura de inferenta “sound”
  = genereaza numai propozitii valide (care rezulta din propozitiile existente)

- Procedura de inferenta “completa”
  = genereaza toate propozitiile valide (care rezulta din propozitiile existente)

Demonstratii

- Demonstratie (pentru o propozitie P) = a deduce P dintr-un set de propozitii Descr folosind proceduri de inferenta

- Demonstratie prin reducere la absurd
  - introduc $\neg$P in Descr
  - aplicand proceduri de inferenta asupra propozitiilor din Descr, ajung la o contradictie

Demonstratie prin reducere la absurd (exemplu)

"Cap castig, pajura pierzi; demonstreaza ca eu castig!"

– Axiome:

  - din enunt:

  $\neg$cap $\vee$ castig

  $\neg$pajura $\vee$ pierzi

  - din ontologia datului cu banul:

  cap $\vee$ pajura

  $\neg$castig $\vee$ pierzi

  $\neg$pierzi $\vee$ castig

Demonstratie prin reducere la absurd (exemplu) (2)

- Introduc ¬castig in descrierea problemei

¬castig	¬cap ∨ castig	¬cap
¬cap	cap ∨ pajura	pajura
pajura	¬pajura ∨ pierzi	pierzi
pierzi	¬pierzi ∨ castig	castig
castig	¬castig	contradictie

Unificarea propozitiilor

- 2 propozitii atomice unifica daca:
  - au acelasi predicat
  - exista o substitutie S={v1/X1, … , vn/Xn} pentru variabilele din cele 2 propozitii a.i. in urma substitutiei cele 2 propozitii devin una si aceeasi

- Substitutia U = cel mai general unificator pentru un set Prop de propozitii daca:
  - pentru orice alt unificator U' al lui Prop, exista o substitutie S a.i. subst(U',Prop)=subst(S,(subst(U,Prop)))

Unificarea propozitiilor (prin exemple)

- mananca(mimi,X)
  hraneste(mimi,Y)

- mananca(mimi,X)
  mananca(mimi,Y)

- mananca(X,malai)
  mananca(mimi,Y)

- mananca(X,malai)
  mananca(mimi,viermisor)

Unificarea propozitiilor (prin exemple)

- mananca(mimi,X) FAIL (nu au acelasi predicat)
  hraneste(mimi,Y)

- mananca(mimi,X) S={X/Y}
  mananca(mimi,Y)

- mananca(X,malai) S={mimi/X,malai/Y}
  mananca(mimi,Y)

- mananca(X,malai) FAIL
  mananca(mimi,viermisor)

Unificarea propozitiilor (prin exemple) (2)

- haleste(tata(X),Y)
  haleste(Canibal,tata(Canibal))

  S = {tata(X)/Canibal,tata(Canibal)/Y}

  In urma unificarii rezulta:
  haleste(tata(X),tata(tata(X)))

  Va rog frumos sa NU unificati sub forma:
  haleste(tata(X),bunicul(X))
  Nu e frumos sa il mananci pe bunicul!

Reguli de inferenta

- Modus ponens

  $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn$
  $Q1 \wedge Q2 \wedge \ldots \wedge Qn \Rightarrow Q$
  subst(S,Pi)=subst(S,Qi)
  ---------------------------------- (modus ponens)
  subst(S,Q)

Reguli de inferenta (2)

- Principiul rezolutiei

  $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pi \wedge \ldots \wedge Pn1 \Rightarrow R1 \vee R2 \vee \ldots \vee Rn2$
  $Q1 \wedge Q2 \wedge \ldots \wedge Qn3 \Rightarrow T1 \vee T2 \vee \ldots \vee Tk \vee \ldots \vee Tn4$
  subst(S,Pi)=subst(S,Tk)
  ---(rezolutie)
  $subst(S, P1 \wedge \ldots \wedge Pi\text{-}1 \wedge Pi\text{+}1 \wedge \ldots \wedge Pn1 \wedge Q1 \wedge \ldots \wedge Qn3 \Rightarrow R1 \vee \ldots \vee Rn2 \vee T1 \vee \ldots \vee Tk\text{-}1 \vee Tk\text{+}1 \vee \ldots \vee Tn4)$

- Rezolutia este o procedura de inferenta completa si sound pentru FOL.

