



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI



Instrumente Structurale
2007-2013



Platformă de e-learning și curriculum e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Algoritmilor

26. Algoritmii de Pompă și Preflux

Bibliografie

- [1] C. Giumale – Introducere in Analiza Algoritmilor - cap. 5.6
- [2] Cormen – Introducere in algoritmi - cap. 27
- [3] Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/Ford-Fulkerson_algorithm

Pompare preflux (1)

- **Idee:** Simularea curgerii lichidelor într-un sistem de conducte ce leagă noduri aflate la diverse înălțimi;
- **Sursa – înălțime maximă;**
- **Inițial** toate **nodurile** exceptând sursa sunt la **înălțime 0;**
- **Destinația** rămâne în permanență la **înălțimea 0!**

Pompare preflux (2)

- Există un preflux inițial în rețea obținut prin încărcarea la capacitate maximă a tuturor conductelor ce pleacă din s ;
- Excesul de flux dintr-un nod poate fi stocat într-un rezervor al nodului (**Notat $e(u)$**);
- Când un nod u are flux disponibil în rezervor și o conductă spre un alt nod v nu este încărcată complet \rightarrow înălțimea lui u este crescută pentru a permite curgerea din u în v .

Pompare preflux – Definiții (1)

- $G = (V, E)$ rețea de flux;
- **Definiție: Preflux** = $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute restricțiile:
 - $f(u, v) \leq c(u, v), \forall (u, v) \in E$ – respectarea capacității arcelor;
 - $f(u, v) = -f(v, u), \forall u, v \in V$ – simetria fluxului;
 - $\sum_{v \in V} f(u, v) \geq 0, \forall u \in V \setminus \{s\}$ – ~~conservarea fluxului.~~
- **Definiție: Supraîncărcare a unui nod:**
 - $e(u) = f(V, u) \geq 0, \forall u \in V \setminus \{s\}$.

Pompare preflux – Definiții (2)

- **Definiție:** O funcție $h: V \rightarrow \mathbb{N}$ este o **funcție de înălțime** dacă îndeplinește restricțiile:
 - $h(s) = |V| - \text{fixă}$;
 - $h(t) = 0 - \text{fixă}$;
 - $h(u) \leq h(v) + 1$ pentru orice arc rezidual $(u,v) \in G_f - \text{variabilă}$.
- **Lema 5.19:** G – rețea de flux, $h: V \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție de înălțime. Dacă $\forall u, v \in V, h(u) > h(v) + 1$ atunci arcul (u,v) nu este arc rezidual.

Pompare preflux – Metode folosite

- **Pompare(u,v)** // pompează fluxul în exces ($e(u) > 0$)
// are loc doar dacă diferența de înălțime dintre u și v este 1
// ($h(u) = h(v) + 1$), altfel nu e arc rezidual și nu ne interesează
 - $d = \min(e(u), c_f(u,v));$ // cantitatea de flux pompată
 - $f(u,v) = f(u,v) + d;$ // actualizare flux pe arcul (u,v)
 - $f(v,u) = -f(u,v);$ // respectarea simetriei
 - $e(u) = e(u) - d;$ // actualizare supraîncărcare la sursă
 - $e(v) = e(v) + d;$ // actualizare supraîncărcare la destinație
- **Înălțare(u)** // mărește $h(u)$ dacă u are flux în exces
// ($e(u) > 0$) și $u \notin \{s, t\} \forall (u,v) \in G_f$ avem $h(u) \leq h(v)$
 - $h(u) = 1 + \min\{h(v) \mid (u,v) \in G_f\}$

Pompare preflux – Inițializare

- **Init_preflux(G, s, t)**
 - **Pentru fiecare** ($u \in V$)
 - $e(u) = 0$ // inițializare exces flux in nodul u
 - $h(u) = 0$ // inițializare înălțime nod u
 - **Pentru fiecare** ($v \in V$) // inițializare fluxuri
 - $f(u,v) = 0$
 - $f(v,u) = 0$
 - $h(s) = |V|$ // inițializare înălțime sursă
 - **Pentru fiecare** ($u \in \text{succs}(s) \setminus \{s\}$)
// actualizare flux + exces
 - $f(s,u) = c(s,u)$;
 - $f(u,s) = -c(s,u)$;
 - $e(u) = c(s,u)$

Pompare preflux – Algoritm

- Pompare_preflux(G, s, t)
 - Init_preflux(G, s, t) // inițializarea prefluxului
 - **Cât timp** (1) // cât timp pot face pompări sau înălțări
 - **Dacă** ($\exists u \in V \setminus \{s, t\}, v \in V \mid e(u) > 0$ și $c_f(u, v) > 0$ și $h(u) = h(v) + 1$) // încerc să pompez
 - Pompare(u, v); **continuă**;
 - **Dacă** ($\exists u \in V \setminus \{s, t\}, v \in V \mid e(u) > 0$ și $\forall (u, v) \in E_f, h(u) \leq h(v)$)
 - Înălțare(u); **continuă**; // încerc să înalț
 - **Întrerupe**; // nu mai pot face nimic \rightarrow am ajuns la flux max
 - **Întoarce** $e(t)$ // $e(t) = |f| =$ fluxul total în rețea

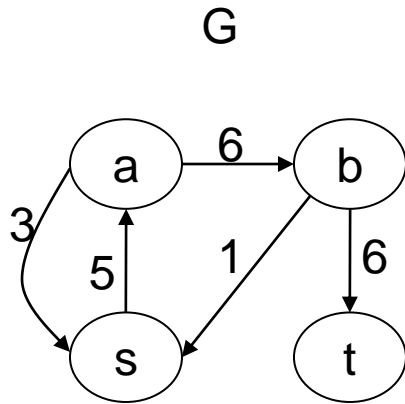
● **Complexitate?**



Pompare preflux – Complexitate

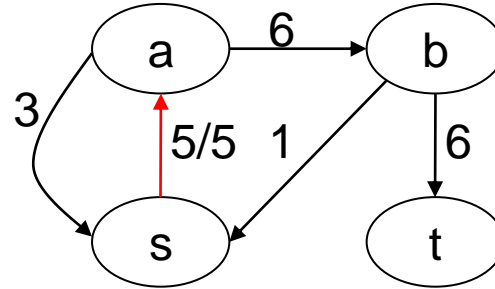
- Init_preflux: $O(V * E)$
- Pompare(u,v): $O(1)$
- Înălțare(u): $O(V)$ – implică găsirea minimumului dintre nodurile succesoare
- Cât timp: [vezi Cormen]
 - Câte înălțări?
 - Care e înălțimea maximă? $2 |V| - 1$
 - Câte pompări?
 - Pompări saturate: $2 |V| |E|$
 - Pompări nesaturate: $4 |V|^2 (|V| + |E|)$
- Complexitate totală: $O(V^2 * E)$ [vezi Cormen]

Exemplu Pompare preflux (1)

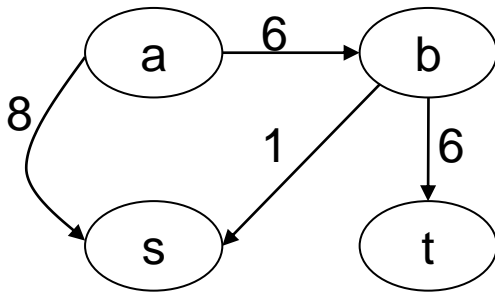


$$\begin{aligned}
 h(s) &= 4 \\
 h(a) &= h(b) = h(t) = 0 \\
 e(a) &= 5 \\
 e(s) &= e(b) = e(t) = 0
 \end{aligned}$$

Init_preflux →



G_f →



Înălțare
(a) →

$$\begin{aligned}
 h(s) &= 4 \\
 h(a) &= 1 \\
 h(b) &= h(t) = 0 \\
 e(a) &= 5 \\
 e(s) &= e(b) = e(t) = 0
 \end{aligned}$$

Pompare
(a,b) →

G_f



Exemplu Pompare preflux (2)

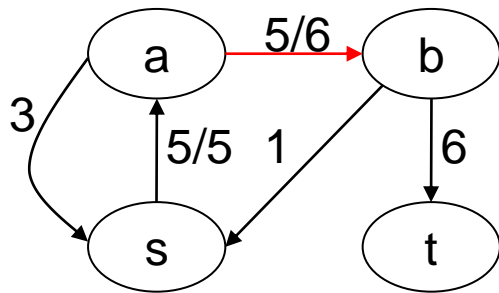
$$h(s) = 4$$

$$h(a) = 1$$

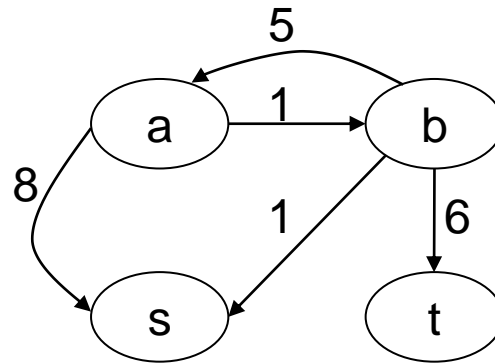
$$h(b) = h(t) = 0$$

$$e(b) = 5$$

$$e(s) = e(a) = e(t) = 0$$



G_f



Înălțare
(b)

$$h(s) = 4$$

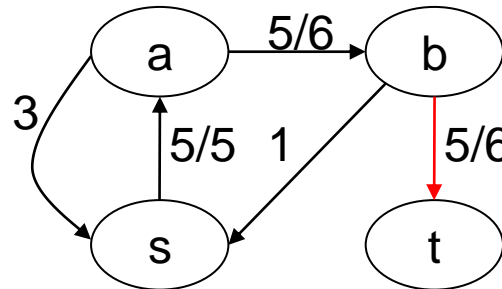
$$h(a) = h(b) = 1$$

$$h(t) = 0$$

$$e(b) = 5$$

$$e(s) = e(a) = e(t) = 0$$

Pompare
(b,t)



$$h(s) = 4$$

$$h(a) = h(b) = 1$$

$$h(t) = 0$$

$$e(t) = 5$$

$$e(s) = e(a) =$$

$$= e(b) = 0$$