Forme normale (ale propozitiilor FOL)

- Forma normala conjunctiva (CNF)
  = disjunctie de propozitii atomice (eventual negate)
  exemplu: $P1 \vee \neg P2 \vee \neg P3 \vee \ldots \vee Pn$

- Forma normala implicativa (INF)
  exemplu: $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \Rightarrow Q1 \vee Q2 \vee \ldots \vee Qm$

- Clauza Horn
  = propozitie in CNF in care fix un atom e nenegat
  exemplu: $\neg P1 \vee \neg P2 \vee \neg P3 \vee \ldots \vee \neg Pn \vee P$

  (obs: $\Leftrightarrow P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \Rightarrow P$)

Curaj, inca un algoritm… nu aruncati cu avioane, va rog!

Algoritm de conversie FOL-CNF

1. Eliminam implicatiile
   $a \Rightarrow b$ devine $\neg a \vee b$

2. Mutam negatiile spre interior
   $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
   $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
   $\neg(\forall X \bullet p) = \exists X \bullet \neg p$
   $\neg(\exists X \bullet p) = \forall X \bullet \neg p$
   $\neg(\neg p) = p$

Algoritm de conversie FOL-CNF (2)

3. Rebotezam variabilele cuantificate a.i. sa nu avem cuantificatori diferiti care folosesc acelasi nume de variabila.

4. Aducem toti cuantificatorii la inceputul propozitiei, pastrand ordinea in care apar.

5. Skolemizam (= eliminam cuantificatorii existentiali dupa urmatoarele reguli):

Algoritm de conversie FOL-CNF (3)

5. (continuare)
   - daca respectivul cuantificator nu era precedat de niciun cuantificator universal, eliminam cuantificatorul existential si in locul variabilei cuantificate punem o constanta
   - daca era, eliminam cuantificatorul existential si in locul variabilei cuantificate punem o functie de toate variabilele cuantificate universal care il precedau

   exemplu: $\forall X \bullet \forall Y \bullet \exists Z$ devine $\forall X \bullet \forall Y \bullet f(X,Y)$

Algoritm de conversie FOL-CNF (4)

6. Eliminam cuantificatorii universali (tot ce ramane este inteles ca fiind cuantificat universal)

7. Distribuim SAU prin SI
   $(a \wedge b) \vee c$ devine $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$

8. Liniarizam conjunctiile/disjunctiile imbricate
   $(a \vee b) \vee c$ devine $a \vee b \vee c$

Exemplu de conversie FOL-CNF

- “Oricine rezolva toate laboratoarele e apreciat de cineva.”
- $\forall X \bullet (\forall Y \bullet (laborator(Y) \Rightarrow rezolva(X,Y)) \Rightarrow \exists Y \bullet apreciaza(Y,X))$

1. Eliminam implicatiile
   $\forall X \bullet (\neg(\forall Y \bullet \neg laborator(Y) \vee rezolva(X,Y)) \vee \exists Y \bullet apreciaza(Y,X))$

2. Mutam negatiile spre interior
   $\forall X \bullet ((\exists Y \bullet \neg (\neg laborator(Y) \vee rezolva(X,Y))) \vee \exists Y \bullet apreciaza(Y,X))$

Exemplu de conversie FOL-CNF (2)

2. Mutam negatiile spre interior (rescriere)
   $\forall X \bullet ((\exists Y \bullet (laborator(Y) \wedge \neg rezolva(X,Y))) \vee \exists Y \bullet apreciaza(Y,X))$

3. Rebotezam variabilele cuantificate
   $\forall X \bullet ((\exists Y \bullet (laborator(Y) \wedge \neg rezolva(X,Y))) \vee \exists Z \bullet apreciaza(Z,X))$

4. Eliminam cuantificatorul existential (skolemizare)
   $\forall X \bullet (laborator(f(X)) \wedge \neg rezolva(X,f(X)) \vee apreciaza(g(X),X))$

Exemplu de conversie FOL-CNF (3)

5. Eliminam cuantificatorul universal

   $laborator(f(X)) \wedge \neg rezolva(X,f(X)) \vee apreciaza(g(X),X)$

6. Distribuim SAU prin SI

   $(laborator(f(X)) \vee apreciaza(g(X),X)) \wedge$
   $(\neg rezolva(X,f(X)) \vee apreciaza(g(X),X))$

Rezumat algoritm

- Eliminam implicatiile
- Mutam negatiile spre interior
- Rebotezam variabilele cuantificate
- Aducem cuantificatorii la inceput
- Skolemizam
- Eliminam cuantificatorii universali
- Distribuim SAU prin SI
- Liniarizam conjunctiile/disjunctiile imbricate